安徽省高等学校“十一五”省级规划教材

医药高等数学

YIYAO GAODENG SHUXUE

秦 侠/主编

中国科学技术大学出版社

安徽省高等学校"十一五"省级规划教材

医药高等数学

Yiyao Gaodeng Shuxue

主　编　秦　侠

副主编　吴学森　陈　涛

编　委　（按姓氏笔画排序）

朱文婕　刘国旗　孙　侠　吴学森

陈　涛　周　睿　赵　妍　秦　侠

魏　杰

中国科学技术大学出版社

合肥・2008

内 容 简 介

本书是安徽省高等学校“十一五”省级规划教材，内容包括：函数、极限与连续、一元函数微积分、多元函数微积分、常微分方程、概率论基础和线性代数基础. 每章后附有适量的习题供学生练习. 全书既注意了数学学科本身的科学性与系统性，同时又注意了它在医药学科里的应用. 为便于学生学习，增强教材的实用性，本书还配套编写了《医药高等数学学习指导》.

本书可作为高等医学院校临床医学、药学及其他各专业的本科生和七年制学生的教材，也可供硕士生学习使用.

图书在版编目(CIP)数据

医药高等数学 / 秦侠主编. —合肥：中国科学技术大学出版社，2008.8
（安徽省高等学校“十一五”省级规划教材）
ISBN 978-7-312-02341-5

Ⅰ. 医…　Ⅱ. 秦…　Ⅲ. 医用数学：高等数学—医学院校—教材　Ⅳ. R311　O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 112166 号

出版发行　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
http://press.ustc.edu.cn
印　　刷　合肥学苑印务有限公司
经　　销　全国新华书店
开　　本　710 mm×960 mm　1/16
印　　张　16.5
字　　数　330 千
版　　次　2008 年 8 月第 1 版
印　　次　2008 年 8 月第 1 次印刷
定　　价　26.00 元

前　　言

《医药高等数学》是高等医学院校本科生的一门必修的基础课，它不仅是学习物理、卫生统计学、药物动力学等课程的必要基础，而且是提高学生素质、培养具有创新能力的医药人才的重要保证.

本教材是根据安徽省教育厅启动的《安徽省高等学校“十一五”省级规划教材选题的通知》申报，并经过教育厅组织专家评审后批准的省级规划教材.本教材的编者来自全省四所高等医学院校，他们长期在医学院校从事高等数学的教学与科研工作，有着丰富的经验，本书是他们总结了多年来高等数学的教学经验，并联系医药学教学的实际需要编写的.

为适应我省高等医学院校《医药高等数学》教学的实际需要，本教材充分考虑到近几年，安徽省高等医学院校《医药高等数学》教学的实际情况：(1) 学时少，内容多；大班上课；没有充足数学实验工具和设备，尚不具备进行数学实验教学的条件.(2) 都在大学一年级第一学期讲授，而一年级新生，还缺乏医药学基础知识.针对以上情况，本教材指导思想是：提供重要的数学基础知识，加强学生理性思维训练，培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力，以及分析问题和解决问题的能力.

本教材在内容上根据医药本科学生知识结构的需要，以医药学基础和科学研究中常用的数学知识为主，内容包括：函数、极限与连续、一元函数微积分、多元函数微积分、常微分方程、概率论基础和线性代数基础.在选材上注重数学向医药科学领域的渗透，用简单的实例说明数学基础知识在医学、药学中的应用.在写作上，力求结构简明，深入浅出，运用直观方法和简洁通俗的语言来阐述基本概念和基本方法，对一些定

理、性质的繁琐证明和较为复杂的推导适当淡化.每章后附有适量的习题供学生练习.本书可作为高等医学院校临床医学、药学及其他各专业的本科生和七年制学生的教材,也可供硕士生学习使用.

为便于学生学习,增强教材的实用性,我们还配套编写了《医药高等数学学习指导》,其各章内容包括:本章学习目的与要求,重点与难点,典型例题,教材中习题的参考答案,补充习题及参考答案,100分的自测题及参考答案.其中典型例题和补充习题在难度上有所提高,题型灵活,解法多样,可满足部分学生考研的需要.

