教育部高职高专推荐教材

Jiaoyubu Gaozhi Gaozhuan Tuijian Jiaocai

# 高等数学

下册

盛祥耀　主编

潘鹊屏　副主编

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

教育部高职高专推荐教材

# 高等数学

## 下册

盛祥耀 主编　　潘鹊屏 副主编
编者 汪瑶同　钱翼文　王庚生　潘鹊屏
黄奕佗　邢文斗　章　平

高等教育出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

高等数学　下册/盛祥耀主编. 一北京：高等教育出版社，2001 重印

ISBN 7-04-004243-6

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 盛…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材　Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（95）第 23108 号

| | | | |
|---|---|---|---|
| **出版发行** | 高等教育出版社 | | |
| **社　　址** | 北京市东城区沙滩后街 55 号 | **邮政编码** | 100009 |
| **电　　话** | 010-64054588 | **传　　真** | 010-64014048 |
| **网　　址** | http://www.hep.edu.cn | | |
| **经　　销** | 新华书店北京发行所 | | |
| **印　　刷** | 北京华文印刷厂 | | |
| **开　　本** | 850×1168　1/32 | **版　　次** | 2001 年 6 月第 1 版 |
| **印　　张** | 9 | **印　　次** | 2001 年 9 月第14次印刷 |
| **字　　数** | 230 000 | **定　　价** | 8.90 元 |

## 内 容 提 要

本书是国家教委高等学校工程专科数学教材编审组根据国家教委高等学校工程专科基础课程教学基本要求(高等数学)组织编写的教材.

考虑到专科层次的特点,全书始终贯彻"在基础课的教学中,要求以应用为目的,以必需够用为度"的精神.本书分上、下两册出版,下册分为五章,内容是向量代数、空间解析几何;多元函数微分学;重积分;曲线积分与曲面积分;无穷级数.

本书可供高等工程专科院校师生使用.

## 高等工程专科数学编审组

组　长：彭玉芳

副组长：尹福源　黄奕佗

成　员：钱翼文　盛祥耀　潘鹊屏　周正中

李效羽　邢文斗　常柏林　汪瑶同

苏永法　彭延铭　卢静芳　樊启宙

秘　书：范以纲

# 目　录

# 第八章　向量代数　空间解析几何

空间解析几何是用代数的方法研究空间图形的一门数学学科,它在其它学科特别是工程技术上的应用比较广泛.此外,我们在讨论多元函数微积分时,空间解析几何也能给多元函数提供直观的几何解释.因此在学多元函数的微积分之前,先介绍空间解析几何的知识.

向量代数在后继课程和工程技术中有着广泛的应用.本章首先介绍二、三阶行列式并建立空间直角坐标系,然后引进向量及其代数运算,最后以向量为工具为研究空间解析几何.

## 第一节　二阶及三阶行列式<br>空间直角坐标系

### 一　二阶及三阶行列式

**1. 二阶行列式**

我们从解二元一次方程组入手.设二元一次方程组为

$$(1)\qquad \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

以 $b_2$ 乘第一个方程,$b_1$ 乘第二个方程,然后由第一个方程减去第二个方程,得

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1.$$

同法消去 $x$,得

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1.$$

当 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 时，方程组的解为

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},$$

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

为了便于记忆，我们把 $a_1b_2-a_2b_1$ 记作

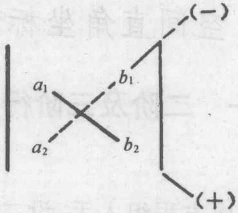
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1.$$

这就叫二阶行列式 $a_1$、$b_1$、$a_2$、$b_2$ 叫做行列式的元素，行列式中横排叫做行，纵排叫做列，二阶行列式含有两行两列.

二阶行列式的值是两项的代数和.这两项可以按下图所示来记忆：一项是实线上的两个元素的乘积，取正号；另一项是虚线上的两个元素的乘积，取负号.




例如，行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}=1\times 2-(-2)\times 3=8,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 13 \end{vmatrix}=2\times 13-0\times(-1)=26,$$

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=c_1b_2-c_2b_1,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1.$$

利用行列式,二元一次方程组的解可以表示成:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

分母中的行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$是由方程组(1)中 $x$、$y$ 的系数按原来次序排列成的,称为方程组的系数行列式,记为 $D$.

行列式$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$是把系数行列式中 $x$ 的系数$a_1$、$a_2$ 换成方程组(1)右端的常数项 $c_1$、$c_2$ 而成的行列式,记为 $D_x$.

行列式$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$是把系数行列式中 $y$ 的系数$b_1$、$b_2$ 换成常数项 $c_1$、$c_2$ 而成的行列式,记为 $D_y$.

