高等学校教学用书

高等数学基础辅导练习

王敬修　主编

化学工业出版社

高等学校教学用书

高等数学基础辅导练习

王敬修　主编

化学工业出版社

·北京·

本书是针对应用型经济管理类专业本科所编写的“高等数学基础”教材的配套辅导书。全书共十章：函数、极限和连续、导数与微分、中值定理及应用、积分学、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、常微分方程。每章安排有基本要求、重点内容、典型例题分析、综合练习题及其答案。为帮助学生培养数量分析能力打下一定的基础，并为后续课程提供一定的保证。

本辅导书具有实用性、科学性、指导性。可作为经济管理类高校、高等职业技术学院、职工大学、函授大学等参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学基础辅导练习/王敬修主编．—北京：化学工业出版社，2008.8
高等学校教学用书
ISBN 978-7-122-03444-1

Ⅰ．高…　Ⅱ．王…　Ⅲ．高等数学-高等学校-习题　Ⅳ．013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 115108 号

责任编辑：唐旭华　叶晶磊　　装帧设计：风行书装
责任校对：徐贞珍

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　装：化学工业出版社印刷厂
720mm×1000mm　1/16　印张 7¼　字数 134 千字　2008 年 10 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：13.00 元

版权所有　违者必究

《高等数学基础辅导练习》编写人员

主　　编　王敬修

编写人员（以姓氏笔画为序）

牛玉玲　何　云　张　欣

陈凡红　薛　威

前　　言

在高等教育经济管理专业中，高等数学是一门必修课程。编者针对应用型本科院校学生为对象，遵循“以应用为目的”、“以必需、够用为度”的原则，编写与《高等数学基础》教材相配套的辅导书。由于高等数学具有严密性、逻辑性，又有高度抽象性和研究方法的特殊性，是比较难学的一门课程。为了帮助学生学好高等数学，为培养学生的数量分析能力打下一定的基础，并为后续课程提供一定的保证，特编写此练习册。

本书内容编排按章排列，各章分几部分：①“基本要求”，它是按国家教委所颁布的大纲要求，简要地告诉学生对该章应掌握什么、理解什么；②“重点内容”，要求学生平时学习时应注意对知识点的掌握，在复习时更要抓住这些内容进行记忆；③“典型例题分析”，它具有一定的代表性，又考虑到对知识的覆盖面，通过对这些典型例题的解答，能迅速帮助学生正确理解概念，掌握解题方法；④“练习题及其答案”，有助于学生理解基本知识，巩固所学知识。

本书根据多年来的教学经验，介绍了“高等数学”的特点、学习方法，以便同学们更好地发挥自己的主观能动性，学好高等数学。

书中如有不妥之处，请读者赐教。

编者

2008 年 5 月于燕郊

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

高等数学的特点与学习方法

高等数学来自于实际，又能应用于实际，具有概念表达的抽象性、论述推理的逻辑性、演算上的技巧性等特性。而理论离人们实践的距离似乎较远些，只要我们认识高等数学的特点，即在学习中掌握几对矛盾的相互转化，对于学好高等数学肯定是有益的。

1. 变量与常量的相互转化

高等数学能深刻地描述“常量”和“变量”互相变化的过程。例如，我们要计算半径 r 一定的圆面积，这是常量。该圆面积通过圆内接正多边形的面积来表示时，当圆内接正多边形边数无限增多，其面积越接近圆的面积，这是个视“常”量为“变”量的过程，再通过极限过程（“变”）得到圆面积的准确值(常量)。

2. “直”与“曲”的相互转化

在一定条件下“直”与“曲”可以相互转化。在初等数学中无法计算变力做功，而在高等数学中，将变力做功细分为一个个小位移的恒力做功，所有小位移功的和就是变力做功。如果用小位移的恒力功近似代替小位移的变力功，则通过积分又可以把“直”再化为“曲”。

3. 有限与无限的相互转化

初等数学只能进行有限次运算。譬如，求等比数列之和 $\sum_{n=1}^{n} q^n$，而对求公比 $|q|<1$ 的等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ 之和，要利用高等数学中的极限工具，即求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n} q^n$ 。

