

高等学校教学用书

# 高等数学基础 辅导练习

王敬修 主编



化学工业出版社

赛项目教材“高等数学基础辅导练习”由同济大学本专业类教师将登星国际出版社编写。该书采用国家教材中一些概念表述，题型新颖，题量丰富，共十章，每章附有习题、解答和思考题，每章后附有综合练习题，每章末附有参考答案。本书可供工科院校学生使用，也可作为工程技术人员的参考书。

## 高等学校教学用书

# 高等数学基础辅导练习

王敬修 主编

责任编辑：白黎霞 图书设计：孙巍

出版单位：高等教育出版社  
出版时间：2008年8月  
印制时间：2008年8月  
开本：787mm×1092mm 1/16  
印张：10.5  
字数：250千字  
定价：36.00元  
ISBN 978-7-04-021111-1

化学工业出版社

地址：北京朝阳区建外大街1号

邮编：100026

网 址：<http://www.citp.com.cn> 电 话：010-64518888

网 址：<http://www.citp.com.cn> 电 话：010-64518888

 化学工业出版社

地 址：北京市朝阳区建外大街1号 邮政编码：100026

本书是针对应用型经济管理类专业本科所编写的“高等数学基础”教材的配套辅导书。全书共十章：函数、极限和连续、导数与微分、中值定理及应用、积分学、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、常微分方程。每章安排有基本要求、重点内容、典型例题分析、综合练习题及其答案。为帮助学生培养数量分析能力打下一定的基础，并为后续课程提供一定的保证。

本辅导书具有实用性、科学性、指导性。可作为经济管理类高校、高等职业技术学院、职工大学、函授大学等参考用书。

# 高等数学基础辅导练习

主编 王敬修

## 图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学基础辅导练习/王敬修主编. —北京：化学工业出版社，2008.8  
高等学校教学用书  
ISBN 978-7-122-03444-1

I. 高… II. 王… III. 高等数学—高等学校—习题  
IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 115108 号

---

责任编辑：唐旭华 叶晶磊  
责任校对：徐贞珍

装帧设计：风行书装

---

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011）  
印 装：化学工业出版社印刷厂  
720mm×1000mm 1/16、印张 7 1/4 字数 134 千字 2008 年 10 月北京第 1 版第 1 次印刷

---

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686） 售后服务：010-64518899  
网 址：<http://www.cip.com.cn>  
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

---

定 价：13.00 元

版权所有 违者必究

## 《高等数学基础辅导练习》编写人员

主 编 王敬修

在高等院校理工科各专业中，高等数学是一门必修课。编者们深应用型本科院校学生为对象，编写了“基础与提高”系列教材。编写《高等数学基础》教材时，特别注意了高等数学的逻辑性、严谨性，又将高难度抽象性和研究方法作为学习的重点和难点的一门课程。为了帮助学生学好高等数学，为培养学生的数学分析能力打下一定的基础，并为后续课程提供一定的保证，特编写此练习册。

本书内容安排在章排列，各章十几道题，以“基本要求”，它是按国家教委所颁布的大纲要求，布置多少学习；对哪章应该做什么，理解什么；②“重点内容”，是学生平时学习时必须掌握知识点的掌握，在复习时更要熟悉这些内容进行记忆；③“典型例题分析”，它具有一定 的代表性，又考虑到知识点的覆盖，通过对这些典型例题的分析，帮助学生正确理解概念，掌握做题方法，进而能与题目及其答案一并供学生理解基本知识，巩固所学知识。

本书根据多年来的教学经验，归纳了“高等数学”的特点、学习方法，以帮助学生更好地发挥自己的聪明才智，学好高等数学。

由于水平有限，有不妥之处，欢迎读者批评指正。

编者

2008年5月于燕郊

# 前　　言

在高等教育经济管理专业中，高等数学是一门必修课程。编者针对应用型本科院校学生为对象，遵循“以应用为目的”、“以必需、够用为度”的原则，编写与《高等数学基础》教材相配套的辅导书。由于高等数学具有严密性、逻辑性，又有高度抽象性和研究方法的特殊性，是比较难学的一门课程。为了帮助学生学好高等数学，为培养学生的数量分析能力打下一定的基础，并为后续课程提供一定的保证，特编写此练习册。

