



毛 纲 源 考 研 数 学 辅 导 系 列

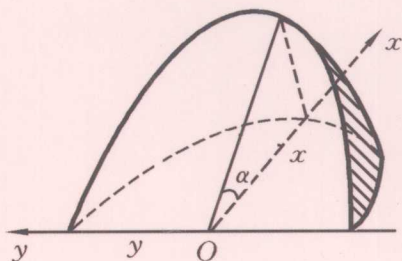
考本
研书
无在
忧手

最新

考研数学 (二)

常考题型解题方法技巧归纳

毛纲源 编著



- ◇ 题型全面 紧扣大纲
帮你高致复习
- ◇ 方法新颖 技巧独特
助你考研成功

华中科技大学出版社
<http://www.hustp.com>

毛纲源考研数学辅导系列

最新考研数学(二) 常考题型解题方法技巧归纳

毛纲源 编著

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

最新考研数学(二)常考题型解题方法技巧归纳/毛纲源 编著. —武汉:华中科技大学出版社,2008年10月

ISBN 978-7-5609-4918-5

I. 最… II. 毛… III. 高等数学-研究生-入学考试-解题 IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 151954 号

最新考研数学(二)常考题型解题方法技巧归纳

毛纲源 编著

责任编辑:王汉江

封面设计:潘 群

责任校对:周 娟

责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科技有限公司

印 刷:湖北新华印务有限公司

开本:710mm×1000mm 1/16

印张:28

字数:728 000

版次:2008年10月第1版

印次:2008年10月第1次印刷

定价:39.80元

ISBN 978-7-5609-4918-5/O·470

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

前 言

为使考研者能在较短时间内全面复习考研数学,提高考研应试能力和水平,作者根据最新数学考试大纲的要求,深入研究了历年来考研试题,结合作者多年来在考研辅导班的授课经验,编写了《最新考研数学(二)常考题型解题方法技巧归纳》一书.该书几乎覆盖了考研内容的绝大部分题型,本书中的解题方法新颖、技巧独特、适于自学,相信本书的出版会受到全国广大考生的青睐.

本书有以下几个特点.

首先,本书根据考研数学大纲的要求,将历年来同一内容的考研数学试题(主要是数学二的试题)放在一起按题型分类,对各类题型的解法进行了归纳总结,使考生能做到举一反三、触类旁通.数学试题是无限的,而题型是有限的,掌握好这些题型及其解题方法与技巧,会减少解题的盲目性,从而提高解题效率,考生的应试能力自然就得到了提高.同时也使考生掌握未来的考研数学二的绝大部分题型及其解题思路、方法与技巧.因而,本书能起到指航引路、预测考向的作用.

本书特别强调对考研数学大纲划定的基本概念、基本定理、基本方法和基本公式的正确理解.为此每一题型在讲解例题前常对上述“四个基本”进行剖析,便于考生理解、记忆,避免常犯错误.

本书另一特点是总结了许多实用快捷的简便算法,这些简便算法新颖、独特,它们是作者多年来教学经验的总结,会大大提高考生的解题速度和准确性,使考生大大节省时间,因而有助于考生应试能力和水平的提高.

本书还注意培养提高综合应用多个知识点解决问题的能力,对综合型题型进行了较多的分析和多种解法,以期提高考生在这方面的能力.与此同时,注重一题多解,以期开阔考生的解题思路,使所学知识融会贯通,能灵活综合地解决问题.

本书的讲述方法由浅入深,适于自学,尽量做到例题精而易懂、全而不滥.

为使考生具有扎实的数学基础知识,也为了更好地阅读本书,特向读者推荐一套可以指导你全面、系统、深入复习考研数学的参考书,这就是本人编写的由华中科技大学出版社出版的理工类数学学习指导、硕士研究生备考指南丛书:《高等数学解题方法技巧归纳》(上、下册)、《线性代数解题方法技巧归纳》(第2版)、《概率论与数理统计解题方法技巧归纳》.这套丛书自出版以来一直受到全国广大读者的一致好评,多次印刷,久销不衰.很多已考取的理工类硕士研究生不少都受益于这套丛书.本人在撰写本书时,多处引用了这套丛书的内容和方法,如果能把这套丛书结合起来学习必将收到事半功倍的效果.

由于编者水平有限,加之时间仓促,书中错误、疏漏之处在所难免,恳请专家、读者指正.

