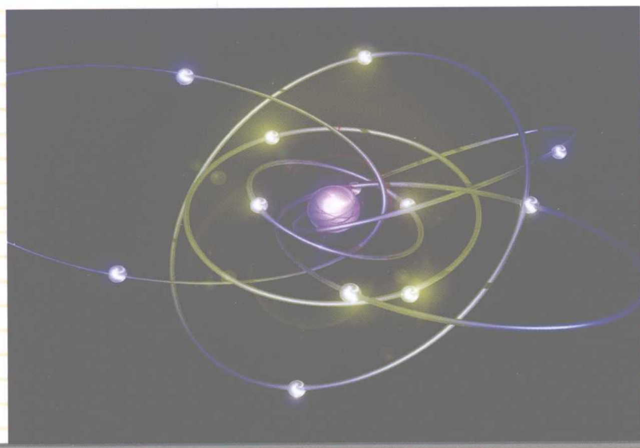
21世纪高等学校规划教材

线性代数

XIAN XING DAI SHU



戴斌祥 主编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

XIAN XING DAI SHU

XIAN XING DAI SHU

21世纪高等学校规划教材

线性代数

主　编　　戴斌祥

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内容简介

本教材是根据高等学校基础理论教学“以应用为目的，以必须够用为度”的原则，按照教育部制定的《线性代数课程教学基本要求》，并结合21世纪线性代数课程教学内容与课程体系改革发展要求而编写的.

全书共七章，分别介绍了n阶行列式、矩阵、n维向量与向量空间、线性方程组、矩阵的特征值与二次型、线性空间与线性变换、应用数学模型.每章后均有小结并配有大量的习题，书后附有参考答案和多年考研真题.

本书可作为理工科大学及高等专科院校的数学教材或参考书，也可供综合性大学和高等师范院校非数学专业及各类成人教育的师生使用.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/戴斌祥主编.—北京：北京邮电大学出版社，2009

ISBN 978－7－5635－1658－2

Ⅰ.线…　Ⅱ.戴…　Ⅲ.线性代数　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第029870号

书　　名	线性代数
主　　编	戴斌祥
责任编辑	付小霞
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路10号(100876)
电话传真	010－62282185(发行部)　010－62283578(传真)
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	北京忠信诚胶印厂
开　　本	787 mm×960 mm　1/16
印　　张	14.75
字　　数	297千字
版　　次	2009年4月第1版　2009年4月第1次印刷

ISBN 978－7－5635－1658－2　　定价：22.00元

前　言

随着我国经济建设与科学技术的迅速发展，高等教育已进入了一个飞速发展时期，并且突破了以前的精英式教育模式，发展成为一种在终身学习的大背景下极具创造性和再创性的基础学科教育.高等学校教育教学观念不断更新，教学改革不断深入，办学规模不断扩大，数学课程开设的专业覆盖面也不断增大.为了适应这一发展需要，经众多高校的数学教师多次研究讨论，联合编写了这本高质量的高等学校非数学类专业的教材.

本教材是为普通高等学校非数学专业学生编写的，也可为各类需要提高数学素质和能力的人员使用.编写教材时，充分吸收了国内外现有教材的优点，全书力求做到：知识引入自然合理，文字叙述通俗易懂，推导论证严密流畅，例题、习题充实新颖.为了便于教与学，在每章的末尾写了一小段“小结”，对该章涉及的主要内容、性质和主要方法进行了较为详细的归纳和总结.书中带星号的内容可根据课时的多少作为选讲.另外，为了体现数学知识的综合运用和应用数学工具解决实际问题的过程和方法，在第七章单独给出了应用数学模型，其内容原则上只涉及与线性代数相关的知识，可以供在相关章节中选讲，以培养学生的应用意识，提高学习兴趣，提高学生融会贯通地分析问题和解决问题的能力.

