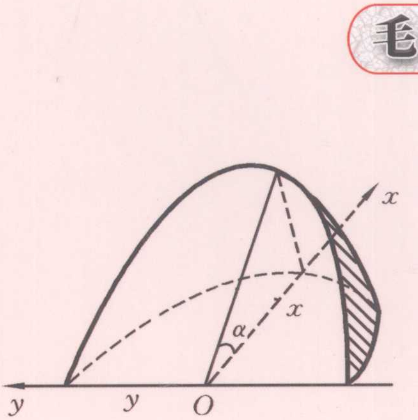
毛纲源考研数学辅导系列

本书在手 考研无忧

# 最新考研数学（二）

## 常考题型解题方法技巧归纳

毛纲源 编著




◇题型全面 紧扣大纲 帮你高效复习

◇方法新颖 技巧独特 助君考研成功

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

毛纲源考研数学辅导系列

# 最新考研数学(二)
# 常考题型解题方法技巧归纳

毛纲源　编著

华中科技大学出版社
中国·武汉

**图书在版编目(CIP)数据**

最新考研数学(二)常考题型解题方法技巧归纳/毛纲源　编著.—武汉:华中科技大学出版社,2008年10月

ISBN 978-7-5609-4918-5

Ⅰ.最…　Ⅱ.毛…　Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-解题　Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第151954号

**最新考研数学(二)常考题型解题方法技巧归纳**　　毛纲源　编著

责任编辑:王汉江　　封面设计:潘　群
责任校对:周　娟　　责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　　邮编:430074　　电话:(027)87557437

录　排:武汉佳年华科技有限公司
印　刷:湖北新华印务有限公司

开本:710mm×1000mm　1/16　　印张:28　　字数:728 000
版次:2008年10月第1版　　印次:2008年10月第1次印刷　　定价:39.80元
ISBN 978-7-5609-4918-5/O·470

# 前　言

为使考研者能在较短时间内全面复习考研数学，提高考研应试能力和水平，作者根据最新数学考试大纲的要求，深入研究了历年来考研试题，结合作者多年来在考研辅导班的授课经验，编写了《最新考研数学(二)常考题型解题方法技巧归纳》一书. 该书几乎覆盖了考研内容的绝大部分题型，本书中的解题方法新颖、技巧独特、适于自学，相信本书的出版会受到全国广大考生的青睐.

本书有以下几个特点.

首先，本书根据考研数学大纲的要求，将历年来同一内容的考研数学试题(主要是数学二的试题)放在一起按题型分类，对各类题型的解法进行了归纳总结，使考生能做到举一反三、触类旁通. 数学试题是无限的，而题型是有限的，掌握好这些题型及其解题方法与技巧，会减少解题的盲目性，从而提高解题效率，考生的应试能力自然就得到了提高. 同时也使考生掌握未来的考研数学二的绝大部分题型及其解题思路、方法与技巧. 因而，本书能起到指航引路、预测考向的作用.

本书特别强调对考研数学大纲划定的基本概念、基本定理、基本方法和基本公式的正确理解. 为此每一题型在讲解例题前常对上述“四个基本”进行剖析，便于考生理解、记忆，避免常犯错误.

本书另一特点是总结了许多实用快捷的简便算法，这些简便算法新颖、独特，它们是作者多年来教学经验的总结，会大大提高考生的解题速度和准确性，使考生大大节省时间，因而有助于考生应试能力和水平的提高.

本书还注意培养提高综合应用多个知识点解决问题的能力，对综合型题型进行了较多的分析和多种解法，以期提高考生在这方面的能力. 与此同时，注重一题多解，以期开阔考生的解题思路，使所学知识融会贯通，能灵活综合地解决问题.

本书的讲述方法由浅入深，适于自学，尽量做到例题精而易懂、全而不滥.

为使考生具有扎实的数学基础知识，也为了更好地阅读本书，特向读者推荐一套可以指导你全面、系统、深入复习考研数学的参考书，这就是本人编写的由华中科技大学出版社出版的理工类数学学习指导、硕士研究生备考指南丛书:《高等数学解题方法技巧归纳》(上、下册)、《线性代数解题方法技巧归纳》(第 2 版)、《概率论与数理统计解题方法技巧归纳》. 这套丛书自出版以来一直受到全国广大读者的一致好评，多次印刷，久销不衰. 很多已考取的理工类硕士研究生不少都受益于这套丛书. 本人在撰写本书时，多处引用了这套丛书的内容和方法，如果能把这套丛书结合起来学习必将收到事半功倍的效果.

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中错误、疏漏之处在所难免，恳请专家、读者指正.

**编　者**

2008 年 8 月

# 目　录

## 第1篇　高等数学

## 第 2 篇　线 性 代 数

# 第1篇 高等数学

## 1.1 函 数

### 1.1.1 求两类函数的表达式

**题型一 已知一函数求其反函数的表达式**

求反函数的方法是在原函数 $y=f(x)$ 中解出 $x$，再交换 $x$ 与 $y$ 的位置即得所求的反函数 $y=f^{-1}(x)$，同时得到 $f^{-1}$ 的定义域即为 $f$ 的值域.