本书编写的分工如下:第1章由孙侠编写,第2章由魏杰和朱文婕编写,第3章由陈涛编写,第4章由刘国旗编写,第5章由周睿和秦侠编写,第6章由吴学森编写,第7章由赵妍编写.

本书在编写时参考了其他学者的成果,在此向他们致以谢意.新教材整体应用还有待于教学实践的检验,我们诚挚地希望读者对本书的错误和不妥之处提出批评与建议,并表示衷心的感谢.

本书在编写过程中,得到中国科学技术大学出版社和安徽医科大学的大力支持,在此表示衷心的感谢.

秦　侠

2008年7月

目　　录

第 1 章　函数、极限与连续

高等数学的主要研究对象是函数，极限概念是研究函数的理论基础，而连续是函数的一种性态，函数的连续性可以用极限来描述，极限方法是微积分学的基本分析方法. 因此，掌握极限方法是学好高等数学的关键. 本章将介绍函数、极限和连续的基本概念及其基本方法，为后续章节奠定基础.

1.1　函　　数

1.1.1　函数及其简单性质

在某一变化过程中，保持同一数值不变的量，称为**常量**(constant quantity)；可以取不同数值的量，称为**变量**(variable). 例如，在生物学中，在一定容积的培养基中成批培养细胞，在培养过程中，容积是常量，细胞的数目、培养基中的营养物质等是变量. 在同一变化过程中的几个变量不是孤立的，而是相互联系并遵循着一定的规律. 函数反映的就是变量之间的这种依赖关系.

定义 1-1　设有两个变量 x 和 y，D 是一个非空的数集，如果变量 x 在 D 内任取一个值，按照一定的对应法则 f，变量 y 总有惟一确定的数值与之相对应，则称 y 是 x 的**函数**(function)，记作 $y = f(x)$，$x \in D$. 其中 x 称为**自变量**(independent variable)，y 称为**因变量**(dependant variable)，D 称为**定义域**(domain of definition)，函数值的集合 $W = \{y \mid y = f(x),\ x \in D\}$ 称为**值域**(domain of functional value).

函数关系的两大要素：定义域和对应法则. 如果两个函数的定义域和对应法则都相同，那它们是相同的函数，否则就是不同的.

函数的表示方法有解析法、图像法和列表法等. 其中最常用的是解析法. 例如自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s，如果开始下落的时刻记为 $t = 0$，落地时刻是 $t = T$，那么 s 与 t 的函数关系是 $s = \dfrac{1}{2}gt^2$，$t \in [0,\ T]$.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 对于抽象函数，

通常约定其定义域是使得算式有意义的一切实数的集合，如函数 $y=\arcsin x$ 的定义域是闭区间$[-1,\ 1]$.

函数的定义域通常以区间形式给出. 其中以点 x_0 为中心，某一很小的正数 δ 为半径的开区间$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$称为 x_0 的 δ 邻域.

下面介绍函数的几种特性.

1. 单调性

若函数 $f(x)$在区间$(a,\ b)$内随着 x 增大而增大(或减少)，即对于$(a,\ b)$内任意两点 x_1 和 x_2，且 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$)，则称函数$f(x)$在$(a,\ b)$内是单调增加的(或减少的). 如函数 $y=a^x$ $(a>1)$ 在区间$(-\infty,\ +\infty)$上是单调增加的，函数 $y=a^x(0<a<1)$ 在区间$(-\infty,\ +\infty)$上是单调减少的，如图 1-1 所示. 值得注意的是，研究函数 $f(x)$单调增加(或单调减少)时，必须指明所讨论的区间. 单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**(monotone function).

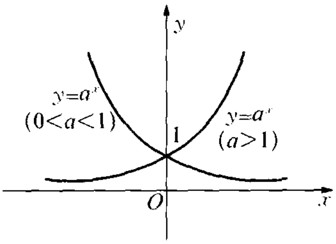


图 1-1

2. 奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$，则 $-x\in D$). 对于任意 $x\in D$，若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$是**奇函数**(odd function)；若 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$是**偶函数**(even function). 奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称. 例如 $y=\sin x$，$y=x^3$ 都是奇函数，$y=x^2$，$y=\cos x$ 都是偶函数，$y=e^x$ 既不是奇函数，也不是偶函数.