4. 具体与抽象的相互转化

高等数学的许多重要概念都是从一些具体例子引入的。如求曲线上某点的切线斜率问题，可归结为求极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$，从而引入导数概念。它在经济分析中就可用来描述边际成本、边际利润、边际收益等经济学概念。

高等数学概念表达的抽象性、论述推理的逻辑性、演算的技巧性使部分学生望而生畏。为此要求学生对成功充满信心，要有坚强的毅力，知难而进的勇气。除此之外，掌握科学的学习方法是一个重要的决定性因素。

1. 认真听课，记好笔记

听好课是学好本门课的第一要素，然后必须仔细地阅读笔记、教材，做到循序渐进，做到对内容充分理解。如果不求甚解，问题就会越积越多，欲速不达，陷入“冰冻三尺”的境地。

2. 一定要搞清基本概念

对于每一个新出现的概念，要思考这个概念是从哪些问题中抽象出来的；新的概念与以前的概念有什么联系，有什么区别。比如，应该弄清一元函数的极限、连续、可导和可微的定义以及相互之间的关系。

3. 掌握基本的定理

对每一个定理的条件、结论都要理解得清楚，要求自己描述、书写这些定理，记住重要定理的证明过程。

对基本概念和定理，要求自己能讲出来，写下来，并且力求用图形或几何意义来解释，然后同教材对照，看自己讲得是否完整、正确。

对每一个概念、定理能用一二个典型的例子来说明它们是很重要的。但是，如果能用反例来说概念及定理，则更能帮助我们对概念和定理的理解、掌握和使用。比如，$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件，而不是充分条件。

4. 认真对待练习

掌握基本的运算方法、运算技巧是学习数学的一个重要内容。解题时，首先确定题目的类型、方法，按运算法则来进行，注意解题的每一步根据，同时选择最恰当的解法。这是培养自己独立分析和解决问题的能力。

5. 养成学习的好习惯

读书要做笔记，记下你对某一内容所特有的想法和理解。对难点、难题作进一步思考，与同学一起讨论，直到弄明白为止。

总之，每个成功者都有一套独特的经验和方法。希望学生根据自己的情况不断地总结经验，在总结中不断提高自己的学习水平。

第一章 函 数

I 基本要求

一、函数的定义和性质

(1) 理解一元函数的定义及函数与图形之间的关系。理解构成函数的两个要素：函数的定义域和函数的对应法则。

(2) 了解函数的几种常用表示法；理解函数的几种基本特性。

(3) 理解复合函数概念，掌握由两个基本初等函数构成的复合函数的定义域的求法。

两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 能够成为复合函数 $f[g(x)]$ 是有条件的。当且仅当 $R(g)\cap D(f)$ 不为空集时，复合函数 $f[g(x)]$ 才有意义。

(4) 了解反函数概念，掌握幂函数、指数函数和对数函数的反函数，了解三角函数的反函数。

对于幂函数、指数函数和对数函数，要求掌握反函数的定义域和表达式，以及函数与反函数的图形。对于三角函数，主要是 $\arcsin x$、$\arccos x$、$\arctan x$ 的函数定义域和图形。

(5) 理解函数的单调性和奇偶性。函数的单调性是函数在某一区间上的性质，一般情形可以将函数定义域分成若干个区间，函数在各个区间上有不同的单调性。函数的奇偶性是函数在整个定义域上的性质。奇函数和偶函数的定义域，一般是对称于原点区间。

(6) 了解函数的周期性和有界性。函数的周期性是函数在整个定义域上的性质。函数的有界性是函数在某个区间上的性质。同一函数，在某一个区间上可能有界，但是在另一个区间上则可能无界。

二、初等函数和非初等函数

(1) 掌握常值函数、幂函数、指数函数、对数函数和三角函数的图形、定义域、单调性、奇偶性、周期性。另外要理解 $\arctan x$ 的定义域和图形。

(2) 了解非初等函数，主要是分段函数。

(3) 掌握在简单的实际问题中建立函数关系的方法。

Ⅱ 典型例题解析

【例 1】 在下列各对函数中，哪对函数是相同的函数？

(1) $f_1(x)=\ln x^2$，$f_2(x)=2\ln x$；

(2) $f_1(x)=x+3$，$f_2(x)=\dfrac{(x+3)(x+2)}{x+2}$；

(3) $f_1(x)=\sin^2x+\cos^2x$，$f_2(x)=1$；

(4) $f_1(x)=\sqrt[3]{x^3}$，$f_2(x)=x$。

解 (1) $f_1(x)=\ln x^2$：$D(f_1)$ $(-\infty,+\infty)$；$f_2(x)=2\ln x$：$D(f_2)(0,+\infty)$，

