21世纪高职高专通用教材

实用微积分

主编　蔡奎生

苏州大学出版社

21 世纪高职高专通用教材

实 用 微 积 分

主编　蔡奎生

苏 州 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

实用微积分/蔡奎生主编．—苏州：苏州大学出版社，2008.6
21世纪高职高专通用教材
ISBN 978-7-81137-059-1

Ⅰ．实…　Ⅱ．蔡…　Ⅲ．微积分-高等学校：技术学校-教材　Ⅳ．O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第076793号

内容提要

本书是编者根据多年的教学实践，为适应新形势下高职高专高等数学的教学需要而编写的．考虑到高职高专院校学生的实际，适当降低了某些问题的理论深度，更加注重有实际应用背景的概念、方法和实例的介绍．

全书共四章，主要内容为：函数、极限与连续，导数和微分，导数的应用，积分及其应用．本书将不定积分和定积分统称为积分这一概念，并且将积分的定义直接和微分联系，而将不定积分的一些相关内容作为寻求原函数的技术方法或技巧来处理．

实用微积分

蔡奎生　主编

责任编辑　李　娟

苏州大学出版社出版发行

（地址：苏州市干将东路200号　邮编：215021）

常熟高专印刷有限公司印装

（地址：常熟市元和路98号　邮编：215500）

开本 787×960　1/16　印张 11.75　字数 199千

2008年6月第1版　2008年6月第1次印刷

ISBN 978-7-81137-059-1　定价：19.50元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换

苏州大学出版社营销部　电话：0512-67258835

《实用微积分》编委会名单

顾　问　林　群

主　编　蔡奎生

副主编　杜秀清　李鹏祥

编　委　（按姓氏笔画）

许淑臣　杜秀清　李鹏祥　顾霞芳

殷建峰　蔡奎生　潘　新

编写说明

2007年4月召开了华东地区高等院校大学数学教学改革与“质量工程”学术研讨会，会上各位专家教授对新形势下高等数学的教学与改革作了精彩的演讲，与会同仁进行了广泛的交流.综合会上的意见并结合当前高职高专学校对于高等数学的要求，我们联合各兄弟院校共同编写了本书.

在编写过程中，我们力求内容简单实用，对过去一些传统的观念进行了力度较大的改革；力求简化理论的叙述、推导和证明；力求直观，注重实际应用；尤其是力求将微分和积分作为一个整体有机地结合起来，少走弯路.本书将不定积分和定积分统称为积分这一概念，并且将积分的定义直接和微分联系，而将不定积分的一些相关内容作为寻求原函数的技术方法或技巧来处理.

在编写过程中，我们本着“必需、够用”的原则，对于必备的基础理论知识等方面的内容，主要给出概念的定义.有关定理的条件和结论，一般不做出严格的推导和证明，只在必要时，给出直观而形象的解释和说明.我们将重点放在实际计算和应用方面，以强化学生解决实际问题的能力.

本书的主要内容为：函数、极限与连续，导数和微分，导数的应用，积分及其应用.另外，每节配备了一定量的习题，每章配备了小结和自测题.书后对于上述题目给出了答案或提示，以便于学生及时对所学知识进行检验.

参加本书编写的人员有：苏州经贸职业技术学院的蔡奎生、李鹏祥、殷建峰、顾霞芳、许淑臣、潘新，南京正德职业技术学院的杜秀清，由蔡奎生负责统稿.魏彦睿对本书进行了校对和整理.

在本书的策划、编写过程中，中国科学院林群院士给予了大力的关心和支持.另外，苏州大学出版社对本教材的出版和发行，给予了很多帮助.在此，我们表示衷心的感谢！由于时间紧迫，加之编者的水平所限，错误和不当之处在所难免，还望各位同行、专家多加批评和指正.