所以,二元一次方程组(1)的解又可表示为:

$$x=\frac{D_x}{D}, \quad y=\frac{D_y}{D}(\text{其中 } D\neq 0). \tag{8.1.1}$$

**例 1** 解方程组

$$\begin{cases} 2x+3y-7=0, \\ 5x-4y-6=0. \end{cases}$$

**解** 原方程组即为

$$\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 5x-4y=6. \end{cases}$$

因为$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}=-23$,$D_x=\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}=-46$,$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=-23$,所以

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-46}{-23}=2,$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-23}{-23}=1.$$

**2. 三阶行列式**

同样,从解三元一次方程组中引入三阶行列式.

设三元一次方程组为

$$(2)\quad\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3.\end{cases}$$

用消元法可得到

$$(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3)x$$
$$=d_1b_2c_3+d_2b_3c_1+d_3b_1c_2-d_3b_2c_1-d_1b_3c_2-d_2b_1c_3.$$

为了便于记忆,我们把上式中 $x$ 的系数记作

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix},$$

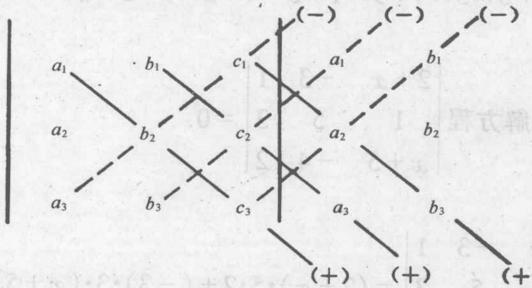
即

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2$$
$$-a_2b_1c_3.$$

这就是三阶行列式.其中 $a_i,b_i,c_i(i=1,2,3)$称为行列式的元素,横排称为行,纵排称为列.

三阶行列式的计算可依下表进行:实线上三个元素的连乘积取正号,虚线上三个元素的连乘积取负号.

即



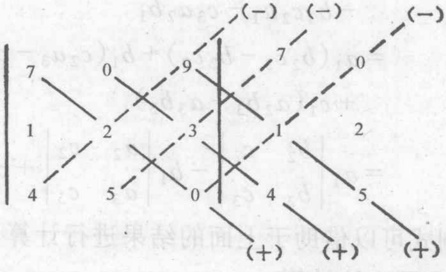

这样，三元一次方程组的解，可用三阶行列式表示，当 $D\neq 0$ 时，

$$x=\frac{D_x}{D},\quad y=\frac{D_y}{D},\quad z=\frac{D_z}{D}.\tag{8.1.2}$$

其中 $D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$ 称为方程组的系数行列式，$D_x$、$D_y$ 和 $D_z$ 是系数行列式中 $x$、$y$ 和 $z$ 的系数依次分别换成方程组(2)右端的常数项而成的行列式.

**例 2** 计算行列式 $\begin{vmatrix}7 & 0 & 9\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 0\end{vmatrix}$ 的值.

**解**



$$=7\times2\times0+0\times3\times4+9\times1\times5-4\times2\times9-5\times3\times7-0\times1\times0$$
$$=-132.$$

**例 3** 解方程 $\begin{vmatrix} 2+x & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ x+5 & -4 & 2 \end{vmatrix}=0.$

**解**

$$\begin{vmatrix} 2+x & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ x+5 & -4 & 2 \end{vmatrix}=(2+x)\cdot5\cdot2+(-3)\cdot3\cdot(x+5)$$
$$+1\cdot1\cdot(-4)-(x+5)\cdot5\cdot1-(-4)\cdot3$$
$$\cdot(2+x)-2\cdot1\cdot(-3)$$
$$=8x-24.$$

所以原方程为

$$8x-24=0,$$

解之,得

$$x=3.$$

根据行列式定义,三阶行列式也可以用二阶行列式表示.其具体表达式如下:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-a_3b_2c_1$$
$$-b_3c_2a_1-c_3a_2b_1$$
$$=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)$$
$$+c_1(a_2b_3-a_3b_2)$$
$$=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

因此,三阶行列式可以借助于上面的结果进行计算.例如,例 2 中的行列式可按如下方法计算:

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 7\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 9\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 7\cdot(-15) + 9\cdot(-3) = -132.$$

这与前面计算的结果是相同的.

## 二　空间直角坐标系

### 1. 空间直角坐标系

过空间定点 $O$ 作三条互相垂直的数轴，它们都以 $O$ 为原点，并且通常取相同的长度单位. 这三条数轴分别称为 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴. 各轴正向之间的顺序通常按下述法则确定：以右手握住 $z$ 轴，让右手的四指从 $x$ 轴的正向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 $y$ 轴的正向，这时大姆指所指的方向就是 $z$ 轴的正向. 这个法则叫做右手法则（图 8－1）. 这样就组成了空间直角坐标系. $O$ 称为坐标原点，每两条坐标轴确定的平面称为坐标平面，简称为坐标面. $x$ 轴与 $y$ 轴所确定的

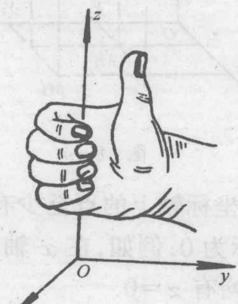



图　8－1

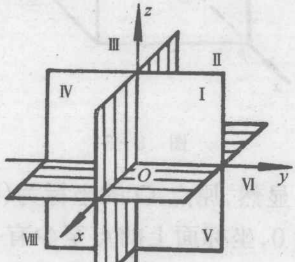



图　8－2

坐标面称为 $xy$ 坐标面. 类似地有 $yz$ 坐标面、$zx$ 坐标面. 这些坐标面把空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限（图 8－2）. $x$、$y$、$z$ 轴的正半轴的卦限称为第Ⅰ卦限，从第Ⅰ卦限开始，从 $Oz$ 轴的正向向

下看，按逆时针方向，先后出现的卦限依次称为第Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限；第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限下面的空间部分依次称为第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限.