因为 $D(f_1)\neq D(f_2)$，故 $f_1(x)\neq f_2(x)$。

(2) $f_1(x)$：$D(f_1)(-\infty,+\infty)$；$f_2(x)$：$D(f_2)(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$，

因为 $D(f_1)\neq D(f_2)$，故 $f_1(x)\neq f_2(x)$。

(3) $f_1(x)$：$D(f_1)(-\infty,+\infty)$；$f_2(x)$：$D(f_2)(-\infty,+\infty)$，有 $D(f_1)=D(f_2)$，

又 $f_1(x)=f_2(x)=1$，故 $f_1(x)=f_2(x)$。

(4) $f_1(x)$：$D(f_1)$ $(-\infty,+\infty)$；$f_2(x)$：$D(f_2)(-\infty,+\infty)$，$D(f_1)=D(f_2)$，

又 $f_1(x)=\sqrt[3]{x^3}=1$，故 $f_1(x)=f_2(x)$。

【例 2】 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，求 $f(x-1)$，$\dfrac{1}{f(x)}$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$。

解 $f(x-1)=\dfrac{1}{1+(x-1)}=\dfrac{1}{x}$；$\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{1+x}}=1+x$；

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x}{1+x}；\ f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{1}{(x+1)+1}=\frac{1}{x+2}。$$

【例 3】 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(\sin x)$。

解 先要求出 $f(x)$ 的表达式，才能求 $f(\sin x)$。因为

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2,$$

令 $t=x+\dfrac{1}{x}$，$f(t)=t^2-2$。因同一函数其表示与符号无关，

故 $f(\sin x)=\sin^2x-2$。

【例 4】 设 $f(x+1)=x^2$，求 $f(\sec^2 x)$。

解 $f(x+1)=x^2=[(x+1)-1]^2$，令 $t=x+1$，

$f(t)=(t-1)^2$，即 $f(x)=(x-1)^2$。

故 $f(\sec^2 x)=(\sec^2 x-1)^2=\tan^4 x$。

【例 5】 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{2x}{16-x^2}+\sqrt{\ln x}$；

(2) $y=\log_5(x^2-1)$。

解 (1) 要求 $\begin{cases}16-x^2\neq 0\\ \ln x\geqslant 0\end{cases}$，即满足不等式 $\begin{cases}16-x^2\neq 0\\ \ln x\geqslant 0\\ x>0\end{cases}$，

求解不等式组，得定义域 $1\leqslant x<4$ 或 $x>4$。

(2) x 应满足不等式 $x^2-1>0$，

所以函数定义域为 $(-\infty,\ -1)$ 或 $(1,\ +\infty)$。

【例 6】 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[2,\ 4]$，试求下列函数的定义域：

(1) $f(x+1)$； (2) $f(ax)(a>0)$； (3) $f(\sin x+1)$。

解 已知函数 $f(x)$ 定义域为 $[2,\ 4]$，即 $2\leqslant x\leqslant 4$，所以

(1) 对于 $f(x+1)$ 应有 $2\leqslant x+1<4$，即 $1\leqslant x\leqslant 3$，故定义域为 $[1,\ 3]$。

(2) 对于 $f(ax)(a>0)$，应有 $2\leqslant ax\leqslant 4$，即 $\dfrac{2}{a}\leqslant x\leqslant\dfrac{4}{a}$，故 $f(ax)$ 定义域 $\left[\dfrac{2}{a},\ \dfrac{4}{a}\right]$。

(3) 对于 $f(\sin x+1)$，应有 $2\leqslant\sin x+1\leqslant 4$，即 $1\leqslant\sin x\leqslant 3$，故 $f(\sin x+1)$ 在 $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ 上有定义。