本书内容编排按章排列，各章分几部分：①“基本要求”，它是按国家教委所颁布的大纲要求，简要地告诉学生对该章应掌握什么、理解什么；②“重点内容”，要求学生平时学习时应注意对知识点的掌握，在复习时更要抓住这些内容进行记忆；③“典型例题分析”，它具有一定的代表性，又考虑到对知识的覆盖面，通过对这些典型例题的解答，能迅速帮助学生正确理解概念，掌握解题方法；④“练习题及其答案”，有助于学生理解基本知识，巩固所学知识。

本书根据多年来的教学经验，介绍了“高等数学”的特点、学习方法，以便同学们更好地发挥自己的主观能动性，学好高等数学。

书中如有不妥之处，请读者赐教。

编者

2008年5月于燕郊

第一部分 函数、极限和连续	1	一、基本要求	1	二、重点内容	1	三、典型例题解析	1	四、练习题	1	五、参考答案	1
第二部分 导数与微分	27	一、基本要求	27	二、重点内容	27	三、典型例题解析	27	四、练习题	27	五、参考答案	27
第三部分 微分中值定理和导数的应用	30	一、基本要求	30	二、重点内容	30	三、典型例题解析	30	四、练习题	30	五、参考答案	30
第四部分 不定积分	32	一、基本要求	32	二、重点内容	32	三、典型例题解析	32	四、练习题	32	五、参考答案	32
第五章 一元函数积分学	44	一、基本要求	44	二、重点内容	44	三、典型例题解析	44	四、练习题	44	五、参考答案	44
第六章 级数	52	一、基本要求	52	二、重点内容	52	三、典型例题解析	52	四、练习题	52	五、参考答案	52
第七章 多元函数微分学	62	一、基本要求	62	二、重点内容	62	三、典型例题解析	62	四、练习题	62	五、参考答案	62
第八章 重积分	72	一、基本要求	72	二、重点内容	72	三、典型例题解析	72	四、练习题	72	五、参考答案	72
第九章 无穷级数	82	一、基本要求	82	二、重点内容	82	三、典型例题解析	82	四、练习题	82	五、参考答案	82
第十章 常微分方程	101	一、基本要求	101	二、重点内容	101	三、典型例题解析	101	四、练习题	101	五、参考答案	101

# 高等数学的特点与学习方法 目 录

高等数学的特点与学习方法	1	第六章 向量代数与空间解析几何	58
第一章 函数	3	I 基本要求	58
I 基本要求	3	II 重点内容	58
II 典型例题解析	4	III 典型例题解析	61
III 练习题	7	IV 练习题	64
IV 参考答案	9	V 参考答案	65
第二章 极限和连续	10	第七章 多元函数微分学	67
I 基本要求	10	I 基本要求	67
II 典型例题解析	10	II 重点内容	67
III 练习题	15	III 典型例题解析	69
IV 参考答案	17	IV 练习题	77
第三章 一元函数的导数和微分	18	V 参考答案	79
I 基本要求	18	第八章 二重积分	82
II 重点内容	18	I 基本要求	82
III 典型例题解析	20	II 重点内容	82
IV 练习题	26	III 典型例题解析	84
V 参考答案	27	IV 练习题	86
第四章 微分中值定理和导数的应用	30	V 参考答案	86
I 基本要求	30	第九章 无穷级数	87
II 重点内容	30	I 基本要求	87
III 典型例题解析	32	II 重点内容	87
IV 练习题	40	III 典型例题解析	90
V 参考答案	42	IV 练习题	97
第五章 一元函数积分学	44	V 参考答案	99
I 基本要求	44	第十章 常微分方程	101
II 重点内容	44	I 基本要求	101
III 典型例题解析	46	II 重点内容	101
IV 练习题	52	III 典型例题解析	103
V 参考答案	55	IV 练习题	107
		V 参考答案	107

翻阅书，林迷，且享对圆弧曲感性自然，索要一席闲暇以本该带是黑板记  
志不断增，遂翻用脑会意而行，渐见来不求破。而取长流容内以底端，渐渐演  
进到“只三忘本”人潮

