高中数学精编

立体几何

浙江教育出版社

高 中 数 学 精 编

立 体 几 何

钱孝华　丁宗武　江焕棣
陶敏之　谢玉兰　许纪传

浙 江 教 育 出 版 社

(浙)新登字第6号

高中数学精编

立 体 几 何

钱孝华　丁宗武　江焕棣
陶敏之　谢玉兰　许纪传

浙江教育出版社出版　　浙江萧山印刷厂印刷
浙江省新华书店发行
开本787×1092　1/32　印张4.75　字数10.6万
1992年12月第1版　　1996年4月第5次印刷
ISBN 7-5338-1095-3/G·1096　定　价：3.95元

说　明

《高中数学精编》自 1981 年出版以来，先后重版 8 次，深受广大中学生和数学教师的欢迎。此次，我们在广泛听取了读者意见的基础上，本着“实用、方便”的原则和兼顾“会考”、“高考”的要求，对原书进行了修订。

本套书强调基础知识，突出基本技能，重视数学各分科之间的横向联系和综合运用，选题新颖、灵活、典型，知识和技能的覆盖面广，充实丰富了“典型题型与解题技巧”的内容，加强了题型的归纳和解题规律的指导，对“训练题”降低了起点的要求，并使之充分体现与教材同步的特色。

本书分 A，B，C 三组题，以 A 组题、B 组题为主，其中 A 组属基本要求，B 组题略有提高或带有一定的综合，C 组题数量甚少，难度较大，可供学有余力的学生选用。

编　者

1992 年 10 月

目　录

第一章　直线和平面……………………………………………（1）
一、平面、空间两条直线……………………………………（1）
二、空间直线和平面…………………………………………（15）
三、空间两个平面……………………………………………（30）
第二章　多面体和旋转体……………………………………（60）
一、多面体……………………………………………………（60）
二、旋转体……………………………………………………（81）
三、多面体和旋转体的体积…………………………………（100）
答案与提示……………………………………………………（129）

第一章　直线和平面

一、平面、空间两条直线

【典型题型与解题技巧】

1.　公理的作用

(1) 公理 1 的作用是证明点在平面内或者证明直线在平面内.

(2) 公理 2 的作用有三：

① 确定两个平面的交线；

② 证明三点共线；

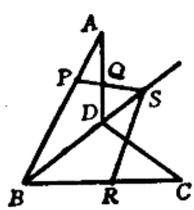
③ 确定直线和平面交点的位置.

(3) 公理 3 的作用有二：

① 作辅助平面；

② 证明两个平面重合.

例 1　如图 1，P，Q，R 分别是空间四边形 $ABCD$ 的边 AB，AD，BC 上的点，且 PQ 与 BD 不平行，试画出平面 PQR 和平面 BCD 的交线.



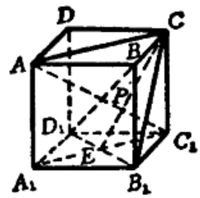
（图 1）

分析：显然，点 R 是平面 PQR 和平面 BCD 的公共点，要确定这两个面的交线，根据公理 2，只要再找到这两个平面的一个公共点就可以了.

略解：由于PQ不平行于BD，因此，延长PQ，BD可得交点，记作S，易证S也是平面PQR和平面BCD的公共点，于是连接SR，则直线SR便是平面PQR与平面BCD的交线.

例 2　如图 2，在正方体(六个面是全等的正方形)$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，画出对角线AC_1和截面CB_1D_1的交点.

分析：设AC_1和截面CB_1D_1交于点P，则$\because P\in AC_1$，$AC_1\subset$对角面AA_1C_1C，$\therefore P\in$对角面AA_1C_1C，即P是平面AA_1C_1C与平面CB_1D_1的公共点，故P必在这两个平面的交线上.



（图 2）

略解：连接AC，连接A_1C_1与B_1D_1交于E点，显然，C，E是对角面AA_1C_1C与截面CB_1D_1的公共点，连接CE，则CE即是这两个面的交线，再连接AC_1，则AC_1与CE的交点即为所求之点P.