【例 7】 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}2, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ -2, & 2<x\leqslant 4\end{cases}$$

试求函数 $g(x)=f(2x)+f(x-5)$ 的定义域。

解 要使 $g(x)$ 有意义，须使 $f(2x)$ 和 $f(x-5)$ 同时有意义，从已知条件可知，$f(x)$ 的定义域为 $[0,\ 4]$，故 x 满足

$$0\leqslant 2x\leqslant 4 \text{ 且 } 0\leqslant x-5\leqslant 4,$$

即

$$0\leqslant x\leqslant 2 \text{ 且 } 5\leqslant x\leqslant 9。$$

显然，$(0\leqslant x\leqslant 2)\cap(5\leqslant x\leqslant 9)=\varnothing$ 空集，所以 $g(x)$ 无意义。

【例 8】 下列函数中，哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些是非奇非偶函数？

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

(1) $f(x)=x\sin x$; (2) $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$; (4) $f(x)=x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})$。

解 (1) $f(-x)=(-x)\sin(-x)=x\sin x=f(x)$ 是偶函数。

(2) $f(-x)=\dfrac{\tan(-x)}{(-x)}=\dfrac{\tan x}{x}=f(x)$ 是偶函数。

(3) $f(-x)=\sqrt[3]{[1-(-x)]^2}+\sqrt[3]{[1+(-x)]^2}=\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}=f(x)$ 是偶函数。

(4) $f(-x)=(-x)-\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=-[x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})]=-f(x)$ 是奇函数。

【例 9】 若函数 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数，试证 $f(ax+b)$(a、b 是常数，$a>0$) 是以$\dfrac{T}{a}$为周期的函数。

证 设 $f(t)$ 是周期为 T 的周期函数，所以，对一切 t 有下式成立

$$f(t+T)=f(t)。$$

把 $t=ax+b$ 代入上式，则对一切 x 成立

$$f(ax+b+T)=f(ax+b)。$$

上式左端为

$$f(ax+b+T)=f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)+b\right]。$$

从而对一切 x 成立

$$f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)+b\right]=f(ax+b)。$$

即 $f(ax+b)$ 在 x 处和 $x+\dfrac{T}{a}$处函数值相等，所以 $f(ax+b)$ 是周期为$\dfrac{T}{a}$的周期函数。

【例 10】 求下列函数的反函数：

(1) $y=e^{2x}+2$; (2) $y=\ln 2+\ln\sqrt{x+2}$;

(3) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$; (4) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x-1}{x}$，求 $f^{-1}(x)$。

解 求 $y=f(x)$ 的反函数，只要把 x 从 $y=f(x)$ 中反解出来即可。

(1) $y=e^{2x}+2$，化为 $e^{2x}=y-2$，

取对数 $\ln(y-2)=2x$，$x=\dfrac{1}{2}\ln(y-2)$。

一般用 x 表示自变量，用 y 表示因变量。所以，所给函数的反函数为

$$y=\frac{1}{2}\ln(x-2)。$$

(2) $y=\ln2+\ln\sqrt{x+2}=\ln2\sqrt{x+2}$,

$$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{y}=\sqrt{x+2},\ x=\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{y}\right)^{2}-2,$$

反函数为 $\quad y=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}-2$。

(3) $y=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x})$，$2y=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$,

$$\mathrm{e}^{2x}-2y\mathrm{e}^{x}-1=0,$$

$$\mathrm{e}^{x}=y\pm\sqrt{y^{2}+1},$$

由于 $\mathrm{e}^{x}>0$，所以取

$$\mathrm{e}^{x}=y+\sqrt{y^{2}+1},\ x=\ln(y+\sqrt{1+y^{2}}),$$

反函数为 $\quad y=\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})$。

(4) 先求 $f(x)$，因为

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x},\ 令\ t=\frac{1}{x},$$

$$f(t)=1-t,\ 即\ f(x)=1-x。$$

再令 $\quad y=f(x)$，即 $y=1-x$，得 $x=1-y$，

所以反函数 $\quad y=1-x$。

【例 11】 下列函数能否复合成一个函数？

(1) $y=u^{3}$，$u=\cos x$；

(2) $y=\ln u$，$u=\arctan x-\pi$；

(3) $y=2^{u}$，$u=g(x)=\ln x$。

解 (1) $D(f)$：$(-\infty,+\infty)$，$R(u)$：$[-1,1]$，$R(u)\subset D(f)$，所以这两个函数能够复合成一个函数。