## 高等数学的特点与学习方法

高等数学来自于实际，又能应用于实际，具有概念表达的抽象性、论述推理的逻辑性、演算上的技巧性等特性。而理论离人们实践的距离似乎较远些，只要我们认识高等数学的特点，即在学习中掌握几对矛盾的相互转化，对于学好高等数学肯定是有益的。

### 1. 变量与常量的相互转化

高等数学能深刻地描述“常量”和“变量”互相变化的过程。例如，我们要计算半径  $r$  一定的圆面积，这是常量。该圆面积通过圆内接正多边形的面积来表示时，当圆内接正多边形边数无限增多，其面积越接近圆的面积，这是个视“常”量为“变”量的过程，再通过极限过程（“变”）得到圆面积的准确值（常量）。

### 2. “直”与“曲”的相互转化

在一定条件下“直”与“曲”可以相互转化。在初等数学中无法计算变力做功，而在高等数学中，将变力做功细分为一个个小位移的恒力做功，所有小位移功的和就是变力做功。如果用小位移的恒力功近似代替小位移的变力功，则通过积分又可以把“直”再化为“曲”。

### 3. 有限与无限的相互转化

初等数学只能进行有限次运算。譬如，求等比数列之和  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ ，而对求公比  $|q| < 1$  的等比级数  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$  之和，要利用高等数学中的极限工具，即求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} q^n$ 。

### 4. 具体与抽象的相互转化

高等数学的许多重要概念都是从一些具体例子引入的。如求曲线上某点的切线斜率问题，可归结为求极限  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ，从而引入导数概念。它在经济分析中就可用来描述边际成本、边际利润、边际收益等经济学概念。

高等数学概念表达的抽象性、论述推理的逻辑性、演算的技巧性使部分学生望而生畏。为此要求学生对成功充满信心，要有坚强的毅力，知难而进的勇气。除此之外，掌握科学的学习方法是一个重要的决定性因素。

#### 1. 认真听课，记好笔记

听好课是学好本门课的第一要素，然后必须仔细地阅读笔记、教材，做到循序渐进，做到对内容充分理解。如果不求甚解，问题就会越积越多，欲速不达，陷入“冰冻三尺”的境地。

## 2. 一定要搞清基本概念

对于每一个新出现的概念，要思考这个概念是从哪些问题中抽象出来的；新的概念与以前的概念有什么联系，有什么区别。比如，应该弄清一元函数的极限、连续、可导和可微的定义以及相互之间的关系。

## 3. 掌握基本的定理

对每一个定理的条件、结论都要理解得清楚，要求自己描述、书写这些定理，记住重要定理的证明过程。

对基本概念和定理，要求自己能讲出来，写下来，并且力求用图形或几何意义来解释，然后同教材对照，看自己讲得是否完整、正确。

对每一个概念、定理能用一二个典型的例子来说明它们是很重要的。但是，如果能用反例来说概念及定理，则更能帮助我们对概念和定理的理解、掌握和使

用。比如， $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  是级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛的必要条件，而不是充分条件。

## 4. 认真对待练习

掌握基本的运算方法、运算技巧是学习数学的一个重要内容。解题时，首先确定题目的类型、方法，按运算法则来进行，注意解题的每一步根据，同时选择最恰当的解法。这是培养自己独立分析和解决问题的能力。

## 5. 养成学习的好习惯

读书要做笔记，记下你对某一内容所特有的想法和理解。对难点、难题作进一步思考，与同学一起讨论，直到弄明白为止。

总之，每个成功者都有一套独特的经验和方法。希望学生根据自己的情况不断地总结经验，在总结中不断提高自己的学习水平。

**【例 4】** 设  $f(x+1)=x^2$ , 求  $f(x)$ .

解  $f(x+1)=x^2=[(x+1)-1]^2$ .

