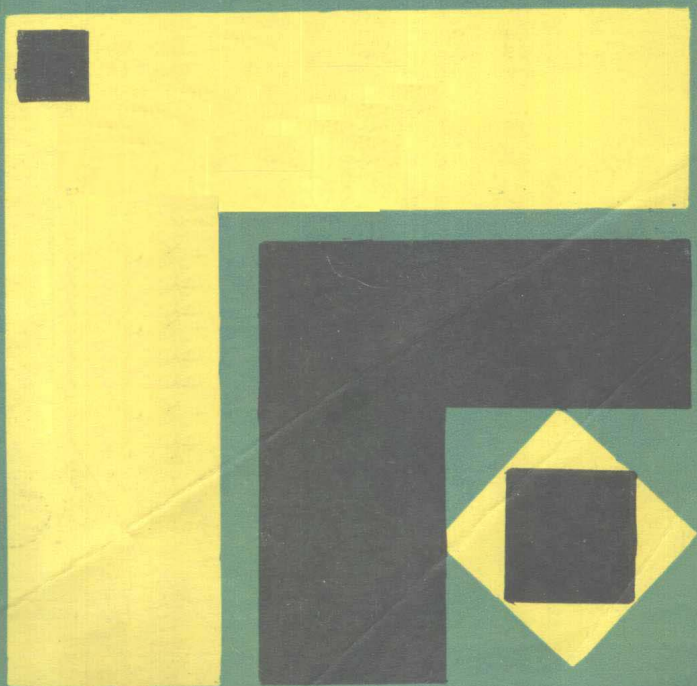


● 中学生课外读物

怎样列方程 方程组解应用题

● 辛明廷·刘志安 编著

吉林
教育
出版
社



中学生课外读物

怎样列方程、方程组解应用题

辛明廷 刘志安 编著

吉林教育出版社

怎样列方程 方程组解应用题

辛明廷 刘志安 编著

责任编辑：李大力

封面设计：曲 刚

出版：吉林教育出版社

787×1092毫米32开本 7 印张 156,000 字

发行：吉林省新华书店

1988年5月第1版 1988年5月第1次印刷

印数：1—17,112 册 定价：1.35 元

印刷：长春市第八印刷厂

ISBN 7 - 5383 - 0425 - 8/G·386

目 录

一、怎样列方程、方程组解应用题	1
1. 列方程、方程组解应用题的一般步骤.....	2
2. 分析题意的办法.....	13
(1) 列表分析法	13
(2) 图示分析法	19
(3) 综合分析法	25
3. 选取未知数的办法.....	29
(1) 设立直接未知数的办法	29
(2) 设立间接未知数的办法	33
(3) 设立辅助未知数的办法	37
二、列方程、方程组解应用题的典型例题及习题	42
1. 有关数目的问题.....	42
2. 有关行程问题.....	57
3. 有关工程问题.....	72
4. 有关混合物、百分比问题.....	86
5. 有关注水、放水问题.....	104
6. 有关“复利”问题.....	113
7. 有关几何计算问题.....	123
8. 有关三角、测量问题.....	143
9. 有关物理计算问题.....	159
10. 有关化学计算问题.....	169

11. 其它问题.....	178
三、列不定方程、方程组解应用题.....	190
四、列不等式组解应用题.....	200
附：部分省、市高中招生、数学竞赛中有关列方程 解应用题的试题及略解.....	208

一、怎样列方程、方程组解应用题

列方程、方程组解应用题，是培养和提高学生分析问题和解决问题的能力的重要途径。在中学数学教学中，列方程、方程组解应用题占有很重要的地位。

怎样列方程、方程组解应用题呢？对于一个用列方程、方程组解应用题比较熟练的人，往往能一看到题目，很快就会列出方程或方程组来；但是对于一个初学者，或者尚未掌握列方程、方程组解应用题的技巧的人，可能看到题目会感到无从下手，对某些比较复杂的应用题，更会感到束手无策。

究竟列方程、方程组解应用题有没有规律呢？列方程、方程组解应用题，虽然不象解方程或解方程组那样：有一定的解法（如解二元一次方程组，常用代入消元法和加减消元法），甚至于有些方程可以直接运用公式来解（如一元二次方程的公式解法），等等。但是列方程、方程组解应用题，往往也有它的一般规律，要掌握这个规律，**关键就在于把问题里的日常的语言执译成代数的语言**。如果你能懂得并掌握怎样把日常的语言执译成代数的语言，那么你也找到了列方程、方程组解应用题的窍门。