(2) $D(f)$：$(0,+\infty)$，$R(u)$：$\left(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$，$R(u)\cap D(f)=\varnothing$，

故这两个函数不能复合成一个函数，即函数 $y=\ln(\arctan x-\pi)$ 无意义。

(3) $D(f)$：$(-\infty,+\infty)$，$R(u)$：$(-\infty,+\infty)$，$R(u)\subset D(f)$，所以这两个函数能够复合成一个函数。$y=2^{\ln x}$，$x\in(0,+\infty)$。

【例 12】 下列函数由哪些较简单的函数复合而得到的？

(1) $y=\mathrm{e}^{\arccos\sqrt{2-x^{2}}}$；　　(2) $y=\sin\ln x^{3}$。

解 (1) $y=\mathrm{e}^{\arccos\sqrt{2-x^{2}}}$ 视作由 $y=\mathrm{e}^{u}$，$u=\arccos v$，$v=\sqrt{\omega}$，$\omega=2-x^{2}$ 复合而成。

(2) $y=\sin\ln x^{3}$ 视作 $y=\sin u$，$u=\ln v$，$v=x^{3}$ 复合而得到。

Ⅲ 练习题

1. 填空题

(1) 函数 $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-4}+\ln(5-x)$ 的定义域是________。

(2) 将函数 $y=|x+1|+|x-1|$ 表示成分段函数是________。

(3) 若 $f(x)=\begin{cases}1-3x, & |x|\leqslant 1\\ \dfrac{1}{3}(x^2+1), & |x|>1\end{cases}$，则 $f(-1)=$________。

(4) 函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则 $f[f(x)]=$________。

(5) 函数 $y=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+5x$ 的单调增区间是________。

(6) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为周期函数，$f(x)$ 的周期为 3，$g(x)$ 的周期为 4，则 $f(x)+g(x)$ 的周期为________。

(7) 函数 $\cos\dfrac{1}{4}x+2\sin\dfrac{1}{3}x$ 的周期为________。

(8) 设 $f(x)=\ln x$，且函数 $\varphi(x)$ 的反函数 $\varphi^{-1}(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$，则 $\varphi[f(x)]=$________。

(9) 设 $f(x)=\begin{cases}2, & -1\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & 1<x\leqslant 3\end{cases}$，则函数 $g(x)=f(x+2)+f(x-2)$ 的定义域是________。

(10) 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2}{1+x^4}$，则 $f(x)=$________。

(11) 设 $f(x-1)=x^3+1$，则 $f(x+2)=$________。

(12) 设函数 $f(x+2a)$ 的定义域为 $[0, 2a]$，则 $f(x)$ 的定义域为________。

2. 计算题

(1) 设 $f(x+2)=x^2-2x+3$，求 $f[f(2)]$。

(2) 求函数 $y=\log_4\sqrt{x}+\log_4 2$ 的反函数。

(3) 确定函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1\\ x^2-1, & 1<|x|<3\end{cases}$ 的定义域，并求 $f(1)$，$f(2)$。

(4) 求函数 $f(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{2}+\ln(x+2)$ 的定义域。

(5) 设 $f\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=3+2\sin x$，求 $f(x)$。

(6) 设 $f(x+1)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x^2-1, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，求 $f(x)$。

(7) 设 $f(x)=\begin{cases}x^3+2x^2+2, & x\leqslant 0\\ 1-x^2, & x>0\end{cases}$，求 $f(x+1)$。

(8) 设 $f(x)=\ln(3+x)$，求 $f(x+1)-f(x-1)$。

(9) 求 $y=\begin{cases}\dfrac{2}{x}, & x<0\\ x+1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -x+1, & 1<x<+\infty\end{cases}$ 的定义域，并画出它们的图形。

(10) 设 $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, & x\leqslant 0\\ x+4, & x>0\end{cases}$，$g(x)=x^2-4$，求 $f[g(x)]$。