$$f(x)=(x-1)^2, \text{ 即 } f(x)=(x-1)(x-1).$$

故  $f(x)=x^2$ .  
函数的图像是抛物线，中点在  $x=1$  处。 【1 题】

**【例 5】** 求下列函数的定义域。

## 第一章 函数

### I 基本要求

#### 一、函数的定义和性质

- (1) 理解一元函数的定义及函数与图形之间的关系。理解构成函数的两个要素：函数的定义域和函数的对应法则。
- (2) 了解函数的几种常用表示法；理解函数的几种基本特性。
- (3) 理解复合函数概念，掌握由两个基本初等函数构成的复合函数的定义域的求法。

两个函数  $f(x)$  和  $g(x)$  能够成为复合函数  $f[g(x)]$  是有条件的。当且仅当  $R(g) \cap D(f)$  不为空集时，复合函数  $f[g(x)]$  才有意义。

- (4) 了解反函数概念，掌握幂函数、指数函数和对数函数的反函数，了解三角函数的反函数。

对于幂函数、指数函数和对数函数，要求掌握反函数的定义域和表达式，以及函数与反函数的图形。对于三角函数，主要是  $\arcsinx$ 、 $\arccos x$ 、 $\arctan x$  的函数定义域和图形。

- (5) 理解函数的单调性和奇偶性。函数的单调性是函数在某一区间上的性质，一般情形可以将函数定义域分成若干个区间，函数在各个区间上有不同的单调性。函数的奇偶性是函数在整个定义域上的性质。奇函数和偶函数的定义域，一般是对称于原点区间。

- (6) 了解函数的周期性和有界性。函数的周期性是函数在整个定义域上的性质。函数的有界性是函数在某个区间上的性质。同一函数，在某一个区间上可能有界，但是在另一个区间上则可能无界。

#### 二、初等函数和非初等函数

- (1) 掌握常值函数、幂函数、指数函数、对数函数和三角函数的图形、定义域、单调性、奇偶性、周期性。另外要理解  $\arctan x$  的定义域和图形。
- (2) 了解非初等函数，主要是分段函数。
- (3) 掌握在简单的实际问题中建立函数关系的方法。

## Ⅱ 典型例题解析

**【例 1】** 在下列各对函数中, 哪对函数是相同的函数?

$$(1) f_1(x) = \ln x^2, f_2(x) = 2 \ln x;$$

$$(2) f_1(x) = x + 3, f_2(x) = \frac{(x+3)(x+2)}{x+2};$$

$$(3) f_1(x) = \sin^2 x + \cos^2 x, f_2(x) = 1;$$

$$(4) f_1(x) = \sqrt[3]{x^3}, f_2(x) = x.$$

**解** (1)  $f_1(x) = \ln x^2$ :  $D(f_1) = (-\infty, +\infty)$ ;  $f_2(x) = 2 \ln x$ :  $D(f_2) = (0, +\infty)$ ,

因为  $D(f_1) \neq D(f_2)$ , 故  $f_1(x) \neq f_2(x)$ .

(2)  $f_1(x)$ :  $D(f_1) = (-\infty, +\infty)$ ;  $f_2(x)$ :  $D(f_2) = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$ ,

因为  $D(f_1) \neq D(f_2)$ , 故  $f_1(x) \neq f_2(x)$ .

(3)  $f_1(x)$ :  $D(f_1) = (-\infty, +\infty)$ ;  $f_2(x)$ :  $D(f_2) = (-\infty, +\infty)$ , 有  $D(f_1) = D(f_2)$ ,

又  $f_1(x) = f_2(x) = 1$ , 故  $f_1(x) = f_2(x)$ .

(4)  $f_1(x)$ :  $D(f_1) = (-\infty, +\infty)$ ;  $f_2(x)$ :  $D(f_2) = (-\infty, +\infty)$ ,  $D(f_1) = D(f_2)$ ,

又  $f_1(x) = \sqrt[3]{x^3} = 1$ , 故  $f_1(x) = f_2(x)$ .

**【例 2】** 设函数  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ , 求  $f(x-1)$ ,  $\frac{1}{f(x)}$ ,  $f\left(\frac{1}{x}\right)$ ,  $f\left[\frac{1}{f(x)}\right]$ .

**解**  $f(x-1) = \frac{1}{1+(x-1)} = \frac{1}{x}$ ;  $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{1}{1+x}} = 1+x$ ;

$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x}{1+x}$ ;  $f\left[\frac{1}{f(x)}\right] = \frac{1}{(x+1)+1} = \frac{1}{x+2}$ .