本教材的主要内容有：n 阶行列式、矩阵、n 维向量与向量空间、线性方程组、矩阵的特征值与二次型、线性空间与线性变换、应用数学模型等.除第七章外，每章习题均分为 A 类、B 类.A 类为基础题，按教材的知识进度编排；B 类为选择题、填空题和综合练习题.

本教材由戴斌祥主编.参加讨论和编写的人员有：戴斌祥、刘金旺、夏学文、肖晴初.本教材编写过程中得到许多同行的支持和帮助，在此表示真诚的感谢.

教材中难免有不妥之处，希望使用本教材的教师和学生能提出宝贵意见或建议.

编　者

目　录

第一章　n 阶行列式

行列式是线性代数的一个最基本的内容，它是现代数学各个分支必不可少的重要工具，在物理学、力学、工程技术、经济学等许多领域也有着广泛的应用. 本章主要介绍行列式的定义、性质及其运算，最后将运用行列式的知识解决一类线性方程组的求解问题.

§1　全排列及逆序数

行列式起源于解线性方程组. 首先，我们引入最简单的二阶行列式和三阶行列式的定义.

二阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1-1}$$

三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \tag{1-2}$$

其中元素 a_{ij} 的两个下标 i 与 j 分别表示 a_{ij} 所在的行与列的序数.

我们观察到(1-2)式右端是一些项的代数和，其中，每一项是位于不同行不同列的三个数相乘，这三个数的第一个下标是按自然顺序排列的，第二个下标则不按自然顺序排列. 我们不禁要问：这个代数和的项数、每一项前的符号与第二个下标的排列顺序有无关系？有什么关系？为此我们给出全排列、逆序数等概念.

定义 1　由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级全排列(简称排列).

例如，213 是一个 3 级排列；4321 及 2341 都是 4 级排列. 一般来说，n 级排列总共有 $n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1=n!$ 个($n!$ 读作“n 的阶乘”). 例如 3 级排列的总数是 $3!=6$ 个，它们是：123，132，213，231，312，321.

在 n 级排列中，排列 $123\cdots n$ 是按从小到大的自然顺序排列起来的，我们称之为自然排列，除此以外，其余的排列中，都有较大的数排在较小的数前面的情况.

定义 2　在一个排列中，如果某个较大的数排在一个较小的数的前面，则称这两个数

(或叫做数对)构成一个逆序.一个排列中,逆序的总数称为这个排列的逆序数.

一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数,一般记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

例如,排列 12 的逆序数为 0;排列 21 的逆序数为 1;排列 231 中,数对 21 和 31 均构成逆序,而 23 不构成逆序,因此排列 231 的逆序数为 2;同理,排列 213 的逆序数是 1,即 $\tau(213)=1$.

定义 3　逆序数为偶数的排列称为偶排列,逆序数为奇数的排列称为奇排列.

例如,2 级排列 12 为偶排列,21 为奇排列;3 级排列 231 为偶排列,213 为奇排列.

对任意一个排列,我们可以按照以下方法来计算它的逆序数:设所给排列为 $j_1j_2\cdots j_n$,考虑 $j_i(1\leqslant i\leqslant n)$,如果在排列中排在 j_i 的前面且比 j_i 大的数为 τ_i 个,则称 j_i 的逆序数是 τ_i.全体元素的逆序数之和:$\tau=\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\tau_i$ 即为这个排列的逆序数.

例 1　计算以下各排列的逆序数,并指出它们的奇偶性:

(1) 42531;　(2) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

解　(1) 对于所给排列,4 排在首位,逆序个数为 0;2 的前面有一个比它大的数,逆序个数为 1;5 的前面没有比它大的数,逆序个数为 0;3 的前面有两个比它大的数,逆序个数为 2;1 的前面有四个比它大的数,逆序个数为 4.把这些数加起来,即

$$0+1+0+2+4=7.$$

故排列 42531 的逆序数为 7,即 $\tau(42531)=7$,因而是奇排列.

