弹性力学

〔苏〕С.П.ДЕМИДОВ

杨桂通　蔡中民 译

高等教育出版社

弹性力学

〔苏〕С. П. 杰米多夫 著

杨桂通 蔡中民 译

高等教育出版社

（京）112号

内容简介

本书是1979年苏联出版的一本内容丰富的弹性力学教材。全书共分十一章，除系统地介绍了应变、应力、应力应变关系、一般定理和变分原理以及曲线坐标中的弹性力学方程外；详细地讲授了直杆的扭转和弯曲，曲杆问题，接触问题，平面问题中的复变函数方法、变分法、有限元法以及应力集中等工程应用问题。在附录中介绍了张量计算的基础和求解扭转问题的FORTRAN语言的计算程序。

本书可供机械、土木、水利、工程力学等专业的大学生和研究生以及工程技术人员参考。

本书由董务民同志进行校订和编辑加工。

弹性力学

〔苏〕С·П·杰米多夫 著

杨桂通 蔡中民 译

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京市顺义县印刷厂印装

开本850×1168 1/32 印张 17.625 字数440 000

1992年5月第1版 1992年5月第1次印刷

印数 0001—1 605

ISBN 7-04-002810-7/TB·154

定价10.75 元

译者前言

本书是苏联莫斯科鲍曼(Н. Э. Бауман)高等工业学院 С. П. Демидов 为该校机械动力学专业所写的弹性力学基础教科书，并作为该校150周年校庆的献礼而出版。本书内容丰富，结构合理，由浅入深，概念清晰，基本理论与工程应用并重。内容包括基本方程与基本原理，各种截面直杆的扭转与弯曲，曲杆问题，应力集中问题，平面问题中的复变函数法、变分法和有限元法等工程应用问题，最后在附录中给出了一个既简明又实用的张量计算介绍。因此，本书是机械类专业、工程力学专业、土建水利类专业的大学生和研究生以及工程技术人员的良好参考书。

在本书的翻译过程中，译者对所能发现的印刷错误作了订正，个别地方增加了注释。限于水平，不妥之处，请读者批评指正。

熊祝华教授审阅了译稿全文，提出了许多宝贵意见，谨表谢意。

译者

1986年8月

序

提高机器的可靠性、降低单位功率的造价和原材料的消耗，是苏共二十五次代表大会向机器制造部门提出的主要任务之一。

为了解决这个问题，需要对强度问题广泛地进行理论和实验研究，并需相应地培养出大批工程师。在高等工业学校的一些机械制造专业的教学计划中，已经包括了“弹性力学”、“塑性力学”以及其他变形固体力学方面的课程。近年来，在许多高等工业学校中已经设置了“机械动力学和机械强度”的新专业。

本书是以莫斯科鲍曼高等工业学院对“机械动力学和机械强度”专业大学生讲授的讲义以及为提高“材料力学”教研室教师水平所用的讲义为基础而编写的。

本书内容的叙述以高等工业学校的数学为基础；在某些个别情况下，对一些数学问题进行了简短的提示，或者指出了相应的文献。例如，本书中所使用的张量运算，就是在附录I中给出的。正文中引用了该附录(1^0和2^0)所列举的公式。

作者深深感谢 С. Д. Пономарев 教授对本书内容所给予的有益建议，感谢Л.И.Балабух和Н. Н. Малинин教授对手稿所提的宝贵意见。作者对各位评论家——Н. Д. Тарабасов 教授和以 В. С. Калинин 教授为首的列宁格勒船舶学院材料力学教研室——给予本书的关注和付出的大量劳动表示衷心的感谢。

作者

目　录

绪 论

弹性力学是连续介质力学的一个分支学科，它的任务是确定在外力或温度作用下弹性固体内的应力和应变。这样的任务在材料力学课程中也曾讨论过。不过，同样的问题在这两种课程中的解法却有着重大的区别。材料力学主要是在一系列的几何的或物理的假设基础上来寻求杆件一类问题的解答。这种方法尽管不是在所有的情况下都是完全精确的，但却能给出相当简单的应力计算公式。

弹性力学仅限于确定物体的应力-应变状态，而且，可不使用未加证明的假定便可得到更为精确的解，一般地说，物体的形状可以是任意的。

用弹性力学方法得到的结果可以用来评价材料力学采用的假设，并给出这些假设的正确性界限。但是，更为重要的却是用弹性力学方法可以求解一系列具有实际意义的重要问题，这些问题用材料力学的初等方法是无法得到解答的。例如，在机械制造中非常重要的应力集中问题，非圆截面或变截面柱体的扭转问题，任意加载条件下的曲杆应力求解问题，接触问题等等。