**【例 3】** 设  $f\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ , 求  $f(\sin x)$ .

**解** 先要求出  $f(x)$  的表达式, 才能求  $f(\sin x)$ . 因为

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2,$$

令  $t = x + \frac{1}{x}$ ,  $f(t) = t^2 - 2$ . 因同一函数其表示与符号无关,

故  $f(\sin x) = \sin^2 x - 2$ .

**【例 4】** 设  $f(x+1)=x^2$ , 求  $f(\sec^2 x)$ .

解  $f(x+1)=x^2=[(x+1)-1]^2$ , 令  $t=x+1$ ,

$$f(t)=(t-1)^2, \text{ 即 } f(x)=(x-1)^2.$$

故  $f(\sec^2 x)=(\sec^2 x-1)^2=\tan^4 x$ .  
解  $f(\sec^2 x)=(\sec^2 x-1)^2=\tan^4 x$ .  
 $\tan^4 x = (\tan^2 x - 1)^2 = (\sec^2 x - 1)^2$ .

**【例 5】** 求下列函数的定义域:

$$(1) y=\frac{2x}{16-x^2}+\sqrt{\ln x}; \quad \begin{cases} 16-x^2 \neq 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \pm 4 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0 \quad (1)$$

$$(2) y=\log_5(x^2-1).$$

$$\begin{cases} 16-x^2 \neq 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \pm 4 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0 \quad (1)$$

求解不等式组, 得定义域  $1 \leq x < 4$  或  $x > 4$ .

(2)  $x$  应满足不等式  $x^2-1>0$ ,

所以函数定义域为  $(-\infty, -1)$  或  $(1, +\infty)$ .

**【例 6】** 已知函数  $f(x)$  的定义域是  $[2, 4]$ , 试求下列函数的定义域:

$$(1) f(x+1); \quad (2) f(ax)(a>0); \quad (3) f(\sin x+1).$$

解 已知函数  $f(x)$  定义域为  $[2, 4]$ , 即  $2 \leq x \leq 4$ , 所以

(1) 对于  $f(x+1)$  应有  $2 \leq x+1 \leq 4$ , 即  $1 \leq x \leq 3$ , 故定义域为  $[1, 3]$ .

(2) 对于  $f(ax)(a>0)$ , 应有  $2 \leq ax \leq 4$ , 即  $\frac{2}{a} \leq x \leq \frac{4}{a}$ , 故  $f(ax)$  定义域

$$\left[ \frac{2}{a}, \frac{4}{a} \right].$$

(3) 对于  $f(\sin x+1)$ , 应有  $2 \leq \sin x+1 \leq 4$ , 即  $1 \leq \sin x \leq 3$ , 故  $f(\sin x+1)$  在  $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  上有定义.

**【例 7】** 已知函数

$$f(x)=\begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 2 \\ -2, & 2 < x \leq 4 \end{cases} \quad (1)$$

试求函数  $g(x)=f(2x)+f(x-5)$  的定义域.

解 要使  $g(x)$  有意义, 须使  $f(2x)$  和  $f(x-5)$  同时有意义, 从已知条件可知,  $f(x)$  的定义域为  $[0, 4]$ , 故  $x$  满足

$$0 \leq 2x \leq 4 \text{ 且 } 0 \leq x-5 \leq 4,$$

即

$$0 \leq x \leq 2 \text{ 且 } 5 \leq x \leq 9.$$

显然,  $(0 \leq x \leq 2) \cap (5 \leq x \leq 9) = \emptyset$  空集, 所以  $g(x)$  无意义.