《实用微积分》编写组

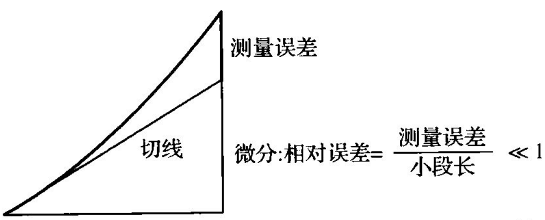
2008年5月

代 序

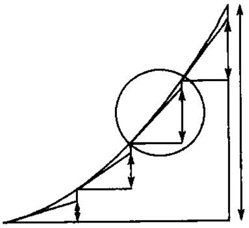
今悉蔡奎生老师等为高职生编写《实用微积分》教材，这是一个重要举动. 如果高职生也能掌握微积分的精神和方法，那么对社会进步和科技发展都会起到推动作用.

我粗读了全书章节，觉得本书的特点是：一方面对微积分的内容保持了系统性，能够讲的都讲了；另一方面对微积分的定理只在必要时才给出证明. 对那些直观性明显而证明又极其困难的定理，则采取承认的态度，这非常适合于高职生的学习，因此我愿推荐它.

华罗庚先生说过，读书先由薄到厚，教师要一页一页地教，同学要一页一页地学(所谓“由微分到积分”)，这是学习的必经过程. 但是他又说，当你完全消化之后，则要由厚到薄：一本厚书可能只剩下几句. 这里我愿写下伏笔，即同学学完这本书后必须记住的几句：微积分就是微分和积分，以及它们之间的联系——牛顿-莱布尼茨公式. 这里微分就是把曲线小段的高用起点处切线的高来测量，由此产生的测量误差是如此之小，以至于它和曲线小段的长相比(称为相对误差)也是很小的. 见下图：



积分就是把曲线全段的高用曲线各小段上微分(即小段的切线高)的总和来测量，由此产生的总测量误差等于相对误差的平均值，如果后者也很小，总高便是微分的积分. 所以，微积分剩下两句：在曲线小段上微分的相对误差很小. 在曲线全段上求和的总测量误差不过是相对误差的平均. 见下图：



如果微积分还要加上泰勒展开式，那么后者也不过是基本定理的重复，无需另加证明. 这就是我献给同学的，对微积分所作的准确、严格、完全的三句描述. 这里无需数学符号、技巧和中间环节，再简短没有了. 但是，这几句仅仅描出微积分的骨骼，它的生命力、血与肉，在于应用和练习，这需要同学自己参与. 有人说数学像游泳，靠教练不够，还要自己下水. 希望同学们能喜欢这本书.

林 群

中科院数学与系统科学研究院

2008 年 3 月 5 日

目录

第一章　函数、极限与连续

第二章　导数和微分

第一章

函数、极限与连续

函数是高等数学的主要研究对象，函数极限是高等数学的重要理论基础，函数的连续性是函数的重要性质形态之一．本章将在复习和加深函数相关知识的基础上，学习函数的极限、连续及其有关性质，为后续内容的学习奠定基础．

§1—1　初等函数

一、函数的概念

1．函数的定义

定义1　设D是一非空实数集，如果存在一个对应法则f，使得对D内的每一个值x，按法则f，都有唯一的实数y与之对应，则这个对应法则f称为定义在集合D上的一个函数，记作

$$y=f(x),x\in D.$$

其中x称为**自变量**，y称为**因变量**或**函数值**，D称为**定义域**，集合$\{y|y=f(x),x\in D\}$称为**值域**.

说明　(1)构成函数的两要素是定义域D及对应法则f．如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的.

(2)函数的表示方法主要有三种：表格法（列表法）、图形法（图象法）、解析法（公式法）.

2. 几个特殊的函数

(1) 分段函数　在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数.

分段函数的定义域是各段定义区间的并集.

例如，$y=\begin{cases}3x+2, & 0<x<3, \\ x^2-1, & -2<x\leqslant 0.\end{cases}$

(2) 隐函数　变量之间的关系是由一个方程来确定的函数. 例如，由方程 $x^2+y^2=1$ 确定的函数.

(3) 参数方程所确定的函数　$\begin{cases}x=\varphi(t), \\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，其中 t 为参数.

3. 函数的定义域

在实际问题中，函数的定义域要根据实际问题的实际意义确定. 当不考虑函数的实际意义时，其定义域就是使得函数表达式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为函数的自然定义域. 在这种约定之下，一般的用算式表达的函数可简记为 $y=f(x)$.