伟大的物理学家和数学家牛顿，在他写的一本代数书里说过这样的话：“要想解一个有关数目的问题，或有关量的抽

象关系的问题，只要把问题里的日常的语言执译成代数的语言就成了。”

这就是说，用数学工具——方程、方程组来解决日常的实际问题，首先必须把日常的语言，执译成数学的语言，这项工作熟练了，列方程、方程组解应用题就迎刃而解了。一般来说，对于一个应用题，如果能正确地列出方程或方程组，那么问题就相当于解决了一半，且是关键的一半。

1. 列方程、方程组解 应用题的一般步骤

在中学数学课本里，总结出“列一元一次方程解应用题”的一般步骤，即：

(1) 弄清题意，看哪些是未知数，哪些是已知数，根据未知数和已知数间的联系找相等关系；用字母 x 表示问题里的一个未知数；如果问题里还有其他未知数，用含 x 的代数式把它们表示出来。

(2) 根据相等关系，列出方程。

(3) 解所得的方程，根据方程的根，得出题里所求的未知数的值，写出答案。

概括起来，就是：

弄清题意——设立未知数——列方程——解方程——检验，写出答案。

看来步骤很简单，但是对于初学者往往运用起来感到困难。为了培养和提高列方程或方程组解应用题的能力，可以一步一步来做。

第一步弄清题意（这是列方程或方程组的关键）

看到一个题目，首先要弄清题目里说的是什么，凡是题目里要求的（即未知量），就是我们所要回答的。题目里要求的未知量都和题目里给出的已知条件（即已知量）联系着，因此正确理解未知量和已知量之间的关系，已知量和已知量之间的关系，以及未知量和未知量之间的关系，就成为十分重要的了。这些关系在题目里往往都是通过语言叙述出来的，因此必须善于把日常的语言执译成代数的语言——用字母表示数，用代数式或方程式表示数量间的关系等等。

例如：用字母 x 表示一个数，那么

这个数与 5 的和，表示为 $x + 5$ ；

这个数的立方与这个数的平方的 $\frac{3}{4}$ 的和，表示为；

$$x^3 + \frac{3}{4}x^2;$$

这个数的倒数的平方与其相反数的差，表示为 $\left(\frac{1}{x}\right)^2 - (-x)$ ；

这个数与某数的和为 10，某数表示为 $10 - x$ ；

这个数与某数的比为 5:6，某数表示为 $\frac{6}{5}x$ ；

这个数比某数的 4 倍少 1，某数表示为 $\frac{1}{4}(x + 1)$ 等等。

如果用 x 表示这个数，用 y 表示那个某数，那么：

这个数与某数的和为 10，可以表示为 $x + y = 10$ ；

这个数与某数的比为 5:6，可以表示为 $x:y = 5:6$ 或者

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{6};$$

这个数比某数的 4 倍少 1，可以表示为 $x = 4y - 1$ 或者

$x + 1 = 4y$ 等等。

这些都是把日常的语言转化为代数的语言的执译工作。

要准确而又迅速地做好执译工作，必须对题目里给出的名词、语句有正确的理解，并且能把与它们有关的概念、公式、定理等联系起来。

比如，在有关数目的问题里，提到奇数或偶数。我们知道，不能被 2 整除的整数是奇数，能够被 2 整除的整数是偶数，并且进一步还可以用 $2n + 1$ （这里 n 是整数）来表示任何一个奇数，用 $2n$ （这里 n 是整数）来表示任何一个偶数。

在有关工程的问题里，提到完成计划的百分之“多少”，这里的百分之多少，是指完成的工程量与原计划完成的工程量的百分比，通常把原计划当作 100%，如果说完成计划 90%，是说还没有全部完成计划；如果说超额 90%，那就是——共完成原计划的 190%。诸如此类的名词语句，一定要细细辨别，正确理解。