**【例 8】** 下列函数中, 哪些是奇函数? 哪些是偶函数? 哪些是非奇非偶函数?

(1)  $f(x) = x \sin x;$

(2)  $f(x) = \frac{\tan x}{x};$

(3)  $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2};$  (4)  $f(x) = x - \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$

解 (1)  $f(-x) = (-x) \sin(-x) = x \sin x = f(x)$  是偶函数。

(2)  $f(-x) = \frac{\tan(-x)}{(-x)} = \frac{\tan x}{x} = f(x)$  是偶函数。

(3)  $f(-x) = \sqrt[3]{[1-(-x)]^2} + \sqrt[3]{[1+(-x)]^2} = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} = f(x)$  是偶函数。

(4)  $f(-x) = (-x) - \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) = -[x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})] = -f(x)$  是奇函数。

**【例 9】** 若函数  $f(x)$  是周期为  $T$  的周期函数，试证  $f(ax+b)$  ( $a, b$  是常数,  $a > 0$ ) 是以  $\frac{T}{a}$  为周期的函数。

证 设  $f(t)$  是周期为  $T$  的周期函数，所以，对一切  $t$  有下式成立

$$f(t+T) = f(t).$$

把  $t=ax+b$  代入上式，则对一切  $x$  成立

$$f(ax+b+T) = f(ax+b).$$

上式左端为

$$f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)+b\right].$$

从而对一切  $x$  成立

$$f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)+b\right] = f(ax+b).$$

即  $f(ax+b)$  在  $x$  处和  $x+\frac{T}{a}$  处函数值相等，所以  $f(ax+b)$  是周期为  $\frac{T}{a}$  的周期函数。

**【例 10】** 求下列函数的反函数：

(1)  $y = e^{2x} + 2;$

(2)  $y = \ln 2 + \ln \sqrt{x+2};$

(3)  $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$

(4)  $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x-1}{x}$ , 求  $f^{-1}(x)$ .

解 求  $y=f(x)$  的反函数，只要把  $x$  从  $y=f(x)$  中反解出来即可。

(1)  $y = e^{2x} + 2$ , 化为  $e^{2x} = y - 2$ ,

取对数  $\ln(y-2) = 2x$ ,  $x = \frac{1}{2} \ln(y-2).$

一般用  $x$  表示自变量，用  $y$  表示因变量。所以，所给函数的反函数为

$$y = \frac{1}{2} \ln(x-2).$$

$$(2) y = \ln 2 + \ln \sqrt{x+2} = \ln 2 \sqrt{x+2},$$

$$\frac{1}{2} e^y = \sqrt{x+2}, \quad x = \left(\frac{1}{2} e^y\right)^2 - 2,$$

反函数为  $y = \frac{1}{4} e^{2x} - 2$ .

$$(3) y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad 2y = e^x - e^{-x},$$

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0, \quad e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1},$$

由于  $e^x > 0$ , 所以取  $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$ ,

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}, \quad x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}),$$

反函数为  $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ .

(4) 先求  $f(x)$ , 因为

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}, \quad \text{令 } t = \frac{1}{x},$$

$$f(t) = 1-t, \quad \text{即 } f(x) = 1-x.$$

再令  $y = f(x)$ , 即  $y = 1-x$ , 得  $x = 1-y$ ,

所以反函数  $y = 1-x$ .

**【例 11】** 下列函数能否复合成一个函数?

$$(1) y = u^3, \quad u = \cos x;$$

$$(2) y = \ln u, \quad u = \arctan x - \pi;$$

$$(3) y = 2^u, \quad u = g(x) = \ln x.$$

解 (1)  $D(f) : (-\infty, +\infty)$ ,  $R(u) : [-1, 1]$ ,  $R(u) \subset D(f)$ , 所以这两个函数能够复合成一个函数。

$$(2) D(f) : (0, +\infty), \quad R(u) : \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \quad R(u) \cap D(f) = \emptyset,$$

故这两个函数不能复合成一个函数, 即函数  $y = \ln(\arctan x - \pi)$  无意义。

(3)  $D(f) : (-\infty, +\infty)$ ,  $R(u) : (-\infty, +\infty)$ ,  $R(u) \subset D(f)$ , 所以这两个函数能够复合成一个函数。 $y = 2^{\ln x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

**【例 12】** 下列函数由哪些较简单的函数复合而得到的?

$$(1) y = e^{\arccos \sqrt{2-x^2}}; \quad (2) y = \sin \ln x^3.$$

解 (1)  $y = e^{\arccos \sqrt{2-x^2}}$  视作由  $y = e^u$ ,  $u = \arccos v$ ,  $v = \sqrt{\omega}$ ,  $\omega = 2-x^2$  复合而成。