若不采用某些辅助性假设，不对研究对象进行抽象化，弹性力学仍然是寸步难行的。实际的固体是以模型的形式进行研究的，这种模型只在一定的条件下反映固体的基本的和共同的性质。根据所取固体模型的特点，弹性力学可分为经典的、线性的和非线性的。

经典弹性力学的研究课题是固体的应力应变状态，其模型有下列性质：1）连续性，2）理想弹性，3）应力-应变间成线性关

系，4）足够的刚度(小位移)，5）均匀性，6）各向同性。

经典弹性力学是线性弹性力学中最为简单的一种。线性弹性力学研究的领域更为广泛，它研究固体的应力-应变状态，该固体可以是非均匀的、各向异性的，即在力学模型的上述六种基本性质中只包括前四种。

近十年来，随着新材料的采用和结构中各种柔性构件的广泛应用等技术的发展，引起了解决非线性弹性力学问题的必要性。非线性问题可以是几何非线性(即物体没有足够的刚度，例如柔性杆)或是物理非线性(即物体的材料不服从 Hooke 定律)，也可以是兼有几何和物理非线性(例如由橡皮或某些塑料制成的零件)。在所有这些问题中，连续性和理想弹性是模型必然具有的性质，是否可能具有其他具体性质，则取决于抽象化了的固体特征。这样一来，非线性弹性力学具有更为一般的特点，并可解决现代技术中经常地、不可避免地要提出的、非常广阔领域里的问题。但这并不降低线性弹性力学的基础作用，也不意味着要我们把线性弹性力学看成是非线性弹性力学的特殊情况。相反地，学习弹性力学应从历史上首先建立的而且已经研究得比较完善的线性弹性力学开始。在这方面，线性弹性力学应带有类似入门课程的特点。

弹性力学的奠基性研究工作是由 Navier(1821)，Cauchy(1822)，Poisson(1829)差不多同时完成的。他们各自独立地得到了弹性力学的全部基本方程。特别突出的是 Cauchy 的工作。与 Navier 和 Poisson 引进分子力假设的工作不同，Cauchy 利用固体静力学的方法引进了应变与应力的概念，建立了平衡微分方程、边界条件、应变和位移的关系，并首先给出了只含两个弹性常数的各向同性体的应力应变关系。在那些年代里，还出现了 M. B. Остроградский 关于弹性体内的一个小范围内受到扰动时弹性波传播问题的研究。Poisson 在他的著作中引用了这些研究工作，

并第一次(1830)① 证明了在均匀各向同性介质中有两种类型波(膨胀波和畸变波)存在。

在弹性力学中,Lame和Clapeyron相继做过很重要的贡献,他们不仅研究了弹性力学的基础性问题,而且给出了一系列有实际意义的问题的提法和解答。Lame写了第一本弹性力学的书«固体的数学弹性理论讲义»②(1852)。Green(1829)的工作具有巨大的意义,他没有引用任何关于弹性特征的假设,而只是基于能量守恒原理就给出了应力应变关系的结论。这一工作结束了当时关于弹性常数数目的争论。

即使这样肤浅地列举一下弹性力学的全部重要工作已经花了不少的篇幅。除了向希望了解弹性力学发展史的读者介绍引人入胜的著作[55]外,在这里仅列举一些国内外卓越的学者③,他们的工作在弹性力学形成过程中具有决定性意义。这首先是Saint-Venant, Kirchhoff, Love, Voigt, Hertz, Michell, С. П. Тимошенко, И. Г. Бубнов, Б. Г. Галеркин, П. Ф. Папкович, Г. В. Колосов, Н. И. Мусхелишвили等。譬如说,Г. В. Колосов和Н. И. Мусхелишвили研究了用复变量解析函数求解弹性力学问题的有效方法。

在弹性力学的发展过程中,根据实际的需要,它的某些问题随后又发展成了变形体力学的一些专门分支学科,例如,"板壳理论","变形系统的稳定性","弹性系统的振动","实验应力分析","热弹性力学"等。

---

① S. D. Poisson,于1829年发表了这一结果,见"Memoire sur Lequilibre at le mouvement des corps elastiques, Memoires Aeademie Scieuee Paris (1829)623,原文误为1830年。此外,Cauchy也给出了同样的结果,见其«数学演习»一书,原著为«Exercices de mathmatique», 1830。——译者

② 原著为法文,见«Lecons sur la theorie mathematique de lélasticite des so ides», Paris(1852)。——译者