设 $M$ 为空间的一点，若过点 $M$ 分别作垂直于三坐标轴的平面，与三坐标轴分别相交于 $P$、$Q$、$R$ 三点，且这三点在 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴上的坐标依次为 $x$、$y$、$z$，则点 $M$ 唯一地确定了一组有序数组 $x$、$y$ 和 $z$. 反之，设给定一组有序数组 $x$、$y$ 和 $z$，且它们分别在 $x$ 轴、$y$ 轴和 $z$ 轴上依次对应于 $P$、$Q$ 和 $R$ 点，若过 $P$、$Q$ 和 $R$ 点分别作平面垂直于所在坐标轴，则这三张平面确定了唯一的交点 $M$. 这样，空间的点就与一组有序数组 $x$、$y$、$z$ 之间建立了一一对应关系(图 8－3). 有序数组 $x$、$y$、$z$ 就称为点 $M$ 的坐标，记为 $M(x,y,z)$，它们分别称为 $x$ 坐标、$y$ 坐标和 $z$ 坐标.

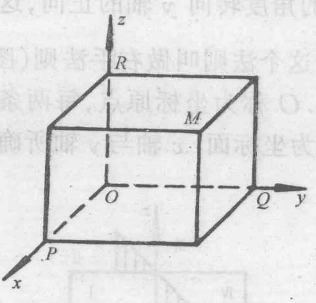


图 8－3

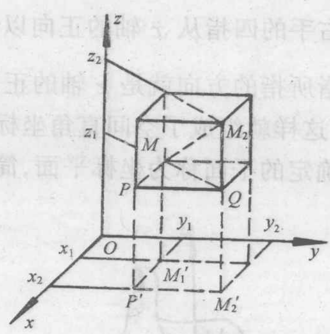


图 8－4

显然，原点 $O$ 的坐标为(0,0,0)，坐标轴上的点至少有两个坐标为 0，坐标面上的点至少有一个坐标为 0. 例如，在 $x$ 轴上的点，均有 $y=z=0$；在 $xy$ 坐标面上的点，均有 $z=0$.

**2. 两点间的距离公式**

设空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$，求它们之间的距离 $d=|M_1M_2|$. 过点 $M_1$、$M_2$ 各作三张平面分别垂直于三个坐标轴，形成如图 8－4 所示的长方体. 易知

$$d^2=|M_1M_2|^2$$

$$=|M_1Q|^2+|QM_2|^2(\triangle M_1QM_2 \text{ 是直角三角形})$$
$$=|M_1P|^2+|PQ|^2+|QM_2|^2(\triangle M_1PQ \text{ 是直角三角形})$$
$$=|M'_1P'|^2+|P'M'_2|^2+|QM_2|^2$$
$$=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,$$

所以

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \quad (8.1.3)$$

特别地，点 $M(x,y,z)$与原点 $O(0,0,0)$的距离

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \quad (8.1.4)$$

**例 4**　已知 $A(-3,2,1)$，$B(0,2,5)$. 求$\triangle AOB$ 的周长.

**解**　由公式(8.1.3)可得

$$|AB|=\sqrt{(-3-0)^2+(2-2)^2+(1-5)^2}=5,$$

由公式(8.1.4)可得

$$|AO|=\sqrt{(-3)^2+2^2+1^2}=\sqrt{14},$$

$$|BO|=\sqrt{0^2+2^2+5^2}=\sqrt{29}.$$

所以，$\triangle AOB$ 的周长

$$l=|AB|+|AO|+|BO|=5+\sqrt{14}+\sqrt{29}\approx 14.$$

## 习　题　8-1

计算 1—4 题行列式的值.

1. $\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$　　2. $\begin{vmatrix} 4a-5b & 2b \\ -6a & -3b \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 15 & 12 & 3 \\ 20 & 32 & 12 \end{vmatrix}$　　4. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

利用行列式解 5—8 题中的方程组.

5. $\begin{cases} 3x-y=3, \\ x+2y=8 \end{cases}$　　6. $\begin{cases} 2x-y-10=0, \\ x+3y-5=0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+2y+z=0, \\ 2x-y+z=1, \\ x-y+2z=3 \end{cases}$　　8. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ 2x-y-z=1, \\ x-y+z=2. \end{cases}$