(2)  $y = \sin \ln x^3$  视作  $y = \sin u$ ,  $u = \ln v$ ,  $v = x^3$  复合而得到。

### III 练习题

#### 1. 填空题

- (1) 函数  $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x-4} + \ln(5-x)$  的定义域是\_\_\_\_\_。
- (2) 将函数  $y = |x+1| + |x-1|$  表示成分段函数是\_\_\_\_\_。
- (3) 若  $f(x) = \begin{cases} 1-3x, & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{3}(x^2+1), & |x| > 1 \end{cases}$ , 则  $f(-1) =$  \_\_\_\_\_。
- (4) 函数  $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ , 则  $f[f(x)] =$  \_\_\_\_\_。
- (5) 函数  $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x$  的单调增区间是\_\_\_\_\_。
- (6) 设函数  $f(x)$  和  $g(x)$  均为周期函数,  $f(x)$  的周期为 3,  $g(x)$  的周期为 4, 则  $f(x)+g(x)$  的周期为\_\_\_\_\_。
- (7) 函数  $\cos \frac{1}{4}x - 2\sin \frac{1}{3}x$  的周期为\_\_\_\_\_。
- (8) 设  $f(x) = \ln x$ , 且函数  $\varphi(x)$  的反函数  $\varphi^{-1}(x) = \frac{x-1}{x+2}$ , 则  $\varphi[f(x)] =$  \_\_\_\_\_。
- (9) 设  $f(x) = \begin{cases} 2, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$ , 则函数  $g(x) = f(x+2) + f(x-2)$  的定义域是\_\_\_\_\_。
- (10) 设  $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{1+x^4}$ , 则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_。
- (11) 设  $f(x-1) = x^3 + 1$ , 则  $f(x+2) =$  \_\_\_\_\_。
- (12) 设函数  $f(x+2a)$  的定义域为  $[0, 2a]$ , 则  $f(x)$  的定义域为\_\_\_\_\_。

## 2. 计算题

- (1) 设  $f(x+2) = x^2 - 2x + 3$ , 求  $f[f(2)]$ 。
- (2) 求函数  $y = \log_4 \sqrt{x} + \log_4 2$  的反函数。
- (3) 确定函数  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x| \leq 1 \\ x^2-1, & 1 < |x| < 3 \end{cases}$  的定义域, 并求  $f(1)$ ,  $f(2)$ 。
- (4) 求函数  $f(x) = \arcsin \frac{x-1}{2} + \ln(x+2)$  的定义域。
- (5) 设  $f\left(\frac{1}{x}-1\right) = 3 + 2\sin x$ , 求  $f(x)$ 。
- (6) 设  $f(x+1) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2-1, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ , 求  $f(x)$ 。
- (7) 设  $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x^2 + 2, & x \leq 0 \\ 1-x^2, & x > 0 \end{cases}$ , 求  $f(x+1)$ 。

(8) 设  $f(x)=\ln(3+x)$ , 求  $f(x+1)-f(x-1)$ 。

(9) 求  $y=\begin{cases} \frac{2}{x}, & x<0 \\ x+1, & 0 \leq x \leq 1 \\ -x+1, & 1 < x < +\infty \end{cases}$  的定义域, 并画出它们的图形。

(10) 设  $f(x)=\begin{cases} (x+1)^2, & x \leq 0 \\ x+4, & x > 0 \end{cases}$ ,  $g(x)=x^2-4$ , 求  $f[g(x)]$ 。