又比如，在有关自由落体运动的问题里，物体降落的高度 h ，与时间 t 和重力加速度 g 的关系是 $h = \frac{1}{2}gt^2$ ，在同一地点，同一个问题里，一般把重力加速度 g 当作一个不变的常数，通常取 $g = 9.8$ 米/秒²。特别地有时为了计算上的方便取 $g = 10$ 米/秒²。

在有关几何、三角的应用问题里，如果涉及到直角三角形，那么我们就自然地联想到直角三角形的一些性质，有关定理（象勾股定理、射影定理等等）以及直角三角形中的边角关系、正弦定理、余弦定理等等。

这些都是我们做好执译工作所必需的。

其次要弄清题目里的主要矛盾是什么。在弄清题目里说

的是什么的基础上，通过分析矛盾，抓住主要矛盾，其他问题就迎刃而解了。所谓分析矛盾、抓住主要矛盾，就是指在执译过程中如何找等量关系，抓住其中的主要等量关系式，方程就会很容易列出来了。等量关系是选取未知数、列方程的依据。

在一个题目里，往往存在几个等量关系，有的是题目里比较明显的给出的，有的可能要通过我们分析才能找到。

例如，在行程问题里，有一辆汽车，往返甲、乙两地之间，去时的速度为每小时45公里，回来时的速度为每小时55公里（假定都是匀速的），求汽车往返一次的平均速度。

这里明显给出的等量关系只有：

去时的速度为每小时45公里，

来时的速度为每小时55公里。

其余的就靠分析了。我们知道，行程问题三要素：距离、时间和速度；在匀速运动中，它们之间的等量关系式有：

$$\text{距离} = \text{时间} \times \text{速度}, \quad \text{时间} = \frac{\text{距离}}{\text{速度}},$$

$$\text{速度} = \frac{\text{距离}}{\text{时间}}.$$

要求往返一次的平均速度，因此应该选取速度 = $\frac{\text{距离}}{\text{时间}}$

这个等量关系式。

但是这里面，距离、时间均不知道，怎么求速度呢？这就出现了矛盾，要解决这个矛盾，则要分析题意。

比如汽车往返甲乙两地之间，虽然距离不知道，但是往返所走过的路程是相等的（都是甲乙两地间的距离），故汽车

往返一次所走过的路程是甲乙两地间距离的2倍。因此，可以假定甲乙两地间的距离是一个不变的常数 s （也可以设出新的未知数），那么去时所用的时间和回来时所用的时间就可以用时间 = $\frac{\text{距离}}{\text{速度}}$ 这个等量关系式求得了。

即：去时所用的时间为 $\frac{s}{45}$ （小时），回来时所用的时间为 $\frac{s}{55}$ （小时），并且往返一次共用的时间为 $\frac{s}{45} + \frac{s}{55}$ （小时）。

这样汽车往返一次的平均速度 \bar{v} 就可以用等量关系式 速度 = $\frac{\text{距离}}{\text{时间}}$ 求得了。

$$\begin{aligned}\text{即 } \bar{v} &= \frac{2s}{\frac{s}{45} + \frac{s}{55}} = \frac{2}{\frac{1}{45} + \frac{1}{55}} \\ &= \frac{2 \times 45 \times 55}{45 + 55} \\ &= 49.5 \text{ (公里/小时)}\end{aligned}$$

综上所述，弄清题意是列方程、方程组解应用题的关键。为了帮助大家分析题意，尽快找到解题的线索，将在后面介绍几种分析题意的办法。

列方程、方程组解应用题的**第二步就是设立未知数**。

在弄清题意的基础上，把已知条件和未知条件摘录出来，通过分析和找等量关系式适当选取未知数，然后写出有关的代数式，为下一步列方程做好准备。

这里所说的“适当”，包含着列方程、方程组解应用题的

技巧，有时候对一个题目，经过分析，题意基本上是弄清楚了，但是由于选取的未知数不同，可能列出来的方程也不同，在解法上就有难有易，有时由于未知数的选择不适当，还可能列不出方程来。