编 者

2008年8月

目 录

第 1 篇 高等数学

1.1 函数	(1)
1.1.1 求两类函数的表达式	(1)
题型一 已知一函数求其反函数的表达式	(1)
题型二 求分段函数的复合函数表达式	(1)
1.1.2 函数的奇偶性	(3)
题型一 判别(证明)几类函数的奇偶性	(3)
题型二 奇、偶函数性质的应用	(5)
1.1.3 判别(证明)函数的周期性	(6)
1.1.4 判定函数的有界性	(8)
题型一 判定在有限开区间内连续函数的有界性	(8)
题型二 判定无穷区间内连续函数的有界性	(9)
题型三 判定分段连续函数的有界性	(9)
习题 1.1	(10)
1.2 极限、连续	(12)
1.2.1 极限的概念与基本性质	(12)
题型一 正确理解极限定义中的“ $\epsilon-N$ ”、“ $\epsilon-\delta$ ”、“ $\epsilon-X$ ”语言的含义	(12)
题型二 正确区别无穷大量与无界变量	(12)
题型三 正确运用极限的保序性、保号性	(14)
题型四 正确运用极限的四则运算法则及夹逼准则求极限	(15)
题型五 正确理解乘积极限的存在性	(15)
题型六 正确理解复合函数极限的存在性	(16)
1.2.2 求未定式极限	(17)
题型一 求 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限	(17)
题型二 求 $0 \cdot \infty$ 型极限	(20)
题型三 求 $\infty - \infty$ 型极限	(21)
题型四 求幂指函数型(0^0 型, ∞^0 型, 1^∞ 型)极限	(21)
1.2.3 求数列极限	(24)
题型一 求无穷多项和的极限	(24)
题型二 求无穷多项积的极限	(27)
题型三 求有限项之和或之积的数列极限	(27)
题型四 求由递推关系式给出的数列的极限	(28)

1.2.4	求几类子函数形式特殊的函数极限	(29)
题型一	求须先考察左、右极限的函数极限	(29)
题型二	求含根式差的函数极限	(31)
题型三	求含指数函数和(或差)的函数极限	(31)
题型四	求含 $\ln f(x)$ 的函数极限, 其中 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = 1$	(32)
题型五	求含有界变量因式的函数极限	(32)
题型六	求含取整函数的函数极限	(33)
1.2.5	计算极限的两类综合题	(33)
题型一	由含未知函数的一些极限, 求含该函数的另一极限	(33)
题型二	计算需用多个知识点求出的极限	(34)
1.2.6	已知极限式的极限求其待定常数	(35)
题型一	求有理函数极限式中的待定常数	(35)
题型二	确定分式函数极限式中的待定常数	(36)
题型三	求含变项积分的极限式中的待定常数	(38)
题型四	求 $\infty \pm \infty$ 型的根式极限式中的待定常数	(40)
1.2.7	比较和确定无穷小量的阶	(40)
题型一	比较无穷小量的阶	(42)
题型二	确定无穷小量的阶数	(43)
1.2.8	讨论函数的连续性及其间断点的类型	(44)
题型一	判断函数的连续性	(44)
题型二	求函数的间断点并判断其类型	(48)
1.2.9	连续函数性质的两点应用	(50)
题型一	证明中值等式命题	(50)
题型二	证明方程实根的存在性	(52)
习题 1.2		(53)
1.3	一元函数微分学	(57)
1.3.1	导数定义的两点应用	(57)
题型一	判断函数在某点的可导性	(57)
题型二	求分式函数的极限	(61)
题型三	讨论函数性质	(62)
1.3.2	讨论分段函数的可导性及其导函数的连续性	(63)
题型一	讨论分段函数的可导性	(63)
题型二	讨论分段函数导函数的连续性	(66)
题型三	讨论某类特殊分段函数的连续性、可导性及其导函数的连续性	(66)
1.3.3	讨论含绝对值函数的可导性	(67)
题型一	讨论 $ f(x) $ 的可导性	(67)
题型二	讨论 $f(x) = \varphi(x) g(x)$ 的可导性	(68)
1.3.4	求一元函数的导数和微分	(69)
题型一	求复合函数的一阶与二阶导数	(69)