## IV 参考答案

### 1. 填空题

$$(1) [1, 4] \cup (4, 5);$$

$$(2) y = \begin{cases} -2x, & x \leq -1 \\ 2, & -1 < x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$

$$(3) 4;$$

$$(4) 1;$$

$$(5) (-\infty, 1) \cup (5, +\infty);$$

$$(6) T=12;$$

$$(7) 24\pi;$$

$$(8) \frac{2\ln x+1}{1-\ln x};$$

$$(9) \{x|x=1\};$$

$$(10) \frac{1}{x^2-1};$$

$$(11) (x+3)^3+1;$$

$$(12) [2a, 4a].$$

### 2. 计算题

$$(1) f[f(2)]=2;$$

$$(2) y=4^{2x-1};$$

$$(3) f(1)=0, f(2)=3;$$

$$(4) [-1, 3];$$

$$(5) f(x)=3+2\sin\left(\frac{1}{x+1}\right);$$

$$(6) f(x)=\begin{cases} 2(x-1), & 1 \leq x \leq 2 \\ x^2-2x, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$(7) f(x+1)=\begin{cases} x^3+5x^2+7x+5, & x \leq 1 \\ -x^2-2x, & x > -1; \end{cases}$$

$$(8) f(x+1)-f(x-1)=\ln \frac{4+x}{2+x};$$

$$(9) D(f): (-\infty, +\infty), \text{图略};$$

$$(10) f[g(x)]=\begin{cases} (x^2-3)^2, & -2 \leq x \leq 2 \\ x^2, & x > 2 \text{ 或 } x < -2. \end{cases}$$

## 第二章 极限和连续

### I 基本要求

#### 一、极限概念

(1) 了解数列极限概念, 理解函数极限的直观概念。其中的重点是函数  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  的函数极限。

(2) 理解函数在一点  $x_0$  的左、右极限  $f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  和  $f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 。掌握函数在一点  $x_0$  的左、右极限与极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  的关系, 极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在的充分必要条件是  $f(x_0^-) = f(x_0^+)$  都存在且相等。

(3) 学会对分段函数在分段点处是否存在极限、是否连续等。

#### 二、极限存在的充分条件和极限的运算法则

(1) 了解判定极限存在的夹逼准则。对于某些非常简单的情形, 能够运用夹逼准则判定函数极限存在。了解单调收敛定理, 数列或函数在其变化过程中, 若保持单调且有界, 则一定存在极限。

(2) 掌握两个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

(3) 掌握极限的四则运算。

(4) 理解无穷小量的概念, 了解无穷大量的概念。

#### 三、连续函数

(1) 理解函数的连续性概念和间断点的概念。对于比较简单的情况, 能够指出函数的间断点, 能够根据函数连续性定义及左、右极限讨论分段函数在分段点处连续性。

(2) 理解连续函数的零点定理, 判定函数在某个区间上存在零点。了解连续函数的介值定理和最大(小)定理。

### II 典型例题解析

【例 1】求下列数列的极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n - 1} - n^2)(n+1);$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - n);$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}(1+2+\dots+n).$$

解 (1) 先对分子进行有理化, 再除以分子、分母中  $n$  的最高次数, 用极限运算法则, 就可以得出结果。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 2n - 1} - n^2)(\sqrt{n^2 + 2n - 1} + n^2)(n+1)}{\sqrt{n^2 + 2n - 1} + n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^4 + 2n - 1 - n^4)(n+1)}{\sqrt{n^2 + 2n - 1} + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 1}{\sqrt{n^2 + 2n - 1} + n^2} \quad \text{and (1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^4}}} = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{n^2 + 1} - n)(\sqrt{n^2 + 1} + n)}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n^2 + 1 - n^2)}{n + \sqrt{n^2 + 1}} \quad \text{and (1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \right]} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(3) 利用无限个无穷小之和不一定等于无穷小,

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{2}.$$

**【例 2】** 求数列  $f(n) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2n}, & n \text{ 为奇数} \\ (-1)^n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$  的极限。

$$\text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) = 1 \quad (n \text{ 为奇数}),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1 \quad (n \text{ 为偶数}),$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 1$ , 即  $f(n)$  存在极限。

**【例 3】** 求下列数列的极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^3 + 1}}{\sqrt{n} - n}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 10n}{3n^3 + 2n};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 1} + \sqrt{n + 1}}{\sqrt[3]{n^3 + 3} + \sqrt{3n + 4}}.$$

$$\text{解 (1) 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8 + \frac{1}{n^3}}}{\sqrt{\frac{1}{n} - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8 + \frac{1}{n^3}}}{\sqrt{\frac{1 - n}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8 + \frac{1}{n^3}}}{\sqrt{\frac{1 - n}{n}}} = -2.$$