例如：有一个三位数，其十位数字比个位数字大2，百位数字比个位数字小2，三个数字的和的17倍等于原数，求这个三位数。

我们先分析一下：

未知量只有一个，即原来的三位数。其余的都是已知条件，这里的等量关系有：

(1) 十位数字比个位数字大2，即十位数字等于个位数字加2；

(2) 百位数字比个位数字小2，即百位数字等于个位数字减2；

(3) 三个数字的和的17倍等于原数。

很明显，等量关系(3)是主要的等量关系式，但单从这几个等量关系里是很难把未知量求出来的。我们知道，三位数是由个位数字、十位数字和百位数字组成的，它们之间的关系是

(4) 三位数等于百位数字乘100，加上十位数字乘10，再加上个位数字（这是一个关键的等量关系式，题里没有直接给出）。

下面开始设立未知数了（关于设立未知数的方法和技巧，将在下面介绍）。现在不妨一个一个地试一试。

这个题目要求的是这个三位数，如果设这个三位数是 x ，那么它的百位数字，十位数字和个位数字是很难用 x 来表示出来的，因此题目里给出的等量关系式，就都用不上了，方程

自然也就列不出来了。如果把它的百位数字，十位数字，个位数字设作未知数，可以有以下几种设法：

(1) 设三个未知数。

(2) 设这三个当中的一个作未知数。

先来看设三个未知数的方法，假定百位数字是 x ，十位数字是 y ，个位数字是 z ，那么这个三位数就是 $100x + 10y + z$ ，而三个数字的和就是 $x + y + z$ ；

根据题目里分析的等量关系，我们有：

$$\begin{cases} y = z + 2 & \dots\dots (1) \\ x = z - 2 & \dots\dots (2) \\ 17(x + y + z) = 100x + 10y + z & \dots\dots (3) \end{cases}$$

解这个方程组：把 (1)、(2) 代入 (3)

得 $17(z - 2 + z + 2 + z) = 100(z - 2) + 10(z + 2) + z$

整理得： $17 \times 3z = 111z - 180$

$$60z = 180$$

$$\therefore z = 3$$

把 $z = 3$ 代入 (1) 和 (2) 分别求得

$$y = 5, x = 1$$

$$\therefore 100x + 10y + z = 100 \times 1 + 10 \times 5 + 3 = 153$$

下面再来看设其中一个作未知数的方法。设百位数字是 x ，那么个位数字是 $x + 2$ ，十位数字是 $x + 2 + 2$ ，原三位数就是 $100x + 10(x + 4) + x + 2$ ，三个数字和就是 $3x + 6$ 。

依题意，则

$$17(3x + 6) = 100x + 10(x + 4) + x + 2$$

解这个方程。

$$\text{整理化简得：} 51x + 102 = 111x + 42$$

$$60x = 60$$

$$\therefore x = 1$$

$$\therefore x + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$x + 4 = 1 + 4 = 5$$

$$100x + 10(x + 4) + x + 2 = 100 \times 10 \times 5 + 3 \\ = 153。$$

如果设十位数字是 x ，那么个位数字是 $x - 2$ ，百位数字是 $x - 2 - 2$ ，原三位数就是 $100(x - 4) + 10x + x - 2$ ，三个数字的和就是 $3x - 6$ ；

依题意，则 $17(3x - 6) = 100(x - 4) + 10x + x - 2$ 。

解这个方程。

整理化简得： $51x - 102 = 111x - 402$

$$60x - 300$$

$$\therefore x = 5$$

$$\therefore 100(x - 4) + 10x + x - 2 = 100 \times 1 + 10 \times 5 + 3 \\ = 153。$$

如果设个位数字是 x ，那么十位数字是 $x + 2$ ，百位数字是 $x - 2$ ，原三位数就是 $100(x - 2) + 10(x + 2) + x$ ，三个数字和就是 $3x$ ，

依题意，则 $17 \times 3x = 100(x - 2) + 10(x + 2) + x$

解这个方程。即： $51x = 111x - 180$

$$60x = 180$$

$$\therefore x = 3$$

$$\therefore 100(x - 2) + 10(x + 2) + x = 100 + 10 \times 5 + 3 \\ = 153。$$

由上面的解法看出，未知数的选取不同，列出来的方程也不同。如果未知数选取的适当（如最后一种解法），列

方程和解方程都比较容易。相反，如果未知数选取的不适当。比如设这三位数是 x ，就很难列出方程来。

第三步根据等量关系列出方程。 这一步是前两步的结果，在弄清题意和适当地选取了未知数之后，根据分析出来的等量关系式，布列方程就比较容易了，因为方程就是含有未知数的等式，只要分析出来的主要等量关系式里包含所求的未知数，就是所要列出的方程了。但是对于初学者，或者尚未掌握列方程或方程组规律的人，往往在组织方程时可能把方程列错，其主要原因多数都是在分析等量关系中出毛病，分不清哪个是主要等量关系式，或者把主要等量关系式弄错。