题型二	求反函数的导数	(70)
题型三	求隐函数的导数	(71)
题型四	求由参数式确定的函数的导数	(73)
题型五	求分段函数的导数	(74)
题型六	求幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 的导数	(74)
题型七	求高阶导数	(75)
题型八	求一元函数的微分	(77)
1.3.5	利用连续性、可导性确定待定常数	(79)
题型一	利用连续性确定待定常数	(79)
题型二	根据可导性确定待定常数	(81)
1.3.6	利用微分中值定理的条件及其结论解题	(82)
1.3.7	利用罗尔定理证明中值等式	(84)
题型一	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $cf'(\xi) = bg'(\xi)$, 其中 c, b 为常数	(85)
题型二	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $g(\xi)f'(\xi) + h(\xi)f(\xi) = Q(\xi)$	(85)
题型三	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi)g'(\xi) + f'(\xi)g(\xi) = 0$	(86)
题型四	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi) = 0$	(86)
题型五	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) + g'(\xi)f(\xi) = 0$	(87)
题型六	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $nf(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ (n 为正整数)	(87)
题型七	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $G(\xi) = 0$	(87)
题型八	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) + g'(\xi)[f(\xi) - b\xi] = b$	(88)
题型九	证明含两端点(及其函数值)的中值等式	(89)
题型十	已知函数在区间端点的值相等, 证明与该函数有关的中值等式	(89)
题型十一	证明题设中有定积分等式的中值等式	(90)
题型十二	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $F^{(k)}(\xi) = 0$ ($k \geq 2$)	(92)
1.3.8	拉格朗日中值定理的应用	(92)
题型一	证明与函数差值(改变量)有关的中值(不)等式	(92)
题型二	证明函数与其导函数的关系	(93)
题型三	求解与函数差值有关的问题	(96)
题型四	求中值的极限位置	(96)
1.3.9	利用柯西中值定理证明中值等式	(97)
题型一	证明两函数差值(增量)比的中值等式	(97)
题型二	证明两函数导数比的中值等式	(98)
1.3.10	证明多个中值所满足的中值等式	(99)
1.3.11	泰勒定理的几点应用	(101)
题型一	求函数的泰勒展开式	(101)
题型二	求极限	(102)
题型三	证明含高阶导函数的中值命题	(103)
题型四	证明不等式	(104)
题型五	求在同一点不同阶的导数值	(106)

1.3.12	利用导数证明不等式	(106)
题型一	证明与函数改变量有关的不等式	(107)
题型二	已知 $F(a) \geq 0$ (或 $F(b) \geq 0$), 证明 $x > a$ (或 $x < b$) 时 $F(x) > 0$	(107)
题型三	证明含常数加项的不等式	(110)
题型四	证明含两个变量(常数)的函数(常值)不等式	(111)
1.3.13	讨论函数性态	(112)
题型一	证明函数在某区间上是常数	(112)
题型二	证明(判别)函数的单调性	(113)
题型三	利用极限式讨论函数是否取得极值	(114)
题型四	利用方程讨论函数是否取极值, 其曲线是否有拐点	(115)
题型五	利用导数不等式讨论函数是否取极值, 其曲线是否有拐点	(116)
题型六	利用极值点或拐点讨论函数性质	(117)
题型七	求曲线的凹凸区间与拐点	(118)
题型八	求函数的单调区间、极值、最值	(120)
题型九	求曲线的渐近线	(122)
1.3.14	函数性态与函数图形	(124)
题型一	利用函数性态作函数图形	(124)
题型二	已知函数图形, 确定函数或其导函数性质(或图形)	(126)
题型三	已知导函数图形, 确定原来函数的性态	(127)
1.3.15	利用函数性态讨论方程的根	(128)
题型一	讨论不含参数的方程实根的存在性及其个数	(128)
题型二	讨论含参数的方程实根的存在性及其个数	(128)
题型三	已知方程根的个数, 求其参数的取值范围	(130)
1.3.16	一元函数微分学的几何应用	(131)
题型一	求平面曲线的切线方程和法线方程	(131)
题型二	求解与切线在坐标轴上的截距有关的问题	(133)
题型三	求解与两曲线相切的有关问题	(134)
题型四	求解与平面曲线的曲率有关的问题	(134)
习题 1.3		(135)
1.4	一元函数积分学	(139)
1.4.1	原函数与不定积分的关系	(139)
题型一	已知某函数, 求其原函数	(139)
题型二	已知某函数的原函数, 求该函数	(140)
1.4.2	计算不定积分	(141)
题型一	计算被积函数仅为一类或为两类不同函数的不定积分	(141)
题型二	计算简单无理函数的不定积分	(142)
题型三	求 $\int \frac{1}{(ax+b)^k} f\left[\frac{1}{(ax+b)^{k-1}}\right] dx$, 其中 $k \neq 1$ 为正实数	(145)
题型四	求 $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$	(146)