(2) 同理,可得

$$\tau[135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)]=0+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

所给排列当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时,为偶排列;当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时,为奇排列.

现在我们探讨(1-1)式、(1-2)式右端各项的规律:

(1-1)式右端各项的第一个下标按自然顺序排列,对它们第二个下标进行观察:第二个下标由两个自然数 1 和 2 组成,只能构成两个 2 级排列:12 和 21,排列个数等于(1-1)式右端的项数.且排列 12 的逆序数为 0,对应项的符号为“+”;而排列 21 的逆序数为 1,所对应项的符号为“−”.

(1-2)式右端各项的第一个下标按自然顺序排列,第二个下标由自然数 1,2 和 3 组成,这三个数构成的 3 级排列共有 $3!=6$ 个:123,231,312,132,213,321,这正好等于(1-2)式右端的项数.排列为 123,231,312 的逆序数分别为 0,2,2,它们均为偶排列,对应项的符号为“+”;排列 132,213,321 的逆序数分别为 1,1,3,它们都是奇排列,对应项的符号为“−”.

综上所述,(1-2)式右端各项可写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$,这里 $j_1j_2j_3$ 是 1,2,3 的一个 3 级排列.当 $j_1j_2j_3$ 为偶排列时,项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前面的符号为正;当 $j_1j_2j_3$ 为奇排列时,项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前面的符号为负.各项所带符号均可表示为 $(-1)^J$,其中 $J=\tau(j_1j_2j_3)$,为排列 $j_1j_2j_3$ 的逆序数.从而(1-2)式可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}, \tag{1-3}$$

$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对全体 3 级排列求和.

§2 n 阶行列式的定义

下面我们可以仿照 3 阶行列式的定义(1-3)式给出 n 阶行列式的定义.

定义 4 由 n^2 个数组成的 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积的代数和

$$\sum (-1)^J a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \tag{1-4}$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. J 为这个排列的逆序数. 这一定义可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \tag{1-5}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

我们称(1-5)式为 n 阶行列式的展开式,它是前面所说的二阶行列式和三阶行列式的推广. 特别地,当 $n=1$ 时,一阶行列式 $|a|$ 就是数 a. 注意不要与绝对值记号相混淆.

下面来看几个例子.

例 2 计算 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 根据定义,D 的展开式应有 $4!=24$ 项,考虑其一般项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$,由于第 1 行中除 a_{14} 外其余元素全为 0,故只考虑 $j_1=4$;同理,只需考虑 $j_2=3$,$j_3=2$,$j_4=1$. 这就是说,行列式中不为 0 的项只有 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$,而 $\tau(4321)=6$,这一项前面的符号应该是正的. 因此有

$$D = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24.$$

例 3 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

我们称上述行列式为下三角行列式,它的特点是在 a_{11} 到 a_{nn} 所成的对角线(称为行列式的主对角线)以上的元素全为零,即当 $i<j$ 时,元素 $a_{ij}=0$.

解 展开式中的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

在第一行中,除了 a_{11} 外其余元素全为 0,故取 $j_1=1$;在第二行中,除 a_{21},a_{22} 外其余元素全为 0,但由于已取 $j_1=1$,故只能取 $j_2=2$;同理,只需考虑 $j_3=3,\cdots,j_n=n$. 因此,在 D 的展开式中除乘积 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 外,其余各项均为 0. 由于 $\tau(12\cdots n)=0$,所以该项符号为正,故有 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

在一个行列式中,如果主对角线以下的元素全为零,即当 $i>j$ 时,元素 $a_{ij}=0$. 则称该行列式为上三角行列式. 同理可以证明,n 阶上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

在一个行列式中,如果主对角线以外的元素全为零,即当 $i\neq j$ 时,元素 $a_{ij}=0$,则称该行列式为对角行列式. 显然,对角行列式既是上三角行列式,又是下三角行列式. 因此有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \boldsymbol{O} \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 4 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

上面的行列式中,未写出的元素都是0.

