21世纪高职高专规划教材·公共基础系列

高等数学

GAODENG SHUXUE

（修订本）

龚晓岚 李毅夫 主编

何金敏 曲 峰 于 萍 副主编

$$y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

清华大学出版社
http://www.tup.com.cn

北京交通大学出版社
http://press.bjtu.edu.cn

21世纪高职高专规划教材·公共基础系列

高等数学

（修订本）

主　编　龚晓岚　李毅夫
副主编　何金敏　曲　峰　于　萍

清华大学出版社
北京交通大学出版社
·北京·

内容简介

本书是作者近年来在进行“高等数学”课程教学改革与实践中，以培养应用型人才为目的，从打好基础、培养能力、兼顾后续课程需要出发，吸收国内外教材的优点，为适应我国各类高等职业教育而编写的。书中精选了高职高专工科各专业必要的高等数学知识。全书共分10章，内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、定积分在几何上的应用、微分方程、无穷级数、多元函数微分学和数学实验。

本书可作为高等（专科）职业学校“高等数学”教材，也可作为职工大学、函授、网络教育及培训班的教材。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/龚晓岚主编. —修订本. —北京：清华大学出版社；北京交通大学出版社，2008.8

（21世纪高职高专规划教材·公共基础系列）

ISBN 978－7－81082－230－5

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 龚…　Ⅲ. 高等数学-高等学校：技术学校-教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第106656号

策划编辑：韩　乐
责任编辑：郭东青
出版发行：清 华 大 学 出 版 社　　邮编：100084　　电话：010－62776969
　　　　　北京交通大学出版社　　邮编：100044　　电话：010－51686414
印 刷 者：北京东光印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×260　　印张：17.25　　字数：431千字
版　　次：2008年8月第1版第1次修订　　2008年8月第4次印刷
书　　号：ISBN 978－7－81082－230－5/O·14
印　　数：1 0001～14 000册　　定价：28.00元

本书如有质量问题，请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评，我们表示欢迎和感谢。
投诉电话：010－51686043，51686008；传真：010－62225406；E-mail：press@bjtu.edu.cn。

21 世纪高职高专规划教材
编审委员会成员名单

出版说明

高职高专教育是我国高等教育的重要组成部分，它的根本任务是培养生产、建设、管理和服务第一线需要的德、智、体、美全面发展的高等技术应用型专业人才，所培养的学生在掌握必要的基础理论和专业知识的基础上，应重点掌握从事本专业领域实际工作的基本知识和职业技能，因而与其对应的教材也必须有自己的体系和特色。

为了适应我国高职高专教育发展及其对教学改革和教材建设的需要，在教育部的指导下，我们在全国范围内组织并成立了“21 世纪高职高专教育教材研究与编审委员会”（以下简称“教材研究与编审委员会”）。“教材研究与编审委员会”的成员单位皆为教学改革成效较大、办学特色鲜明、办学实力强的高等专科学校、高等职业学校、成人高等学校及高等院校主办的二级职业技术学院，其中一些学校是国家重点建设的示范性职业技术学院。

为了保证规划教材的出版质量，“教材研究与编审委员会”在全国范围内选聘“21 世纪高职高专规划教材编审委员会”（以下简称“教材编审委员会”）成员和征集教材，并要求“教材编审委员会”成员和规划教材的编著者必须是从事高职高专教学第一线的优秀教师或生产第一线的专家。“教材编审委员会”组织各专业的专家、教授对所征集的教材进行评选，对所列选教材进行审定。

目前，“教材研究与编审委员会”计划用 2～3 年的时间出版各类高职高专教材 200 种，范围覆盖计算机应用、电子电气、财会与管理、商务英语等专业的主要课程。此次规划教材全部按教育部制定的“高职高专教育基础课程教学基本要求”编写，其中部分教材是教育部《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》的研究成果。此次规划教材编写按照突出应用性、实践性和针对性的原则编写并重组系列课程教材结构，力求反映高职高专课程和教学内容体系改革方向；反映当前教学的新内容，突出基础理论知识的应用和实践技能的培养；适应“实践的要求和岗位的需要”，不依照“学科”体系，即贴近岗位群，淡化学科；在兼顾理论和实践内容的同时，避免“全”而“深”的面面俱到，基础理论以应用为目的，以必要、够用为度；尽量体现新知识、新技术、新工艺、新方法，以利于学生综合素质的形成和科学思维方式与创新能力的培养。