注意　(1) 如果两相交平面有两个公共点，那么连接这两点的直线就是它们的交线；

(2) 如果两相交平面有三个公共点，那么这三点共线（在两平面的交线上）；

(3) 如果两个平面相交，那么一个平面内的直线和另一个平面的交点，必在两个平面的交线上.

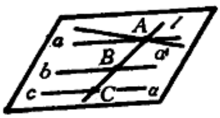
例 3　如果一条直线和三条平行直线都相交，求证这四条直线在一个平面内.

已知：$a\parallel b\parallel c$，l与a，b，c分别交于点A，B，C.

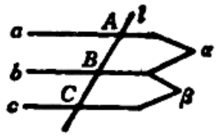
求证：a，b，c，l在一个平面内.

证法一：$\because l\cap b=B$，$\therefore$ 过l，b可作平面，记为α（图

3），显然，$A\in\alpha$，在α内过点A作$a'\parallel b$，而已知a过点A且$a\parallel b$，故a与a'重合，因此$a\subset\alpha$，同理$c\subset\alpha$，因此a，b，c，l同在一个平面α内.



（图 3）



（图 4）

证法二： ∵ $a\parallel$ ，∴ 过a，b可作一个平面，记为α（图4），∵ $A\in a$，$B\in b$，故$A,B\in\alpha$，故$l\subset\alpha$，即两相交直线l，b都在α内.

同理，过b，c可作平面β，两相交直线l，b也在β内，根据公理3推论2，α与β重合.

因此，a，b，c，l在同一个平面内.

注意 （1）证明点、直线在同一平面内，通常有两种方法：

其一，先作一个平面，再证明有关的点、直线在此平面内（如本例证法一）.

其二，先过有关的点、直线，分别作多个平面，再证明这些平面重合（如本例证法二）；

（2）和学习平面几何时作辅助线一样，立体几何中，作辅助平面也是证明的一种重要手段；

（3）证法一中，证明了直线a和a'重合，证法二中，证明了平面α和平面β重合，这种方法称为“同一法”，它在立体几何的证明中应用颇广；

（4）“过直线外一点，有且只有一条直线和这条直线平行”的“平行公理”，在学习立体几何时，可以沿用到空间.

2. 异面直线

(1) 异面直线所成角的计算.

例 4 长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，已知 $AB=a$，$BC=b$，$AA'=c(a>b)$，求异面直线 $D'B$ 和 AC 所成角的余弦值.

（说明：长方体中，相对的面是全等的矩形，且对角线 $D'B=l=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$）.

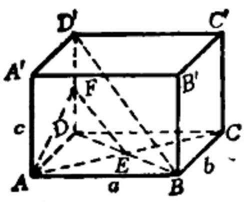
解法一：（平移法）

连接 BD 交 AC 于 E，取 DD' 的中点 F，连接 EF（图 5），则 $EF \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}D'B$，∴ $\angle FEA$ 即是 $D'B$ 和 AC 所成的角. 连接 AF，∵ $AE=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$，$EF=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$，

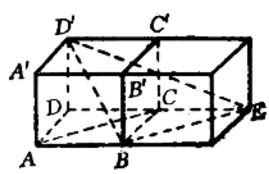
$$AF=\frac{\sqrt{4b^2+c^2}}{2},$$

$$\therefore\ \cos\angle FEA=\frac{EF^2+AE^2-AF^2}{2EF\cdot AE}$$

$$=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}}.$$



（图 5）



（图 6）

解法二：（补形法）

在长方体的一旁，补上一个全等的长方体（图 6），则 BE

$\perp AC$，$\angle D'BE$（或其补角）即是 $D'B$ 和 AC 所成的角.