③ 我国学者在弹性力学发展上也做出了不少可贵的贡献,见书末译者所加的补充文献。——译者

现代技术的蓬勃发展，不可避免地向变形体力学提出新的更加复杂的问题。例如，传统材料在高温、高压等极为复杂的条件下工作，运用新型材料——各种耐热高强合金，复合材料，高强度和高模量纤维等。这就导致了除研究弹性体模型之外，还必须研究变形体的其他模型；实际上，在工程计算中，广泛地采用了早已建立的塑性力学、蠕变力学、粘弹性力学的方法和随机应力作用下的统计及概率方法等等。近年来，固体力学的一个新的方向——断裂力学已经兴起，这一研究领域的发展将有赖于以上列举的变形体理论，并将具有新的更广泛的意义。这也和弹性力学有关。因而，Ю. Н. Работнов 院士曾在他的一篇文章中指出："当前，弹性力学有了新的应用领域：晶体物理学和断裂理论；弹性力学在某些方面得到了新生，从而其真正的重要性至今才算充分地展示出来。"

在研究普通工程结构构件，特别是机械构件及其零件的应力应变状态时，通常均采用线性弹性体模型。因而，在这些场合，弹性力学仍有其非常重要的意义。

第一章 应变理论

§1 位移矢量和应变状态

在外力作用下，或者由于热状态的改变，物体改变了自己的大小和形状，称之为变形。

设物体作为连续介质，在初始状态(外力作用之前)占据着三维欧几里得空间中的区域V(图 1.1)。物体中任意点M称为质点，它不同于空间点，其位置由笛卡儿坐标系$Ox_1x_2x_3$中具有$x_i(i=1,2,3)$分量的矢径$\boldsymbol{x}$来确定。

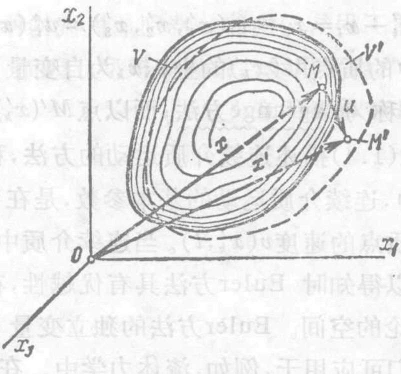

图 1.1

设物体由于某种外部作用使其各点产生了位移，因而，物体占有新的区域V'。这时质点$M(x_i)\in V$移动到新的位置$M'(x'_i)\in V'$(符号$\in$表示“属于”，例如，点M属于区域V)。

连接质点$M(x_i)$的起点和终点的矢量$\boldsymbol{u}=\overrightarrow{MM'}$，称为质点$M(x_i)$的位移矢量。

每一个质点$M(x_i)\in V$位移到某点$M'(x'_i)\in V'$，只有一些个别点可以是例外，例如被固定的点，这些质点将为区域V和V'所共有。同时，处于新区域V'的物体仍然假设是连续介质；因此，区域V'的点的坐标x'_i应该是初始状态V中质点坐标x_1, x_2, x_3的连续单值函数：

$$x'_i = x'_i(x_1, x_2, x_3) \tag{1.1}$$

设函数(1.1)对所有坐标$x_k(k=1,2,3)$具有连续导数，而且Jacobi行列式$|\partial x'_i/\partial x_k|\neq 0$，则可对$x_i$求解方程(1.1)：

$$x_i = x_i(x'_1, x'_2, x'_3) \tag{1.2}$$

根据方程(1.1)和(1.2)，可以把位移矢量$\boldsymbol{u}$的分量u_i表示为x_1, x_2, x_3的函数：

$$u_i = x'_i - x_i = x'_i(x_1, x_2, x_3) - x_i = u_i(x_k) \tag{1.3}$$

或表示为x'_1, x'_2, x'_3的函数：

$$u_i = x'_i - x_i = x'_i - x_i(x'_1, x'_2, x'_3) = u_i^*(x'_k) \tag{1.4}$$

以初始状态V中的质点$M(x_k)$的坐标x_k为自变量，用函数(1.3)描述位移的方法，称为Lagrange方法；而以点$M'(x'_k)\in V'$的坐标x'_k为自变量，用函数(1.4)描述连续介质运动的方法，称为Euler方法。在Euler方法中，连续介质运动的基本参数，是在每一瞬时t通过所研究空间点的质点的速度$v(x'_k, t)$。当连续介质中质点(粒子)运动的全部信息可以得知时，Euler方法具有优越性，在时间过程中，质点将构成所讨论的空间。Euler方法的独立变量是空间点的坐标x'_k和时间t，它们可应用于，例如，流体力学中。在弹性力学中，通常采用Lagrange方法，该法能够确定由于物体上的外部作用，给定质点$M(x_k)$由初始状态所产生的位移。

如果物体由初始状态V到新的状态V'，是由象刚体那样的位移引起的，即物体中任意两点之间距离没有发生变化，则物体的这种位移称为刚性位移。

如果物体由初始状态V到新的状态V'，是由于任意两点之间