题型五	求被积函数的分母为两函数乘积,且其差为常数的不定积分	(148)
题型六	求三角函数的不定积分	(148)
题型七	求被积函数含反三角函数的积分	(149)
1.4.3	利用定积分性质计算定积分	(150)
题型一	利用其几何意义计算定积分	(150)
题型二	计算对称区间上的定积分	(151)
题型三	计算周期函数的定积分	(152)
题型四	利用定积分的常用计算公式求定积分	(152)
题型五	计算被积函数含函数导数或已知其导数的函数的积分	(154)
题型六	比较和估计定积分的大小	(155)
题型七	求解含积分值为常数的函数方程	(156)
题型八	计算几类需分子区间积分的定积分	(156)
题型九	计算含参数的定积分	(159)
题型十	求需换元计算的定积分	(160)
题型十一	求连续函数定积分的极限	(161)
1.4.4	求解与变限积分有关的问题	(163)
题型一	计算含变限积分的极限	(163)
题型二	求变限积分的导数	(165)
题型三	求变限积分的定积分	(167)
题型四	讨论变限积分函数的性态	(168)
1.4.5	证明定积分等式	(170)
题型一	证明定积分的变换公式	(170)
题型二	证明定积分的中值等式	(172)
1.4.6	证明积分不等式	(173)
题型一	证明积分限相等时不等式两端成为零的积分不等式	(173)
题型二	证明函数及其导函数所满足的积分不等式	(174)
题型三	证明 $\int_a^b f(x)dx$ (或 $ \int_a^b f(x)dx $) $\leq k$ (或 $\geq k$), k 为常数	(175)
题型四	证明题设中有二阶导数大(或小)于等于零的定积分不等式	(176)
1.4.7	计算反常积分	(177)
题型一	计算无穷区间上的反常积分	(177)
题型二	判别 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ ($a > 0$) 与 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ ($a > 0$) 的敛散性	(180)
题型三	计算无界函数的反常积分	(180)
题型四	判别 $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ 与 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ 的敛散性	(183)
题型五	判别混合型反常积分的敛散性	(183)
1.4.8	定积分的应用	(184)
题型一	已知曲线方程,求其所围平面图形的面积	(184)
题型二	已知曲线所围平面图形的面积(或其旋转体体积)反求该曲线	(187)

题型三	计算旋转体体积	(187)
题型四	计算旋转体的侧(表)面积	(189)
题型五	计算平行截面面积已知的立体体积	(190)
题型六	计算平面曲线的弧长	(191)
题型七	求解几何应用与最值问题相结合的应用题	(192)
题型八	用定积分计算质心(质量中心)	(195)
题型九	计算物体沿直线所做的功	(196)
题型十	计算压力与引力	(197)
题型十一	求函数在区间上的平均值	(200)
习题 1.4		(200)
1.5	多元函数微分学	(204)
1.5.1	二(多)元函数微分学中的几个概念	(204)
题型一	依定义判别二元函数在某点是否连续、可偏导及可微	(204)
题型二	讨论二元函数连续、可偏导及可微之间的关系	(207)
1.5.2	计算偏导数和全微分	(208)
题型一	利用隐函数存在定理确定隐函数	(208)
题型二	计算显函数的偏导数	(208)
题型三	求抽象复合函数的偏导数	(209)
题型四	计算隐函数的偏导数	(214)
题型五	作变量代换将偏导数满足的方程变形	(216)
题型六	求二元函数的全微分	(217)
1.5.3	多元函数微分学的应用	(218)
题型一	求二元函数的极值	(218)
题型二	求二(多)元函数的条件极值	(220)
题型三	求二(多)元函数的最值	(222)
习题 1.5		(224)
1.6	二重积分	(226)
1.6.1	利用二重积分性质求解与二重积分有关的问题	(226)
1.6.2	交换积分次序及转换二(累)次积分	(228)
题型一	交换二(累)次积分的积分次序	(228)
题型二	转换二(累)次积分	(229)
1.6.3	用直角坐标系计算二重积分	(230)
题型一	计算需根据积分区域选择积分次序的二重积分	(231)
题型二	计算需根据被积函数选择积分次序的二重积分	(231)
题型三	计算积分区域具有对称性、被积函数具有奇偶性的二重积分	(233)
题型四	计算积分区域关于直线 $y=x$ 对称的二重积分	(236)
题型五	分块计算二重积分	(238)
题型六	计算无界区域上较简单的二重积分	(241)
1.6.4	用极坐标系计算二重积分	(241)