$\because \quad D'B=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$， $BE=\sqrt{a^2+b^2}$，

$D'E=\sqrt{4a^2+c^2}$，

$$\therefore \quad \cos\angle D'BE=\frac{D'B^2+BE^2-D'E^2}{2\cdot D'B\cdot BE}$$

$$=\frac{-a^2+b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}}<0,$$

$\therefore \quad D'B$ 与 AC 所成角的余弦值为

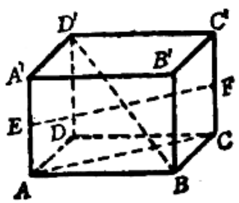
$$\frac{a^2-b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}}.$$

本例还可将 AC 平移至 EF（E，F 分别为 AA'，CC' 的中点）解之（图 7）.

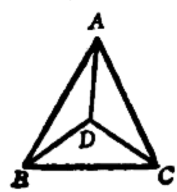
注意 （1）欲求两条异面直线所成的角，关键在于选择恰当的点，通过平移一条直线后，利用解三角形求之；

（2）"平移"、"补形"、"切割"都是立体几何中颇为重要的解题技巧.

（2）异面直线的证明.



（图 7）



（图 8）

例 5 求证：空间四边形的两条对角线是异面直线.

证明：如图 8，假设空间四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，

BD不是异面直线，则AC，BD共面于α，因此A，B，C，D均在平面α内，这与已知"$ABCD$是空间四边形（四个顶点不在同一平面内）"相矛盾.

故假设错误，因此AC，BD是异面直线.

注意 (1) 证明两条直线是异面直线，通常采用反证法. 例如：要证明直线AB，CD异面，首先可假设AB，CD不异面，则AB，CD共面于α，……. 也可作如下假设：假设AB，CD不异面，则$AB /\!/ CD$或AB，CD相交. 若$AB /\!/ CD$，则……；若AB、CD相交，则……. 必须指出，后一方法往往不如前一方法优越.

(2) 反证法是间接证法的一种，它在立体几何证题中经常采用. 在运用反证法时，一定要严格地按照步骤分层次进行：

第一步，作出和结论相反的假设；

第二步，从假设出发，推导出一个与已知或某一公理、定理，或与某一已获证的命题相抵触的结论，从而得到一对逻辑矛盾；

第三步，推翻假设，肯定题中的结论.

值得一提的是，同一法也非常重要，对某些问题的证明，用同一法则更为简便.

【训练题】

(A)

1. 空间四点，如果其中任意三点都不共线，则经过其中三个点的平面共有(　　)

(A) 一个或两个.　　(B) 一个或三个.

（C）两个或三个.　　（D）一个或四个.

2．三条直线两两相交，每两条确定一个平面，则最多可以确定平面的个数是(　　)

（A） 1个.（B） 2个.（C） 3个.（D） 4个.

3．已知平面$\alpha \cap$平面$\beta = l$，点$M \in \alpha, N \in \alpha, P \in \beta$且$P \notin l$，又$MN \cap l = R$，过$M, N$，$P$三点所确定的平面记为$\gamma$，则$\beta \cap \gamma$是(　　)

（A）直线MP.　　（B）直线NP.

（C）直线PR.　　（D）直线MR.

4．异面直线a与b满足$a \subset \alpha$，$b \subset \beta$，且$\alpha \cap \beta = l$，则直线l与a，b的位置关系一定是(　　)

（A）l与a，b都相交.

（B）l至少与a，b中的一条相交.

（C）l至多与a，b中的一条相交.

（D）l至少与a，b中的一条平行.

5．平面α与β相交，直线$a \subset \alpha$，直线$b \subset \beta$，则在“① a，b必为异面直线，② a，b必互相平行，③ a，b必为相交直线”这三个命题中，不正确的个数是(　　)

（A） 0个.（B） 1个.（C） 2个.（D） 3个.

6．两条异面直线指的是(　　)

（A）没有公共点的两条直线.

（B）分别位于两个不同平面内的两条直线.

（C）某一平面内的一条直线和这个平面外的一条直线.

（D）不同在任何一个平面内的两条直线.