Ⅳ　参考答案

1. 填空题

(1) $[1,4)\cup(4,5)$； (2) $y=\begin{cases}-2x, & x\leqslant -1\\ 2, & -1<x\leqslant 1\\ 2x, & x>1\end{cases}$；

(3) 4； (4) 1；

(5) $(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$； (6) $T=12$；

(7) 24π； (8) $\dfrac{2\ln x+1}{1-\ln x}$；

(9) $\{x\,|\,x=1\}$； (10) $\dfrac{1}{x^2-1}$；

(11) $(x+3)^3+1$； (12) $[2a,4a]$。

2. 计算题

(1) $f[f(2)]=2$； (2) $y=4^{2x-1}$；

(3) $f(1)=0$，$f(2)=3$； (4) $[-1,3]$；

(5) $f(x)=3+2\sin\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$； (6) $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & 1\leqslant x\leqslant 2\\ x^2-2x, & 2<x\leqslant 3\end{cases}$；

(7) $f(x+1)=\begin{cases}x^3+5x^2+7x+5, & x\leqslant 1\\ -x^2-2x, & x>-1\end{cases}$；

(8) $f(x+1)-f(x-1)=\ln\dfrac{4+x}{2+x}$；

(9) $D(f)$：$(-\infty,+\infty)$，图略；

(10) $f[g(x)]=\begin{cases}(x^2-3)^2, & -2\leqslant x\leqslant 2\\ x^2, & x>2 \text{ 或 } x<-2\end{cases}$。

第二章　极限和连续

Ⅰ　基本要求

一、极限概念

（1）了解数列极限概念，理解函数极限的直观概念。其中的重点是函数 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 的函数极限。

（2）理解函数在一点 x_0 的左、右极限 $f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$。掌握函数在一点 x_0 的左、右极限与极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 的关系，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是 $f(x_0^-)=f(x_0^+)$ 都存在且相等。

（3）学会对分段函数在分段点处是否存在极限、是否连续等。

二、极限存在的充分条件和极限的运算法则

（1）了解判定极限存在的夹逼准则。对于某些非常简单的情形，能够运用夹逼准则判定函数极限存在。了解单调收敛定理，数列或函数在其变化过程中，若保持单调且有界，则一定存在极限。

（2）掌握两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e};\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e};\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}。$$

（3）掌握极限的四则运算。

（4）理解无穷小量的概念，了解无穷大量的概念。

三、连续函数

（1）理解函数的连续性概念和间断点的概念。对于比较简单的情况，能够指出函数的间断点，能够根据函数连续性定义及左、右极限讨论分段函数在分段点处连续性。

（2）理解连续函数的零点定理，判定函数在某个区间上存在零点。了解连续函数的介值定理和最大（小）定理。

Ⅱ　典型例题解析

【例 1】 求下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n-1}-n^2)(n+1)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)$。

解 (1) 先对分子进行有理化，再除以分子、分母中 n 的最高次数，用极限运算法则，就可以得出结果。

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n-1}-n^2)(\sqrt{n^2+2n-1}+n^2)(n+1)}{\sqrt{n^2+2n-1}+n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^4+2n-1-n^4)(n+1)}{\sqrt{n^2+2n-1}+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-1}{\sqrt{n^2+2n-1}+n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}}}=2。$$

(2) $$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n^2+1-n^2)}{n+\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left[1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right]}=\frac{1}{2}。$$

(3) 利用无限个无穷小之和不一定等于无穷小，

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\times\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}。$$

【例 2】 求数列 $f(n)=\begin{cases}1+\frac{1}{2n}，n\text{ 为奇数}\\(-1)^n，n\text{ 为偶数}\end{cases}$ 的极限。

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)=1$（$n$ 为奇数），

$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n=1$（$n$ 为偶数），

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=1$，即 $f(n)$ 存在极限。

【例 3】 求下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8n^3+1}}{\sqrt{n}-n}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+10n}{3n^3+2n}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^3+3}+\sqrt{3n+4}}$。

解 (1) $$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8+\frac{1}{n^3}}}{\sqrt{\frac{1}{n}}-1}=-2。$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com