证 由于行列式的值为 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^J a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,因此只需对可能不为 0 的乘积 $(-1)^J a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 求和,考虑第 n 行元素 a_{nj_n},知 $j_n=1$,再考虑第 $n-1$ 行元素 $a_{n-1,j_{n-1}}$,知 $j_{n-1}=1$ 或 $j_{n-1}=2$,由 $j_n=1$ 知 $j_{n-1}=2$,如此类推,$j_2=n-1$,$j_1=n$,排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 只能是排列$n(n-1)\cdots 21$,它的逆序数为 $J=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$,所以行列式的值为

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

证毕.

特别地,我们有

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & \iddots & \\ & a_{n-1,2} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

我们称上述行列式为反对角行列式.

例 5 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

证明 $D=D_1D_2$.

证 记

$$D=\begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1,k+n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{k+n,1} & \cdots & d_{k+n,k+n} \end{vmatrix},$$

其中
$$d_{ij}=a_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots,k),$$
$$d_{k+i,k+j}=b_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots,n),$$
$$d_{i,k+j}=0\quad(i=1,2,\cdots,k;\ j=1,2,\cdots,n).$$
考察 D 的一般项 $(-1)^R d_{1r_1}d_{2r_2}\cdots d_{kr_k}d_{k+1,r_{k+1}}\cdots d_{k+n,r_{k+n}}$，$R$ 是排列 $r_1r_2\cdots r_kr_{k+1}\cdots r_{k+n}$ 的逆序数. 由于 $d_{i,k+j}=0(i=1,2,\cdots,k;\ j=1,2,\cdots,n)$，因此 $r_1,r_2,\cdots,r_k$ 均不可大于 k 值，否则该项为 0，故 $r_1,r_2,\cdots,r_k$ 只能在 $1,2,\cdots,k$ 中选取，从而 $r_{k+1},r_{k+2},\cdots,r_{k+n}$ 只能在 $k+1$，$k+2,\cdots,k+n$ 中选取，于是 D 中不为 0 的项可以记作
$$(-1)^R a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{kp_k}b_{1q_1}b_{2q_2}\cdots b_{nq_n},$$
这里 $p_i=r_i,q_i=r_{k+i}-k,\ 1\leqslant r_i\leqslant k,\ k+1\leqslant r_{k+i}\leqslant k+n$，$R$ 也就是排列 $p_1p_2\cdots p_k(k+q_1)\cdots(k+q_n)$ 的逆序数. 以 P,Q 分别表示排列 $p_1p_2\cdots p_k$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数，则有 $R=P+Q$，于是
$$\begin{aligned}D&=\sum_{p_1\cdots p_k}\sum_{q_1\cdots q_n}(-1)^{P+Q}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{kp_k}b_{1q_1}b_{2q_2}\cdots b_{nq_n}\\&=\sum_{p_1\cdots p_k}(-1)^P a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{kp_k}\Big(\sum_{q_1\cdots q_n}(-1)^Q b_{1q_1}b_{2q_2}\cdots b_{nq_n}\Big)\\&=\sum_{p_1\cdots p_k}(-1)^P a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{kp_k}D_2\\&=D_1D_2.\end{aligned}$$
证毕.

§3 对　换

为了研究 n 阶行列式的性质，我们先来讨论对换以及它与排列的奇偶性的关系.

定义 5　在排列中，将某两个数对调，其余的数不动，这种对排列的变换称为对换. 将相邻两数对换，称为相邻对换(或称为邻换).

定理 1　一个排列中的任意两数对换，排列改变奇偶性.

证　先证相邻对换的情形.