3. 周期性

设函数 $f(x)$的定义域为 D，如果存在非零常数 T，对任意 $x\in D$，有 $x+T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$是**周期函数**(periodic function)，T 称为函数的**周期**. 显然，若 T 是函数 $f(x)$的周期，则 $2T$，$3T$，…也是函数 $f(x)$的周期. 通常函数的周期指的是它的最小正周期. 例如 $y=\sin x$ 是周期函数，周期是 2π.

4. 有界性

设函数 $f(x)$的定义域为 D，如果存在一个正数 M，对于 D 内任意 x，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$在 D 上有界，也称 $f(x)$是 D 上的**有界函数**

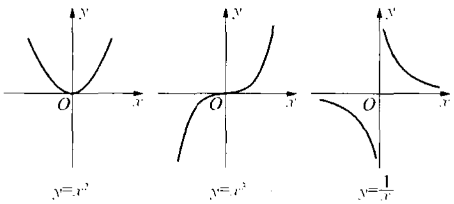
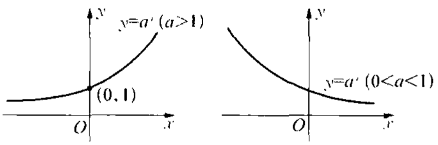
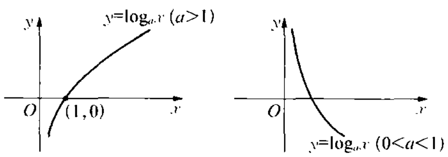
(bounded function). 否则,称 $f(x)$ 是 D 上的**无界函数**(unbounded function). 如函数 $y=\sin x$ 在定义域$(-\infty, +\infty)$上是有界的,函数 $y=\ln x$ 在定义域$(0, +\infty)$上是无界的. 说一个函数有界还是无界,必须指明讨论的区间. 如函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间$(0, 1)$内无界,但在区间$[1, 2]$却是有界的.

1.1.2　初等函数

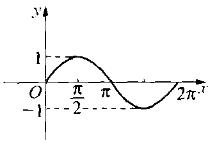
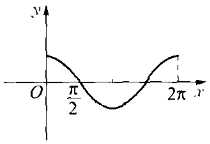
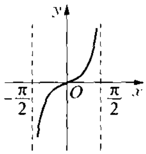
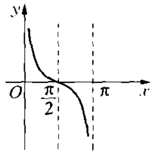
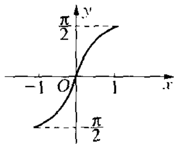
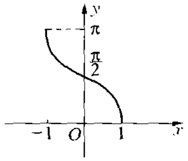
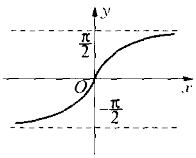
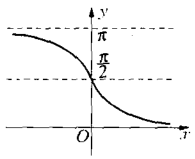
1. 基本初等函数

基本初等函数(basic elementary function)包括以下 5 种函数: 幂函数(power function),指数函数(exponential function),对数函数(logarithmic function),三角函数(trigonometric function)和反三角函数(anti-trigonometric function). 中学数学教材已经介绍过这些函数,这里将它们的基本特性列成表格,帮助大家复习.

表 1-1　基本初等函数表

类别	解析式	定义域	值域	图形
幂函数	$y=x^2$ $y=x^3$ $y=\sqrt{x}$ $y=\dfrac{1}{x}$ $y=x^a$, $a>0$ $a<0$	$(-\infty, +\infty)$ $(-\infty, +\infty)$ $[0, +\infty)$ $x\neq 0$ $[0, +\infty)$ $(0, +\infty)$	$[0, +\infty)$ $(-\infty, +\infty)$ $[0, +\infty)$ $y\neq 0$ $[0, +\infty)$ $(0, +\infty)$	
指数函数	$y=a^x$, $(a>0$, $a\neq 1)$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$	
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	