常见解析式的定义域求法有：

(1) 分母不能为零；

(2) 偶次根号下非负；

(3) 对数式中的真数恒为正；

(4) 分段函数的定义域应取各分段区间定义域的并集.

例 1　求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x-2}-\sqrt{x^2-1}$；　　(2) $y=\lg\dfrac{x-1}{2}+\sqrt{x-3}$；

(3) $y=\begin{cases}\sin x, & -1\leqslant x<2, \\ \cos x, & 2\leqslant x<3.\end{cases}$

解　(1) 要使函数有意义，必须 $x-2\neq 0$，且 $x^2-1\geqslant 0$，解不等式得 $|x|\geqslant 1$. 所以函数的定义域为

$$\{x\,|\,|x|\geqslant 1 \text{ 且 } x\neq 2\} \text{或} (-\infty,-1]\cup[1,2)\cup(2,+\infty).$$

(2) 要使函数有意义，必须 $\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}>0, \\ x-3\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $x\geqslant 3$.

所以函数的定义域为 $\{x\,|\,x\geqslant 3\}$ 或 $[3,+\infty)$.

(3) 函数的定义域为 $[-1,2)\cup[2,3)=[-1,3)$.

二、初等函数

1. 基本初等函数

常数函数：$y=c$（c 为常数）；

幂函数：$y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$；

指数函数：$y=a^{x}(a>0$ 且 $a\neq 1)$；

对数函数：$y=\log_{a}x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）；

三角函数：$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$；

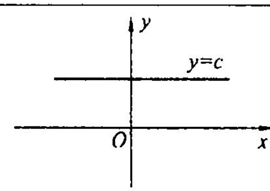
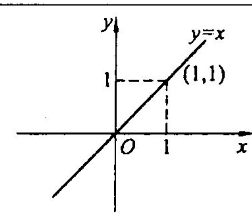
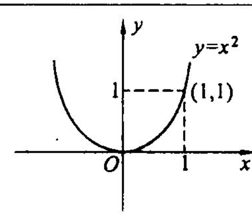
反三角函数：$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

以上 6 类函数统称为基本初等函数.

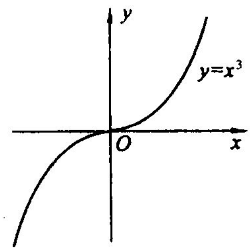
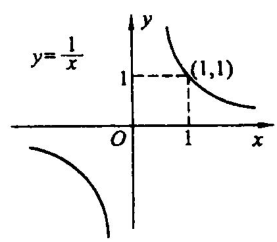
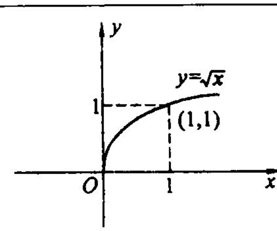
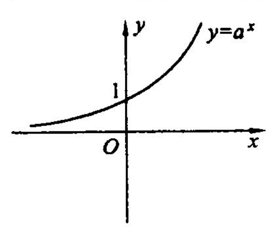
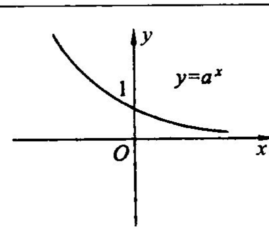
为了方便，我们通常把多项式 $y=a_{n}x^{n}+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{1}x+a_{0}$ 也看作基本初等函数.

现将一些常用的基本初等函数的定义域、值域和函数特性列表说明如下：

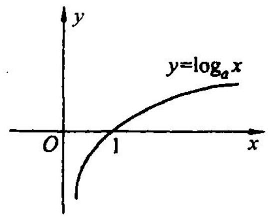
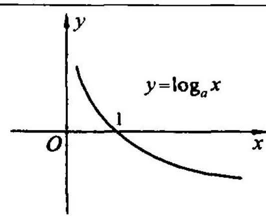
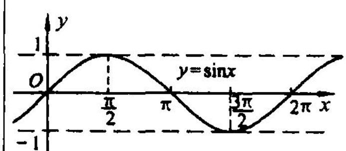
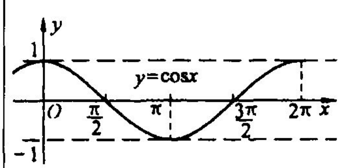
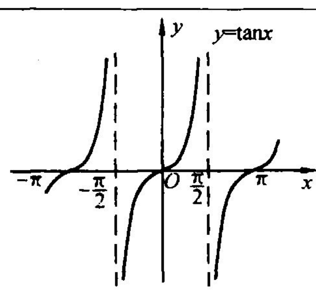
表 1　基本初等函数