7．给出四个命题：

① 若两条直线和第三条直线成等角，则这两条直线互相平行. ② 若两条直线都和第三条直线垂直，则这两条

直线互相平行. ③ 若两条直线都和第三条直线平行，则这两条直线互相平行. ④ 和两条异面直线都垂直的直线是这两条异面直线的公垂线. 其中不正确的个数为(　　)

(A) 1个.　　(B) 2个.

(C) 3个.　　(D) 4个.

8. 分别和两条异面直线都相交的两直线一定是(　　)

(A) 不平行的直线.

(B) 不相交的直线.

(C) 相交直线或平行直线.

(D) 既不相交又不平行的直线.

9. 给出四个命题：

① 两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

② 四边相等的四边形是菱形.

③ 四边相等且四个角也相等的四边形是正方形.

④ 两条对角线互相平分的四边形是平行四边形.

其中正确命题的个数是(　　)

(A) 1个. B) 2个. (C) 3个. (D) 4个.

10. 正方体 $EFGH\text{-}E'F'G'H'$ 中，侧面对角线 FG' 与 EG 所成的角等于(　　)

(A) 45°. (B) 60°. (C) 90°. (D) 120°.

11. 用集合符号记述下列命题：

(1) 直线 a 和平面 α 相交于 A：________；

(2) 平面 α 和平面 β 相交于直线 a：________；

(3) 直线 a 和 b 不相交：________；

(4) 直线 b 在平面 α 内，且不过平面 α 内的 A 点：________________；

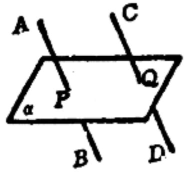
(5) 直线 a 不在平面 α 内：________.

12．(1) 两两相交的四条直线，每两条确定一个平面，最多可确定____个平面，最少可确定____个平面；

(2) 互相平行的四条直线，每两条确定一个平面，最多可确定____个平面，最少可确定____个平面.

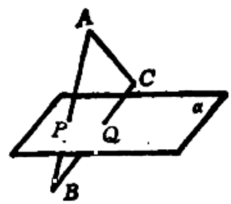
13．(1) 已知线段 $AB\cap$ 平面 $\alpha=P$，线段 $CD\cap$ 平面 $\alpha=Q$，且 $AB /\!/ CD$（图 9 ①），试画出 AD 与平面 α 的交点 R；

(2) 已知$\triangle ABC$，边 $AB\cap$ 平面 $\alpha=P$，边 $BC\cap$ 平面 $\alpha=Q$（图 9 ②），试画出直线 AC 与平面 α 的交点 M.



①

（图 9）

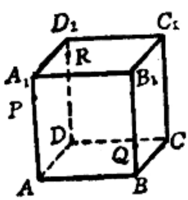


②

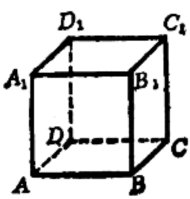
14．在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，P，Q，R 分别是 AA_1，BB_1，DD_1 上的点（图10）.

(1) 画出过点 P 和 Q 两点的直线与底面 $ABCD$ 的交点；

(2) 画出过 R 和 Q 两点的直线与底面 $ABCD$ 的交点.



（图10）



（图11）

15. 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，根据给出的条件，分别画出有关图形（图11）：

(1) 过 B，A_1，C_1 三点的截面；

(2) 过 B_1，A，C 三点的截面；

(3) 上述两截面的交线.

16. 判断下列各命题的正误：

(1) 若四点不共面，则其中任何三点不共线；(　　)

(2) 垂直于同一直线的两直线互相平行；(　　)

(3) 平行于同一直线的两直线互相平行；(　　)

(4) 一条直线若垂直于两平行直线中的一条，则它必垂直于另一条；(　　)

(5) 过一点引已知直线的垂线只有一条；(　　)

(6) 过一点且和已知直线垂直并且相交的直线只有一条. (　　)

17. 空间四边形 $ABCD$ 中，已知 E，F，G，H 分别是边 AB，BC，CD，DA 的中点.