题型一	计算圆域 $x^2+y^2 \leq a(a>0)$ 上的二重积分	(242)
题型二	计算圆域 $x^2+y^2 \leq 2ax(a>0)$ 上的二重积分	(242)
题型三	计算圆域 $x^2+y^2 \leq -2ax(a>0)$ 上的二重积分	(243)
题型四	计算圆域 $x^2+y^2 \leq 2by(b>0)$ 上的二重积分	(243)
题型五	计算圆域 $x^2+y^2 \leq -2by(b>0)$ 上的二重积分	(244)
题型六	计算圆域 $x^2+y^2 \leq 2ax+2by+c(a,b>0)$ 上的二重积分	(245)
题型七	计算两圆域公共部分上的二重积分	(246)
1.6.5	求含二重积分的极限	(247)
习题 1.6		(248)
1.7	常微分方程	(251)
1.7.1	求解一阶线性微分方程	(251)
题型一	求解可分离变量的微分方程	(251)
题型二	求解齐次微分方程	(252)
题型三	求解一阶线性微分方程	(252)
题型四	求解几类可化为一阶线性方程的方程	(254)
题型五	求解由自变量与因变量的两增量关系给出的一阶方程	(256)
题型六	求满足某种性质的一阶线性方程的特解	(256)
1.7.2	求解线性微分方程	(258)
题型一	利用线性微分方程解的结构和性质求解有关问题	(258)
题型二	求解几类可降阶的高阶微分方程	(259)
题型三	求解常系数齐次线性方程	(261)
题型四	求解二阶常系数非齐次线性方程	(262)
题型五	求解欧拉方程	(267)
题型六	求解含变限积分的方程	(268)
1.7.3	已知特解反求其常系数线性方程	(268)
题型一	已知其特解,反求该齐次方程	(268)
题型二	已知其特解,反求该非齐次方程	(269)
1.7.4	求解微分方程在几何与物理学上的简单应用题	(271)
题型一	已知某曲线所围图形的几何量所满足的关系,反求该曲线	(271)
题型二	求解与物理量有关的简单应用问题	(272)
习题 1.7		(276)

第 2 篇 线性代数

2.1	计算行列式	(279)
2.1.1	计算几类数字型行列式	(279)
题型一	计算非零元素(主要)在一条或两条对角线上的行列式	(279)
题型二	计算非零元素在三条线上的行列式	(282)
题型三	计算行(列)和相等的行列式	(283)
题型四	计算范德蒙行列式	(284)
题型五	求代数余子式之和的值	(285)
题型六	求行列式中含某因子的所有项	(287)
题型七	计算三阶行列式	(287)