<table>
<tr><th>函数类型</th><th>函数</th><th>定义域与值域</th><th>图　象</th><th>特　性</th></tr>
<tr><td>常数函数</td><td>$y=c$</td><td>$x\in(-\infty,+\infty)$
$y\in\{c\}$</td><td>
</td><td>偶函数
有界</td></tr>
<tr><td rowspan="2">幂函数</td><td>$y=x$</td><td>$x\in(-\infty,+\infty)$
$y\in(-\infty,+\infty)$</td><td>
</td><td>奇函数
单调增加</td></tr>
<tr><td>$y=x^{2}$</td><td>$x\in(-\infty,+\infty)$
$y\in[0,+\infty)$</td><td>
</td><td>偶函数
在$(0,+\infty)$内单调增加；在$(-\infty,0)$内单调减少</td></tr>
</table>

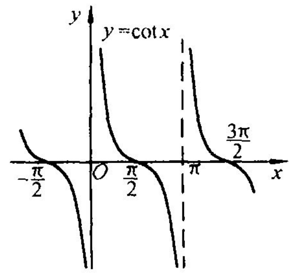
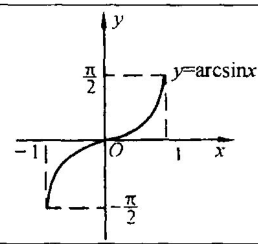
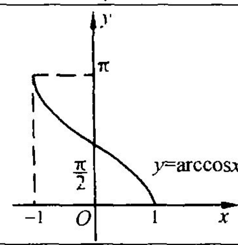
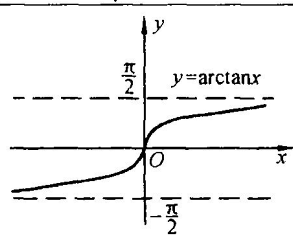
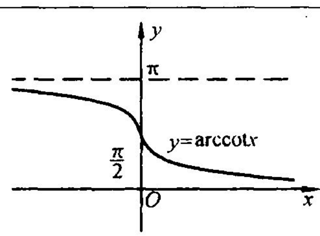
续表

函数类型	函数	定义域与值域	图　　象	特　　性
幂函数	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=\dfrac{1}{x}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 在$(-\infty,0)$内单调减少;在$(0,+\infty)$内单调减少
	$y=\sqrt{x}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少

续表

函数类型	函数	定义域与值域	图　　象	特　　性
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		在$\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$上单调增加； 在$\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$上单调减少$(k\in\mathbf{Z})$ 奇函数
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		在$(2k\pi,2k\pi+\pi)$上单调减少；在$(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$上单调增加$(k\in\mathbf{Z})$ 偶函数 有界 周期为2π
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		在$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$上单调增加$(k\in\mathbf{Z})$ 奇函数 周期为π

续表

函数类型	函数	定义域与值域	图象	特性
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		在$(k\pi,k\pi+\pi)$上单调减少$(k\in\mathbf{Z})$ 奇函数 周期为π
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		单调增加 奇函数 有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少 有界
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		单调增加 奇函数 有界
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少 有界

2. 复合函数

先看这么一个例子：考查具有同样高度 h 的圆柱体的体积 V，显然其体积的不同取决于它的底面积 S 的大小，即由公式 $V=Sh$（h 为常数）确定. 而底面积 S 的大小又由底面半径 r 确定，即公式 $S=\pi r^2$. V 是 S 的函数，S 是 r 的函数，V 与 r 之间通过 S 建立了函数关系式 $V=Sh=\pi r^2\cdot h$. 它是由函数 $V=Sh$ 与 $S=\pi r^2$ 复合而成的，简单地说 V 是 r 的复合函数.