如 $y=f(x)$ 为分段函数，且在各分段区间上都是单调函数，则分别求出各分段区间上的反函数就得到该分段函数的反函数，且 $f(x)$ 的每段的值域就是其对应分段区间上反函数的定义域.

**例1**[1996年2]* 设函数 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1,\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 12x-16, & x>2.\end{cases}$ 写出 $f(x)$ 的反函数的表达式.

**解** (1) 当 $x<-1$ 时，$y=1-2x^2<-1$，从 $y=1-2x^2$ 中解出 $x$ 得到 $x=-\sqrt{(1-y)/2}$，交换 $x$ 与 $y$ 的位置得到反函数 $y=-\sqrt{(1-x)/2}, x<-1$.

(2) 当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$-1\leqslant y=x^3\leqslant 8$. 从 $y=x^3$ 中解出 $x$，得到 $x=\sqrt[3]{y}$，交换 $x$ 与 $y$ 的位置得到反函数 $y=\sqrt[3]{x}, -1\leqslant x\leqslant 8$.

(3) 当 $x>2$ 时，$y=12x-16>8$，从 $y=12x-16$ 中解出 $x$ 得到 $x=(y+16)/12$，交换 $x$ 与 $y$ 的位置得反函数为 $y=(x+16)/12, x>8$.

综上得到 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式为 $g(x)=f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{(1-x)/2}, & x<-1,\\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8,\\ (x+16)/12, & x>8.\end{cases}$

**题型二 求分段函数的复合函数表达式**

常用分段代入法或代入法求之. 为方便计，设

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & x\leqslant\varphi_1(x),\\ f_2(x), & x>\varphi_2(x);\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}g_1(x), & x\leqslant\psi_1(x),\\ g_2(x), & x>\psi_2(x).\end{cases}$$

为求 $f[g(x)]$，先将 $g(x)$ 代入 $f(x)$ 表达式中的所有 $x$，得到

$$f[g(x)]=\begin{cases}f_1[g(x)], & g(x)\leqslant\varphi_1[g(x)], & ①\\ f_2[g(x)], & g(x)>\varphi_2[g(x)]. & ②\end{cases}$$

---

* 例1[1996年2]表示例1是1996年数学试卷二的全国统考试题. 下同.

再将 $g(x)$ 的分段表示式 $g_1(x)$ 分别代入式①、式②右端的 $g(x)$，并将所得不等式与 $g_1(x)$ 的自变量的变化范围 $x\leqslant\psi_1(x)$ 求交. 对 $g(x)$ 的另一分段表示式 $g_2(x)$ 也同样处理，于是得到

$$f[g(x)]=\begin{cases} f_1[g_1(x)], & g_1(x)\leqslant\varphi_1[g_1(x)], \quad x\leqslant\psi_1(x), & ③\\ f_2[g_1(x)], & g_1(x)>\varphi_2[g_1(x)], \quad x\leqslant\psi_1(x), & ④\\ f_1[g_2(x)], & g_2(x)\leqslant\varphi_1[g_2(x)], \quad x>\psi_2(x), & ⑤\\ f_2[g_2(x)], & g_2(x)>\varphi_2[g_2(x)], \quad x>\psi_2(x). & ⑥\end{cases}$$

分别求解式③、式④、式⑤、式⑥中的不等式组（其中有些不等式组可能无解），即得复合函数 $f[g(x)]$ 各段自变量的取值范围. 从而求得所求的分段复合函数.

**例 2**[1997 年 2]　设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=($　　$)$.

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x\leqslant0,\\ 2-x, & x>0\end{cases}$　(B) $\begin{cases}2-x, & x<0,\\ 2+x, & x>0\end{cases}$　(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant0\end{cases}$　(D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant0\end{cases}$

**解一**　先将 $f(x)$ 代入 $g(x)$ 表示式中的所有 $x$，得到 $g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant0, & ①\\ f(x)+2, & f(x)>0. & ②\end{cases}$

再将 $f(x)$ 的分段表示式分别代入式①与式②右端的 $f(x)$，并将所得的不等式与分段表示式相应的自变量的变化范围求交，得到

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-x^2, & x^2\leqslant0, \quad x<0, & ③\\ x^2+2, & x^2>0, \quad x<0, & ④\\ 2+x, & -x\leqslant0, \quad x\geqslant0, & ⑤\\ -x+2, & -x>0, \quad x\geqslant0. & ⑥\end{cases}$$

不等式组③、⑥无解. 求解不等式组④、⑤分别得到 $x<0, x\geqslant0$. 此为所求的复合函数自变量的分段取值范围. 因而

$$g[f(x)]=\begin{cases}x^2+2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant0.\end{cases}\quad 仅(D)入选.$$

**解二**　当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2>0$，则 $g[f(x)]=f(x)+2=x^2+2$. 当 $x\geqslant0$ 时 $f(x)=-x\leqslant0$，则 $g[f(x)]=2-f(x)=2-(-x)=2+x$，故 $g[f(x)]=\begin{cases}x^2+2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant0.\end{cases}$ 仅(D)入选.