设排列为 $p_1\cdots p_{i-1}p_ip_{i+1}p_{i+2}\cdots p_n$，对换 p_i 与 p_{i+1}，则排列变为 $p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}p_ip_{i+2}\cdots p_n$. 显然 $p_1,\cdots,p_{i-1},p_{i+2},\cdots,p_n$ 这些数的逆序数经过对换并不改变，仅 p_i 与 p_{i+1} 两数的逆序数改变，即当 $p_i<p_{i+1}$ 时，经对换后，$p_{i+1}p_i$ 是逆序，新排列的逆序数增加 1；当 $p_i>p_{i+1}$ 时，$p_{i+1}p_i$ 不是逆序，新排列的逆序数减少 1. 所以排列 $p_1\cdots p_{i-1}p_ip_{i+1}p_{i+2}\cdots p_n$ 与排列 $p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}p_ip_{i+2}\cdots p_n$ 的逆序数相差 1，奇偶性改变.

再证一般对换的情形.

设排列为 $p_1\cdots p_{i-1}p_ip_{i+1}\cdots p_{i+m}p_{i+m+1}p_{i+m+2}\cdots p_n$，对换 p_i 与 p_{i+m+1}，把 p_i 往后连续作 m 次相邻对换，排列变为 $p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}\cdots p_{i+m}p_ip_{i+m+1}p_{i+m+2}\cdots p_n$，再把 p_{i+m+1} 往前连续作 $m+1$ 次相邻对换，排列变为 $p_1\cdots p_{i-1}p_{i+m+1}p_{i+1}\cdots p_{i+m}p_ip_{i+m+2}\cdots p_n$，从而实现了 p_i 与 p_{i+m+1}

的对换,它是经 $2m+1$ 次相邻对换而成,排列也就改变了 $2m+1$ 次奇偶性,所以两个排列的奇偶性相反. 证毕.

由于数的乘法是可交换的,所以行列式各项中的元素的顺序也可任意交换. 例如,四阶行列式中,乘积 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 可以写成 $a_{22}a_{11}a_{44}a_{33}$;一般 n 阶行列式中,乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 可以写成 $a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}$,其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 都是 n 级排列.

定理 2 **n 阶行列式的一般项可以写成**

$$(-1)^{S+T}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n},$$

其中 S 与 T 分别是 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数.

证 该项中任意两元素互换,行下标与列下标同时对换,由定理 1 知 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 同时改变奇偶性,于是 $S+T$ 的奇偶性不变. 如果将排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 对换为自然顺序 $12\cdots n$(逆序数为 0),排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 也相应对换为 $j_1j_2\cdots j_n$(逆序数为 J),则有

$$(-1)^{S+T}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}=(-1)^Ja_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

证毕.

由定理 2 可知,行列式也可定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}. \quad (1\text{-}6)$$

若将行列式中各项的列下标按自然顺序排列,而相应行下标排列为 $i_1i_2\cdots i_n$,于是行列式又可定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \quad (1\text{-}7)$$

例 6 试判断 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 和 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 是否都是六阶行列式中的项.

解 由于

$$\tau(431265)=6,$$

所以 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 是六阶行列式中的项.

而

$$\tau(341526)+\tau(234156)=5+3=8,$$

所以 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 不是六阶行列式中的项.

§4 行列式的性质

在 §2 里,我们引进了行列式的概念,并且也利用定义计算了几个比较简单的行列式,

但大家不难看出，行列式的计算是比较麻烦的，尤其是当行列式的阶数增大时，计算量会越来越大. 因此有必要研究行列式的性质，使实际计算行列式的值变得方便快捷.

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D'（也可记为 D^{T}）称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

证　记

$$D'=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij}=a_{ji}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$，按行列式定义

$$\begin{aligned} D' &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} = D. \end{aligned}$$

证毕.

性质 1 表明，行列式中行与列的地位是对称的，即行列式中行具有的性质，其列也具有.

性质 2　互换行列式的两行（列），行列式反号.