续 表

类别	解析式	定义域	值域	图形
三角函数	$y=\sin x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	 $y=\sin x$
	$y=\cos x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	 $y=\cos x$
	$y=\tan x$	$x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$	$(-\infty, +\infty)$	 $y=\tan x$
	$y=\cot x$	$x\neq n\pi$	$(-\infty, +\infty)$	 $y=\cot x$
反三角函数	$y=\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	 $y=\arcsin x$
	$y=\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	 $y=\arccos x$
	$y=\arctan x$	$(-\infty, +\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	 $y=\arctan x$
	$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, \pi)$	 $y=\operatorname{arccot} x$

2. 复合函数

定义 1-2 设函数 $y=f(u)$，$u\in D$ 和函数 $u=g(x)$，$x\in E$. 若函数 $u=g(x)$ 的值域 W 与函数 $y=f(u)$ 的定义域 D 的交集非空，即 $W\cap D\neq\varnothing$，则称函数 $y=f[g(x)]$ 是 x 的**复合函数**(compound function)，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，u 称为**中间变量**(intermediate variable).

例 1-1 求由下列函数复合得到的复合函数.

(1) 函数 $y=\ln u$ 和 $u=x^2+1$；

(2) 函数 $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=\sqrt{x}$.

解 (1) $y=\ln u$ 和 $u=x^2+1$ 可以复合成复合函数 $y=\ln(x^2+1)$，其定义

域是$(-\infty, +\infty)$.

(2) $y = e^u$, $u = \sin v$, $v = \sqrt{x}$ 可以复合成复合函数 $y = e^{\sin\sqrt{x}}$，其定义域是$[0, +\infty)$.

注意：并不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数，如函数 $y = \arcsin u$ 和 $u = x^2 + 2$ 就不能复合成 $y = \arcsin(x^2+2)$，因为函数 $u = x^2+2$ 的值域是$[2, +\infty)$，$y = \arcsin u$ 的定义域是$[-1, 1]$，而 $[2, +\infty) \cap [-1, 1] = \varnothing$，不满足复合函数的定义，所以，$y = \arcsin(x^2+2)$ 没有意义.

把一个复合函数分解成几个简单的函数也很重要，在下一章计算导数和微分时会经常用到. 分解的关键是分解出来的简单函数都是基本初等函数或是由基本初等函数经过四则运算得到的函数.

例 1-2　将下列复合函数分解成简单函数.

(1) $y = \sin x^2$;　　(2) $y = (\cos x)^3$;　　(3) 分 $y = \sqrt[3]{(\sin x)^2 + 1}$.

解　(1) 函数 $y = \sin x^2$ 是由函数 $y = \sin u$ 和 $u = x^2$ 复合而成的.

(2) 函数 $y = (\cos x)^3$ 是由函数 $y = u^3$ 和 $u = \cos x$ 复合而成的.

(3) 函数 $y = \sqrt[3]{(\sin x)^2 + 1}$ 是由函数 $y = \sqrt[3]{u}$, $u = v^2 + 1$ 和 $v = \sin x$ 复合而成的.

3. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合所构成的且仅用一个解析式表示的函数称为**初等函数**(elementary function).

如函数 $y = e^{\sin\sqrt{x}}$, $y = \ln(x^2+1)$，双曲正弦函数 $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$，双曲余弦函数 $y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$，多项式函数 $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ 都是初等函数. 本书中讨论的函数基本上都是初等函数.

1.1.3　分段函数

对于在定义域内根据自变量 x 的不同取值范围，函数 $f(x)$有不同解析表达式的函数称为**分段函数**(piecewise function).

如有人根据在一项生理学研究中测得的血液中的胰岛素浓度 $c(t)$(ml)是随着时间 t(min)变化的数据，建立了如下的经验公式：

$$c(t) = \begin{cases} t(10-t), & 0 \leqslant t \leqslant 5, \\ 25e^{-k(t-5)}, & t > 5, \end{cases}$$

其中 k 为常数. 这个公式揭示了胰岛素浓度 $c(t)$随时间 t 的变化关系. 根据函数的定义可知,$c(t)$是时间 t 的函数,但由于 $c(t)$不能用一个解析式表示,所以 $c(t)$不是初等函数,而是一个分段函数. 又如**符号函数**

$$y=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

是一个分段函数,不是初等函数. 但绝对值函数

$$y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

又可以用一个解析式 $y=\sqrt{x^2}$ 表示,显然是初等函数.