(1) 若 $BD=2$，$AC=6$，则 $EG^2+HF^2=$______；

(2) 若 AC、BD 成 $30°$，$AC=6$，$BD=4$，则四边形 $EFGH$ 的面积等于______.

18. 正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，

(1) 若 E，F 分别为棱 A_1B_1，BB_1 的中点，则 AE 和 CF 所成角的余弦值为______；

(2) 若 G 为 CD 的中点，则异面直线 B_1C 与 AG 所成角的正弦值是______；

(3) 若 F，G 分别是棱 BB_1，DC 的中点，则 AF 与 D_1G 所成角为______.

19. 长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，已知棱 $BB_1=BC=1$，AB

$=\sqrt{3}$，则：

(1) AD_1 与 BC 所成角 $\alpha_1=$______；

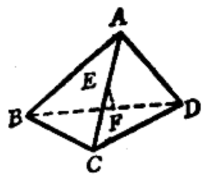
(2) CD_1 与 AB 所成角 $\alpha_2=$______；

(3) CD_1 与 A_1D 所成角的正弦值为______.

20. 在四面体 $ABCD$ 中（图12），

(1) 若 $AB=CD=2$，E，F 分别是 AC，BD 的中点，且 $EF=\sqrt{3}$，则 AB 与 CD 所成的角为______；

(2) 若六条棱都等于 2，则异面直线 AB 与 CD 间的距离为______.



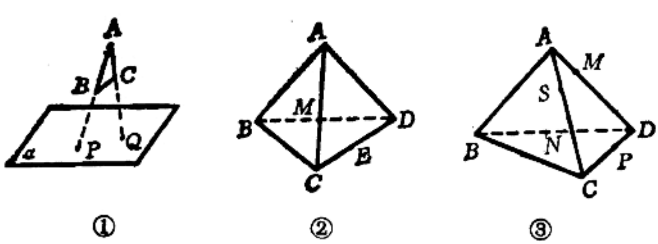
（图12）

(B)

21. (1) 两个平面把空间分成几部分？画图表示各种情况；

(2) 三个平面把空间分成几部分？画图表示各种情况.

22. (1) $\triangle ABC$ 的边 AB，AC 的延长线分别与平面 α 交于 P，Q 两点（图13①），试画出直线 BC 与平面 α 的



（图13）

交点M，并说明理由；

(2) 四面体 $ABCD$ 中，点E在棱CD上，点M在侧面 ABC 内（图13②），试画出 DM 与截面 ABE 的交点H；

(3) 四面体 $ABCD$ 中，点 M, N, P 分别在棱 AD, BD, CD 上，点S在面 ABC 内（图13③），试画出线段 SD 与过 M，N，P 的截面的交点G.

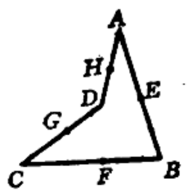
23. 已知 E，F，G，H 顺次是空间四边形 $ABCD$ 各边的中点（图14）.

(1) 求证：$EFGH$ 为平行四边形；

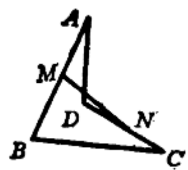
(2) 如果 $AC=BD$，那么 $EFGH$ 是什么四边形？

(3) 如果 $AC\perp BD$，那么 $EFGH$ 是什么四边形？

(4) 如果 $AC=BD$ 且 $AC\perp BD$，那么 $EFGH$ 是什么四边形？



（图14）



（图15）

24. 已知 M，N 分别是异面线段 AB，CD 的中点（图15），求证：$AC+BD>2MN$.

25. (1) 四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB\parallel DC$，AB，BC，DC，AD（或延长线）分别与平面α相交于E，G，F，H（图16），求证：E，F，G，H 必在同一直线上；

(2) 求证：内接于空间四边形 $ABCD$（四个顶点分别在