证　下面只证列的情形. 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

交换第 p,q 两列，得行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将 D 与 D_1 按(1-7)式计算，对于 D 中任一项

$$(-1)^J a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_p p} \cdots a_{i_q q} \cdots a_{i_n n},$$

其中 J 为排列 $i_1 i_2 \cdots i_p \cdots i_q \cdots i_n$ 的逆序数，在 D_1 中必有对应一项

$$(-1)^{J_1} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_q q} \cdots a_{i_p p} \cdots a_{i_n n}$$

(当 $j \neq p, q$ 时，第 j 列元素取 $a_{i_j j}$，第 p 列元素取 $a_{i_q q}$，第 q 列元素取 $a_{i_p p}$)，其中 J_1 为排列 $i_1 i_2 \cdots i_q \cdots i_p \cdots i_n$的逆序数. 而

$$i_1 i_2 \cdots i_p \cdots i_q \cdots i_n$$

与

$$i_1 i_2 \cdots i_q \cdots i_p \cdots i_n$$

只经过一次对换，由定理 1 知，$(-1)^J$ 与$(-1)^{J_1}$符号相反. 又因

$$a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_q q} \cdots a_{i_p p} \cdots a_{i_n n} = a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_p p} \cdots a_{i_q q} \cdots a_{i_n n},$$

故对于 D 中任一项，D_1 中必定有一项与它的符号相反而绝对值相等，又 D 与 D_1 的项数相同，所以 $D=-D_1$. 证毕.

本书中，交换行列式 i,j 两行，记作 $r(i,j)$；交换行列式 i,j 两列，记作$c(i,j)$.

推论　若行列式有两行(列)元素对应相等，则行列式为零.

证　互换相同的两行(列)，有 $D=-D$，故 $D=0$. 证毕.

性质 3　行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一个数 k，等于用数 k 乘以此行列式.

第 i 行(列)乘以数 k，记作 $r[i(k)]$($c[i(k)]$).

推论　行列式中某一行(列)的所有元素的公因子，可以提到行列式符号的外面.

性质 4　行列式中若有两行(列)元素对应成比例，则此行列式为零.

性质 5　若行列式的某行(列)的元素都是两个数之和，例如：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则行列式等于相应的两个行列式之和：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 5 显然可以推广到某一行(列)为多组数的和的情形.

性质 6　把行列式某一行(列)的元素乘以数 k,加到另一行(列)对应的元素上去,行列式的值不变.

例如,以数 k 乘以第 i 行(列)上的元素加到第 j 行(列)对应元素上,记作 $r[j+i(k)]$ $(c[j+i(k)])$,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r[j+i(k)]} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{j1}+ka_{i1}) & (a_{j2}+ka_{i2}) & \cdots & (a_{jn}+ka_{in}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i \neq j).$$

性质 3~6 的证明,请读者自证.

利用行列式的性质计算行列式,可以使计算简化.下面举例说明.

例 7　计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & c & b & d \\ c & a & b & d \\ c & a & d & b \\ a & c & d & b \end{vmatrix}.$$

解

$$D \xlongequal[r[4+1(-1)]]{r[3+2(-1)]} \begin{vmatrix} a & c & b & d \\ c & a & b & d \\ 0 & 0 & d-b & b-d \\ 0 & 0 & d-b & b-d \end{vmatrix} = 0.$$

例 8　计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

解

$$D \xlongequal{c(1,2)} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r[4+1(5)]]{r[2+1(-1)]} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r(2,3)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r[4+2(-8)]]{r[3+2(4)]} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r[4+3(\frac{5}{4})]} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 1\times 2\times 8\times \frac{5}{2} = 40.$$

在上述例子中，我们通过行列式的性质将一个行列式的计算转化为一个上三角（或下三角）行列式的计算. 我们称这种计算行列式的方法为化三角形法.

例 9 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

解法 1 行列式 D 的主对角线上的元素全为 a，其余的元素全为 b，注意到行列式的每一行的元素之和是相同的，因此，将第 $2,3,\cdots,n$ 列都加到第 1 列，然后提出第 1 列的公因子 $a+(n-1)b$，得到

$$D = [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r[i+1(-1)]} [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$