定义 2　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域交非空，那么 y 通过中间变量 u 的联系成为 x 的函数，我们把这个函数称为是由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 称为**中间变量**.

注意　并不是任意两个函数都能复合成一个复合函数的. 例如，$y=\arcsin u$，$u=x^2+2$ 就不能复合成一个函数.

同时，学习复合函数有两方面要求：一方面，会把有限个作为中间变量的函数复合成一个函数；另一方面，会把一个复合函数分解为有限个较简单的函数.

分解复合函数时应自外向内逐层分解并把各层函数分解到**基本初等函数经有**限次四则运算所构成的函数为止.

例 2　将 $y=\sin u$，$u=3x^2$ 复合成一个函数.

解　$y=\sin u=\sin 3x^2$.

例 3　将 $y=u^2$，$u=\tan v$，$v=5x$ 复合成一个函数.

解　$y=u^2=\tan^2 v=\tan^2 5x$.

从例 2、例 3 可以看出复合的过程实际上是把中间变量依次代入的过程，而且由例 3 得出中间变量可以不限于一个.

例 4　指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\ln(x^2+3x-10)$；　　(2) $y=\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$.

解　(1) $y=\ln(x^2+3x-10)$ 是由 $y=\ln u$ 和 $u=x^2+3x-10$ 复合而成的.

(2) $y=\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ 是由 $y=\arctan u$，$u=\dfrac{1}{\sqrt{v}}$ 和 $v=x^2+2$ 复合而成的.

例 5　设 $y=f(u)$ 的定义域为 $[0,2]$，求函数 $y=f(\ln x)$ 的定义域.

解　由复合函数的定义域知 $0\leqslant \ln x\leqslant 2$，即 $1\leqslant x\leqslant e^2$，所以所求函数的定义域为 $[1,e^2]$.

3. 初等函数

定义 3　由基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合运算所构成

并可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**，否则称为**非初等函数**.

例如，$y=\sqrt{1-x^2}+\sin^2 x$，$y=\dfrac{\tan x}{1+x^3}$，$y=\lg(3x-\sqrt{e^x}+1)$等都是初等函数，而大部分分段函数是非初等函数.

4. 平面上点的邻域

为了讨论函数在一点附近的某些形态，在此我们引入邻域的概念.

定义 4 设 $x_0,\delta\in\mathbf{R},\delta>0$，集合$\{x\in\mathbf{R}\,|\,|x-x_0|<\delta\}$，即数轴上到点 x_0 的距离小于 δ 的点的全体，称为点 x_0 的 δ **邻域**，记为 $U(x_0,\delta)$. 点 x_0,δ 分别称为该邻域的**中心和半径**，集合$\{x\in\mathbf{R}\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$称为点 x_0 的 δ **空心邻域**，记为$\mathring{U}(x_0,\delta)$.

说明 点 x_0的某邻域是指以 x_0 为中心，以任意小的正数为半径的邻域，记为 $U(x_0)$；点 x_0 的某空心邻域是指以 x_0 为中心，以任意小的正数为半径的空心邻域，记为$\mathring{U}(x_0)$.

习题 1—1（A）

1. 判断下列说法是否正确：

(1) 复合函数 $y=f[\varphi(x)]$的定义域即为 $u=\varphi(x)$的定义域；

(2) 函数 $y=\lg x^2$与函数 $y=2\lg x$ 相同；

(3) $y=\ln u,u=-x^2-1$ 这两个函数可以复合成一个函数 $y=\ln(-x^2-1)$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}+\lg(x-2)$；　　(2) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$；

(3) $y=\begin{cases}x-1, & 1<x<3,\\ 3x, & 3\leqslant x<6.\end{cases}$

3. 下列函数中，哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些是既非奇函数又非偶函数？

(1) $y=x^2+\cos x$；　　(2) $y=x^5-\sin x$；

(3) $y=\sqrt{x}$；　　(4) $y=x^3\tan x+[f(x)+f(-x)]$.

4. 求由所给函数复合而成的函数：

(1) $y=\ln u$，$u=2x-1$；　　(2) $y=\tan u,u=v^2,v=x+3$.