此外，为了使规划教材更具广泛性、科学性、先进性和代表性，我们希望全国从事高职高专教育的院校能够积极加入到“教材研究与编审委员会”中来，推荐“教材编审委员会”成员和有特色、有创新的教材。同时，希望将教学实践中的意见与建议及时反馈给我们，以便对已出版的教材不断修订、完善，不断提高教材质量，完善教材体系，为社会奉献更多更新的与高职高专教育配套的高质量教材。

此次所有规划教材由全国重点大学出版社——清华大学出版社与北京交通大学出版社联合出版。适合于各类高等专科学校、高等职业学校、成人高等学校及高等院校主办的二级职业技术学院使用。

21 世纪高职高专教育教材研究与编审委员会

2003 年 9 月

前　　言

高职高专教育是我国高等教育的重要组成部分，它的根本任务是培养生产、建设、管理和服务第一线需要的德、智、体、美全面发展的高等技术应用型专门人才，所培养的学生在掌握必要的基础理论和专业知识的基础上，应重点掌握从事本专业领域实际工作的基本知识和职业技能，因此与其对应的教材也必须有自己的体系和特色。

目前，真正既能满足高职高专对数学知识“实用性”的要求，又能培养学生创新精神、创新意识和创新能力，使学生具有可持续发展、适应未来工作职位要求的教材还不多。相当部分教材受传统教材编排的影响都过于注重理论、运算技巧之类的知识，对数学多方面的应用介绍很少。学生通过教材看到的是一大堆的数学符号，看不到实际应用的案例，自然会感到学了数学没用，对数学的学习失去动力。

21 世纪是知识经济时代，为配合产业技术的提升和社会经济的迅速发展，适应高职高专教育和要求，我们编写了这本《高等数学》。本教材借鉴数学建模在提高学生综合能力和素质方面的成功经验，以培养应用型人才为目标，将数学基本知识、数学建模和数学实验有机融合，主要有以下几个特点。

1. 立足高职特色。根据高职高专理工类各专业对数学的基本要求，贯彻“理解概念、强化应用”的教学原则，强化基本知识、基本思想，突出本质。本书特别注意与实际应用联系较多的基础知识、基本方法和基本技能的训练，不追求过分复杂的计算和变换。

2. 编写方式独特新颖。由问题引出数学知识，然后将数学知识应用于处理各种生活和工程实际问题，用实例和示例加深对概念、方法的理解。这样，让数学来源于生活，又反作用于生活。同时，采用清晰、直观的表现风格，提高了教材的“亲和力”。

3. 舍弃繁难的证明，但又不缺乏系统性、连贯性。

4. 本书语言朴实、流畅，可读性强。

本书由龚晓岚、李毅夫任主编，何金敏、曲峰、于萍任副主编。具体分工如下：第 1 章由张宇、李毅夫编写，第 2 章由龚晓岚、于萍编写，第 3 章由何金敏编写，第 4 章由龚晓岚编写，第 5 章、第 6 章由胡柏新、陈颖编写，第 7 章由何金敏编写，第 9 章由李毅夫、陈培、张煜编写，第 8 章、第 10 章由曲峰编写。全书由龚晓岚任主编并统稿、定稿。

编者深知，本教材的编写实属在教改大潮中的一种探索，意在抛砖引玉。由于能力、水平所限，加之时间仓促，本教材的编写必有不足之处，欢迎提出宝贵意见。

编者

2008 年 8 月

目　录

第 1 章　函数与极限

函数的概念是高等数学中最重要的基本概念。所谓函数就是变量之间的对应关系，它是高等数学研究的对象。极限方法则是研究变量的一种基本方法，它是通过对变量在不同条件下变化趋势的研究，以解决初等数学所不能解决的问题。高等数学中的许多基本概念，如连续、导数、定积分、广义积分、曲线积分、无穷级数等，都是具有特定意义下的极限。本章将学习函数、极限、函数的连续性等高等数学的一些最基本的内容。