1.2 极　　限

极限是研究函数各变量之间关系的基本工具之一,它是研究函数连续性、可导性和可积性的理论基础,它是贯穿微积分的一条主线. 本节将介绍数列极限、函数极限及其运算等内容.

1.2.1 数列的极限

我国三国时的数学家刘徽(公元 3 世纪)为计算圆的面积,采用了"无限逼近"的思想,发明了"割圆术". 他依次计算圆的内接正六边形、正十二边形、正二十四边形、正四十八边形……的面积,得到一个面积值的数列 A_1, A_2, A_3, A_4, …, A_n, …,当边数 n 越来越大时,内接正 n 边形的面积就越接近圆的面积 πr^2. "割圆术"里蕴含了数列极限的思想.

在介绍极限概念之前,先说明数列的概念. 我们称按照一定法则排列的无穷多个实数 x_1, x_2,…,x_n,…为**数列**(sequence of numbers),简记为$\{x_n\}$. 数列中的每一个数称为数列的**项**,第 n 项 x_n 称为数列的**一般项**或**通项**. 数列可以看作是以正整数集为定义域的一种特殊的函数. 例如以下数列:

(1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$

(2) $\{n^2\}$: $1, 4, 9, \cdots, n^2, \cdots$

(3) $\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$: $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \cdots, 1+\frac{(-1)^n}{n}, \cdots$

(4) $\{(-1)^n\}$: $-1, 1, -1, \cdots, (-1)^n, \cdots$

考察数列的极限,就是判断当自变量 n 越来越大时,数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势. 我们可以通过在数轴上描点,直观地判断以上数列的变化趋势. 当 $n \to \infty$ 时,数列(1)的项无限接近于常数 0;数列(3)的项无限接近于常数 1,只不过是摆动地接近 1;数列(2)的项无限增大;数列(4)的项以跳跃的方式取 -1 和 1 两个值. 经观察分析可知,数列(1)和(3)的项当 $n \to \infty$ 时,分别无限接近于一个确定的常数 0 和 1. 而数列(2)和(4)的项当 $n \to \infty$ 时,不能无限接近任何一个确定的常数. 为此,我们引入数列极限的描述性定义.

定义 1-3 给定数列 $\{x_n\}$,如果当 n 无限增大时,x_n 无限趋近于某一个确定的常数 A,则称 A 为数列 $\{x_n\}$ 的**极限**(limit),也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A,记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 或 $x_n \to A(n \to \infty)$. 如果当 n 无限增大时,x_n 不趋近于任何一个确定的常数,则称数列 $\{x_n\}$ 极限不存在,也称数列 $\{x_n\}$ **发散**(divergence)①.

在上面的例子中,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{(-1)^n}{n}\right] = 1,$$

而数列 $\{n^2\}$ 和 $\{(-1)^n\}$ 的极限不存在,是发散的. 但对于数列 $\{n^2\}$,也可记为

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty.$$

1.2.2 函数的极限

数列可视为定义在正整数集上的函数,其自变量的变化是“离散的”,而自然界中很多量的变化是“连续的”,如温度、时间等. 因此我们要研究这类“连续型”变量的变化过程,这就是下面要介绍的函数极限. 函数的极限根据自变量的变化过程分为两类:

(1) 自变量 x 的绝对值无限增大,即 $x \to \infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限;

(2) 自变量 x 无限趋近于定点 x_0,即 $x \to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的极限.

下面给出这两类极限的描述性定义.

定义 1-4 若自变量 x 的绝对值无限增大时,函数 $f(x)$ 无限趋近于某一个确定的常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 或

① 数列极限严格的数学定义:如果对于任何 $\varepsilon > 0$,总存在 $N > 0$,使得当 $n > N$ 时恒有 $|x_n - A| < \varepsilon$,则称 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限,记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.