例如前面提到的行程问题：有一辆汽车往返甲乙两地之间，去时的速度为每小时45公里，回来时的速度为每小时55公里，求汽车往返一次的平均速度。

初学者一看到题目，很容易就把主要等量关系式误认为是：平均速度等于去时的速度加上回来时的速度，然后被2除。即：

设汽车往返一次的平均速度是每小时 x 公里，

依“题意”，则
$$x = \frac{1}{2}(45 + 55)$$

$$x = 50$$

这里的问题，主要是对行程问题的三要素——距离、时间和速度，及它们间的等量关系理解不清。

又比如汽车往返甲乙两地之间，去时的速度为每小时45公里，回来时的速度为每小时55公里，已知去时比回来时多用40分钟，求甲乙两地间的距离？

设甲乙两地间的距离是 x 公里。

“依题意”，则
$$\frac{x}{45} - \frac{x}{55} = 40$$

看来“作者”对这个题目里的主要等量关系式是找到了，去时所用的时间减去回来时所用的时间等于多用的时间。

但是仔细检查一下，我们发现等式左边的时间和等式右边的时间，单位不统一，左边的单位是小时，右边的单位是分钟，因此方程虽然是列出来了，但是结论还是错误的。

一般地为了不把方程组织错，除了加深理解题意外，在列出方程后，要检查下面几个方面的问题：

(1) 看列出的方程左右两边是不是相等的量。这里有两层意思，一是看方程两边的数量是否相同，一是看方程两边的量的性质是否相同。例如，看方程两边的数量单位是否相同，单位不同要换算成统一单位。在行程问题中，看列出的方程是不是满足时间 = 时间，速度 = 速度，距离 = 距离。

(特别地“比”除外)。如果方程两边的性质不同，那么就说明方程组织错了。

(2) 看列出方程以后，题目里所给的已知条件（包括所有的已知数），是否都已经包括在方程里面了。如果有的已知条件最后还没有用上，那你就要分析一下，这个已知条件是否确实是多余的，因为在一般情况下，题目里给我们的已知条件、已知数，都是我们组织方程所必需的，很少有多余的情况。一般来说，如果我们列完方程还遗漏下什么已知条件，那么列出来的方程很可能是错误的。

(3) 列出方程以后，要看它是否能解。如果列出来的方程不能解，或者很难解出来，那么就有必要重新分析题意，重新组织方程了。因为在很多应用问题里，可以选取不同的未知数用不同的思路来组织方程，前面的例子也说明了

这一点。

(4) 解所得的方程或方程组，求出题里所要求的未知数的值，经过检验写出答案。

关于方程、方程组的解法，不在这里赘述了，如果对解方程或方程组有困难，可参考其他有关书藉。一般来说，在列出方程后，解这个方程或方程组就比较容易了，因为你在列方程前，就要考虑如何选取未知数的问题，并且要兼顾到你所要列出的方程的难易。

解完方程或方程组，**要注意检验**。一方面要检验你所得到的解是不是原方程或原方程组的解，尤其是列出来的方程是分式方程或无理方程时，必须要验根，因为在解分式方程或无理方程时，往往容易产生增根，这是我们所知道的。另一方面，要联系实际，把方程或方程组的解代到应用题里检验，看它是否符合题意，比如在应用问题里要求的是人数，如果得到的解是分数或小数，就没有意义了。又比如在应用问题里要求的是线段的长，那么得到的解是负数，就应该把它舍掉。等等。

综上所述，列方程、方程组解应用题一般需要这么几步，如果对这些步骤熟练了，在分析题意时，不必一步一步都写出来，大量的分析工作在我们头脑里进行，或者在草稿上进行就可以了。

一般地，列方程、方程组解应用题的书写格式是：

解：设…… 那么……

依题意，则：……（得方程或方程组）

解这个方程或方程组……

检验……（有时不必写出来）

答：……