1.1　函数

1.1.1　集合

集合概念是数学中的一个原始概念，我们把具有某种特定性质的一些事物的总体叫**集合**(SET)，其中组成这个集合的事物称为该集合的"元素"（ELEMENT）。一般用大写字母 A，B，C，…表示集合，用小写字母 a，b，c，…表示集合中的元素。若 a 是集合 M 中的元素，则称 a 属于 M，记为 $a \in M$。

一个集合，若它含有有限个元素，称为**有限集**；含有无限个元素的集合，称为**无限集**。不含任何元素的集合称为**空集**（VOID），记作 $\varnothing$。

可以用列举所有元素的方法来表示集合，例如，方程 $x^2-5x+6=0$ 解的集合为 $A=\{2，3\}$；也可以把所含元素的共同特性用描述性语言或数学表达式表示，例如，$M=\{(x,y) \mid x,y \in \mathbf{R}, x^2+y^2=1\}$。

我们常见的数集有：全体自然数的集合记作 **N**、全体整数的集合记作 **Z**、全体有理数的集合记作 **Q**，全体实数的集合记作 **R**。

若 $x \in A$，则必有 $x \in B$，就称 A 是 B 的子集，记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$。如果集合 A 与集合 B 互为子集，$A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$。若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A \subsetneq B$。例如，$N \subsetneq Z \subsetneq Q \subsetneq R$。规定空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集。

集合的运算如下。

集合的并：$A \cup B=\{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$

集合的交：$A \cap B=\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$

集合运算满足交换律、结合律、分配律等一系列性质。

1.1.2 区间

区间是在高等数学中经常要用到的一类数集。

有限区间：

设 $a<b$，称数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 为开区间，记为 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}。$$

类似地有

$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，

$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$ 称为半开区间。

其中 a 和 b 称为区间 (a,b)、$[a,b]$、$[a,b)$、$(a,b]$ 的端点，$b-a$ 称为区间的长度。

无限区间：

$$[a,+\infty)=\{x \mid a\leqslant x\},(-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b\},(-\infty,+\infty)=\{x \mid |x|<+\infty\}。$$

注意：∞ 不是数，而是一种处于运动过程的点。$+\infty$ 表示处于沿 x 轴正方向无限运动过程的点，$-\infty$ 表示处于沿 x 轴负方向无限运动过程的点，而 ∞ 表示 $\pm\infty$。

1.1.3 邻域

高等数学中，经常要用到邻域的概念。

以点 a 为中心的任何开区间，称为点 a 的**邻域**，记作 $U(a)$。

设 δ 是正数，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域，这个邻域称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即 $U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$。

有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉，点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的**去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$，这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$。

1.1.4 函数的概念

1. 常量与变量

在研究过程中保持一定数值的量称为**常量**，而在研究过程中可以取不同的数值的量称为**变量**。常量与变量是相对的；在这个过程中的常量可能就是另一个过程中的变量，常量也可以理解成不变的变量。

例如，圆的面积 A 与半径 r 的关系可表示为 $A=\pi\cdot r^2$，其中 π 是圆周率，是常量；当半径 r 变化时，面积 A 也随之变化，所以面积 A 和半径 r 是变量。

2. 函数的定义

定义 1-1 设 x 和 y 是两个变量，D 是给定的一个数集。如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和变量 x 对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$。其中，给定的数集 D 叫做函数 $y=f(x)$ 的**定义域**，x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**。因变量 y 的取值范围

$$W=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$$

叫做函数的**值域**。

函数定义中只要求“有确定的数值与变量 x 对应”，并没有要求“有唯一的值与 x 对应”，因此对于自变量 x 取定的一个值，y 可以有一个也可以有多个值与之对应；在前一种情况下称 y 为**单值函数**，在后一种情况下称 y 为**多值函数**。除特别声明外，我们今后所说的函数都是指单值函数。

例如，$x^2+y^2=1$ 确定了一个从 x 到 y 的多值函数。

例 1-1 函数

$$y=x^2$$

其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=[0,+\infty)$。如图 1-1 所示。

例 1-2 函数

$$y=x^3$$

其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=(-\infty,+\infty)$。如图 1-2 所示。

例 1-3 函数

$$y=\frac{1}{x}$$

其定义域 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，值域 $W=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$。如图 1-3 所示。