**注意**　两分段函数 $f(x), g(x)$ 的分段点相同时，用代入法求 $f[g(x)]$ 或 $g[f(x)]$ 较简；分段点不同时，常用上述分段代入法求 $f[g(x)]$ 或 $g[f(x)]$.

**例 3**　设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1,\\ x, & x\geqslant1,\end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<0,\\ x^2-1, & x\geqslant0,\end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

**解**　第一步将 $\varphi(x)$ 代入 $f(x)$ 表示式中的所有 $x$，得到 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1,\\ \varphi(x), & \varphi(x)\geqslant1.\end{cases}$

第二步用 $\varphi(x)$ 的各个分段函数分别替换上式中右边的 $\varphi(x)$，有

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{x+2}, & x+2<1, \quad x<0,\\ x+2, & x+2\geqslant1, \quad x<0,\\ e^{x^2-1}, & x^2-1<1, \quad x\geqslant0,\\ x^2-1, & x^2-1\geqslant1, \quad x\geqslant0.\end{cases}$$

第三步求解上式右边的四个不等式组，确定 $f[\varphi(x)]$ 的各段取值范围.

解$\begin{cases}x+2<1,\\x<0\end{cases}$得到 $x<-1$；解$\begin{cases}x+2\geqslant1,\\x<0\end{cases}$得到$-1\leqslant x<0$；

解$\begin{cases}x^2-1<1,\\x\geqslant0\end{cases}$得到 $0\leqslant x<\sqrt{2}$；解$\begin{cases}x^2-1\geqslant1,\\x\geqslant0\end{cases}$得到 $x\geqslant\sqrt{2}$.

最后得到所求的分段复合函数为 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1,\\x+2, & -1\leqslant x<0,\\e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2},\\x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}.\end{cases}$

## 1.1.2 函数的奇偶性

**题型一 判别(证明)几类函数的奇偶性**

**类型(一)** 判别经四则运算后的函数的奇偶性.

**命题 1.1.2.1** (1) 奇函数乘(除)偶函数＝奇函数；(2) 奇函数乘(除)奇函数＝偶函数；(3) 偶函数乘(除)偶函数＝偶函数；(4) 奇函数加(减)奇函数＝奇函数；(5) 偶函数加(减)偶函数＝偶函数；(6) 不恒等于零的偶函数(不恒等于零的奇函数)加减不恒等于零的奇函数(不恒等于零的偶函数)为非奇非偶函数；(7) 不恒等于零的偶(奇)函数乘以非奇非偶函数，一般不再是偶(奇)函数，而是非奇非偶函数.

**例 1**[1987 年 2] $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$是(　　).

(A) 有界函数　(B) 单调函数　(C) 周期函数　(D) 偶函数

**解** 因$|x\sin x|$是偶函数，$e^{\cos x}$也是偶函数，由命题 1.1.2.1(3)知，$f(x)$是偶函数. 仅(D)入选.

**类型(二)** 判别自变量带相反符号的两同名函数代数和的奇偶性.

**命题 1.1.2.2** 设 $f(x)$为定义在$[-a,a]$($a$ 可为无穷)上非常数的任意函数，则

(1) $f(x)+f(-x)$为偶函数；(2) $f(x)-f(-x)$(或 $f(-x)-f(x)$)为奇函数.

即自变量带相反符号且为非常数的两同名函数之和为偶函数，之差为奇函数.

**例 2** 设 $f(x)$与 $g(x)$为非常数的任意函数，试判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)+f(-x)+g(x)+g(-x)$；　(2) $f(x)-f(-x)+g(x)+g(-x)$；

(3) $f(x)-f(-x)-g(x)+g(-x)$；　(4) $f(x)+f(-x)-g(x)-g(-x)$.

**解** (1) 因为 $f(x)+f(-x)$，$g(x)+g(-x)$均为偶函数，其和必为偶函数.

(2) 因 $f(x)-f(-x)$为奇函数，$g(x)+g(-x)$为偶函数，其和为非奇非偶函数.

(3) $f(x)-f(-x)$，$g(x)-g(-x)$均为奇函数，其差为奇函数.

(4) $f(x)+f(-x)$，$g(x)+g(-x)$均为偶函数，其差为偶函数.

**类型(三)** 判别复合函数的奇偶性.

利用下述命题判别之.

**命题 1.1.2.3** (1) 若函数 $y=f(t)$，$t=g(x)$的奇偶性不同，则其复合函数 $y=f[g(x)]$必为偶函数；若奇偶性相同，则其复合函数 $y=f[g(x)]$与外层函数 $f(x)$具有相同的奇偶性.

(2) $f$ 不具有奇偶性时，一般 $f(g_0)$，$g_0(f)$，$g_e(f)$，$f(f)$及 $f\cdot f$ 不具有奇偶性但 $f(g_e)$为偶函数，其中 $g_0$ 为奇函数，$g_e$ 为偶函数.

**例 3** 设 $f$ 为偶函数，$g$ 为奇函数，试考察下列函数的奇偶性：