例 1-4 函数

$$y=3$$

其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{3\}$。如图 1-4 所示。

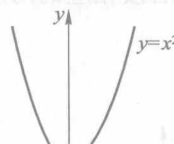

图 1-1

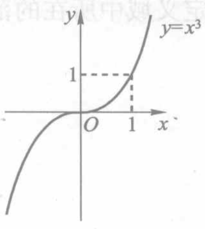

图 1-2

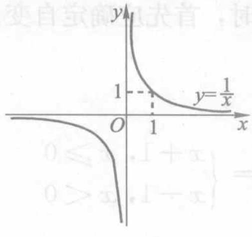

图 1-3

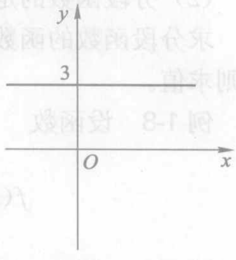

图 1-4

例 1-5 已知函数 $f(x-2)=x+1$，求 $f\left(\frac{1}{x}\right)$。

解 $\because f(x-2)=x+1=(x-2)+3$

$\therefore f(x)=x+3$

$\therefore f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+3$

例 1-6 已知函数 $f\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+\frac{1}{x^2}$，求 $f(x)$。

解 $\because f\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+\frac{1}{x^2}=\left(1+\frac{1}{x}\right)^2-\frac{2}{x}=\left(1+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(1+\frac{1}{x}\right)+2$

$\therefore f(x)=x^2-2x+2$

3. 函数的三要素

函数的概念由定义域、值域和对应法则“三要素”构成，其中定义域是基础，对应法则是核心，值域是由定义域和对应法则决定的。理解函数的要素要注意以下几点。

(1) 函数的定义域是使函数有意义的自变量的取值范围。例如函数 $y=\sqrt{x}$ 的定义域是 $[0,+\infty)$。

(2) 函数的对应法则可用解析式、表格、图像的形式给出，若给出函数解析式，例如，$y=f(x)=3x-4$，则对应法则 f 表示为对自变量 x 施加以下程序的运算：3 倍再减 4。因此，对应法则 f 可理解为由 x 计算 y 的一种算法。

(3) 函数的值域是定义域内的值通过对应法则求得的值组成的集合。

(4) 两函数相同的充分必要条件是其定义域、对应法则分别相同，而与所用字母无关。例如，$y=\sin x$ 与 $u=\sin v$ 就是相同的函数。

例 1-7 设 $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$，问：它们是否为同一函数？为什么？

答：它们不是同一函数。因为它们的定义域不同：$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$。

4. 分段函数

所谓分段函数，习惯上指在定义域的不同部分，有不同的对应法则的函数。

对它应有以下两点基本认识：

(1) 分段函数是一个函数，不要把它误认为是几个函数；

(2) 分段函数的定义域是各段定义域的并集，值域是各段值域的并集。

求分段函数的函数值时，首先应确定自变量在定义域中所在的范围，然后按相应的对应法则求值。

例 1-8 设函数

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0\\ x-1, & x<0\end{cases}$$

求：$f(-2)$，$f(3)$，$f(0)$。

解 $f(-2)=-2-1=-3$，$f(3)=3+1=4$，$f(0)=0+1=1$。

(1) 绝对值函数

$$y=|x|$$

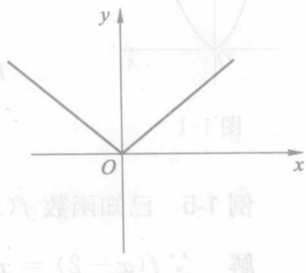

图 1-5

定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=[0,+\infty)$。如图 1-5 所示。

(2) 狄利克雷（Dirichlet，1806—1859）函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{是有理数,}\\0, & x\text{是无理数。}\end{cases}$$

定义域 $D=\mathbf{R}$，值域 $W=\{0,1\}$。

此函数的图形无法画出来，自变量是连续量，而因变量则显然不是连续量。

(3) 符号函数

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\0, & x=0\\-1, & x<0\end{cases}$$

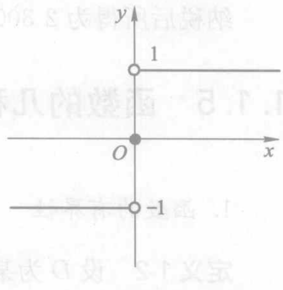

图 1-6

定义域 $D=\mathbf{R}$，值域 $W=\{-1,0,1\}$。

记号 sgn 由拉丁文 signum（符号，正负号）得来，用符号函数确定数字的符号。

绝对值函数可以用它表示为 $|x|=x\operatorname{sgn} x$。如图 1-6 所示。

(4) 取整函数

设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作 $[x]$，称 $y=[x]$ 为取整函数。如图 1-7 所示。

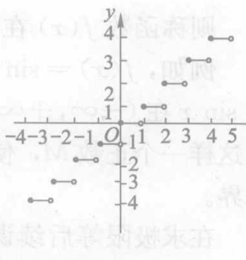

图 1-7

它的定义域为 $D=\mathbf{R}$，值域 $W=Z$。

例 1-9 根据最新修订的《中华人民共和国个人所得税法》规定：个人工资、薪金所得应当缴纳个人所得税。从 2008 年 3 月 1 日起，应纳税所得额的计算为：工资、薪金所得以每月收入额减去 2 000元后的余额（这里未考虑社会保险、医疗保险、住房公积金），每个人纳税税率如表 1-1 所示。

表 1-1

级 数	全月应纳税所得额（超出 2 000 元的数额）	税率（%）
1	不超过 500 元的部分	5
2	超过 500 元到 2 000 元的部分	10
3	超过 2 000 元到 5 000 元的部分	15
4	超过 5 000 元到 20 000 元的部分	20
5	超过 20 000 元到 40 000 元的部分	25
6	超过 40 000 元到 60 000 元的部分	30
7	超过 60 000 元到 80 000 元的部分	35
8	超过 80 000 元到 100 000 元的部分	40
9	超过 100 000 元的部分	45

(1) 试表示前三级的纳税情况。

(2) 若小王 2008 年 9 月的工资收入为 2 300 元，纳税后所得为多少钱?

解 (1) 设工资、薪金所得为 x 元，由表 1-1 可得

$$f(x)=\begin{cases}(x-2\,000)\cdot 5\%, & 2\,000<x\leqslant 2\,500\\ 500\times 5\%+(x-2\,000-500)\cdot 10\%, & 2\,500<x\leqslant 4\,000\\ 500\times 5\%+1\,500\times 10\%+(x-2\,000-2\,000)\cdot 15\%, & 4\,000<x\leqslant 7\,000\end{cases}$$

（2）分析题意知：小王工资收入为 2 300 元纳税属第一级，

纳税额为（2 300－2 000）×5%＝15 元，

纳税后所得为 2 300－15＝2 285 元。

1.1.5 函数的几种特性

1. 函数的有界性

定义 1-2 设 D 为某点集，对于 $x\in D$，函数 $f(x)$ 有定义。如果存在某一正数 M，使得对 $x\in D$，都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 内**有界**。如果找不到这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 D 内**无界**。

例如，$f(x)=\sin x$，由于对 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都有 $|f(x)|=|\sin x|\leqslant 1$，所以 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界。而对于函数 $g(x)=x+1$，对 $x\in(-\infty,+\infty)$，却找不到这样一个正数 M，使得 $|g(x)|=|x+1|\leqslant M$，所以说 $g(x)=x+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界。

在求极限等后续课程中经常要用到函数的有界性，因此，必须记住这两个常用的在 $(-\infty,+\infty)$ 内的有界函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$。

2. 函数的奇偶性

定义 1-3 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对任一 $(-x)\in D$ 恒有：

(1) $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**；

(2) $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**。

注意：讲到函数的奇偶性，容易使人产生误解，以为函数只有奇函数和偶函数两类。其实，还有很大的一类函数，它们既不是奇函数，也不是偶函数；这样的一类函数我们把它们称为**非奇非偶函数**。

例 1-10 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^2+1$；　　(2) $f(x)=x+\sin x$；　　(3) $f(x)=x+1$。

解 (1) $f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x)$，故 $f(x)$ 为偶函数；

(2) $f(-x)=-x+\sin(-x)=-(x+\sin x)=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数；

(3) $f(-x)=-x+1$，$f(-x)$ 既不等于 $-f(x)$ 又不等于 $f(x)$，所以该函数为非奇非偶函数。

函数的奇偶性体现在函数的图形上。奇函数的图形是关于原点对称的，偶函数的图形是关于 y 轴对称的。如图 1-8 所示。