2.1.2	计算抽象矩阵的行列式	(288)
题型一	求由行(列)向量表示的矩阵的行列式的值	(288)
题型二	计算与伴随矩阵有关的矩阵行列式	(289)
题型三	求满足矩阵方程的某矩阵行列式之值	(289)
题型四	已知某矩阵行列式的值,求相关联矩阵的行列式的值	(290)
题型五	计算含零子块的四分块矩阵的行列式	(291)
题型六	证明方阵的行列式等于零或不等于零	(292)
题型七	利用特征值计算矩阵行列式	(293)
2.1.3	克莱姆法则的应用	(293)
习题 2.1		(295)
2.2	矩阵	(298)
2.2.1	证明矩阵的可逆性	(298)
题型一	已知一矩阵等式,证明有关矩阵可逆,并求其逆矩阵	(298)
题型二	证明矩阵 A 可逆,且 $A^{-1} = B$	(300)
题型三	证明和(差)矩阵可逆	(301)
题型四	求矩阵的逆矩阵,该矩阵含一(些)矩阵的逆矩阵	(301)
题型五	证明方阵为不可逆矩阵	(302)
2.2.2	矩阵元素给定,求其逆矩阵的方法	(302)
2.2.3	求解与伴随矩阵有关的问题	(304)
题型一	计算与伴随矩阵有关的矩阵行列式(参阅 2.1.2 节题型二)	(305)
题型二	求与伴随矩阵有关的矩阵的逆矩阵	(306)
题型三	求与伴随矩阵有关的矩阵的秩	(307)
题型四	求伴随矩阵	(307)
2.2.4	计算 n 阶矩阵的高次幂	(309)
题型一	计算能分解为一列向量与一行向量相乘的矩阵的高次幂	(309)
题型二	计算能相似对角化的矩阵的高次幂	(310)
题型三	计算能分解为两个可交换矩阵之和的矩阵的高次幂	(311)
题型四	计算其平方等于原矩阵或单位矩阵倍数的矩阵高次幂	(311)
2.2.5	求矩阵的秩	(313)
题型一	求元素具体给定的矩阵的秩	(313)
题型二	求抽象矩阵的秩	(314)
题型三	已知矩阵的秩,求其待定常数	(316)
2.2.6	分块矩阵乘法运算的应用举例	(316)
2.2.7	求解矩阵方程	(318)
题型一	求解含单位矩阵加项的矩阵方程	(319)
题型二	求解只含一个未知矩阵的矩阵方程	(320)
题型三	求解含多个未知矩阵的矩阵方程	(321)
题型四	求与已知矩阵可交换的所有矩阵	(323)
2.2.8	初等变换与初等矩阵关系的应用	(324)
题型一	用初等矩阵表示相应的初等变换	(324)
题型二	利用初等矩阵逆矩阵的性质计算矩阵	(325)
2.2.9	判别两同型矩阵等价的有关问题	(327)

习题 2.2	(328)
2.3 向量	(332)
2.3.1 判别向量组线性相关、线性无关	(332)
题型一 用线性相关性定义做选择题和填空题	(332)
题型二 判别分量已知的向量组的线性相关性	(333)
题型三 证明几类向量组的线性相关性	(334)
题型四 已知向量组的线性相关性,求其待定常数	(340)
2.3.2 判定一向量能否由向量组线性表示	(341)
题型一 判定分量已知的向量能否由向量组线性表示	(341)
题型二 判定一抽象向量能否由向量组线性表示	(342)
题型三 判定一向量组能否由另一向量组线性表示	(343)
2.3.3 两向量组等价的常用证法	(345)
2.3.4 向量组的秩与极大无关组	(348)
题型一 求分量给出的向量组的秩及其极大无关组	(348)
题型二 将向量用极大无关组线性表示	(349)
题型三 证明与抽象向量组的秩有关的问题	(350)
题型四 证一向量组为一极大无关组	(351)
2.3.5 已知一向量(组)线性表示情况,求其所含待定常数	(352)
2.3.6 将线性无关向量组正交规范化	(355)
习题 2.3	(356)
2.4 线性方程组	(359)
2.4.1 判定线性方程组解的情况	(359)
题型一 判定齐次线性方程组解的情况	(359)
题型二 判定非齐次线性方程组解的情况	(361)
2.4.2 由其解反求方程组或其参数	(363)
题型一 已知 $AX=0$ 的解的情况,反求 A 中参数	(363)
题型二 已知 $AX=b$ 的解的情况,反求方程组中的参数	(364)
题型三 已知其基础解系,求该方程组的系数矩阵	(365)
2.4.3 证明一组向量为基础解系的常用方法	(366)
2.4.4 基础解系和特解的简便求法	(368)
2.4.5 求解含参数的线性方程组	(369)
题型一 求解方程个数与未知数个数相等的线性方程组	(369)
题型二 求解方程个数与未知数个数不等的线性方程组	(372)
题型三 求解参数仅出现在常数项的线性方程组	(373)
题型四 求含参数的方程组满足一定条件的通解	(374)
2.4.6 求抽象线性方程组的通解	(374)
题型一 A 没有具体给出,求 $AX=0$ 的通解	(375)
题型二 已知 $AX=b$ 的特解,求其通解	(376)
题型三 利用线性方程组的向量形式求(证明)其解	(377)
2.4.7 求两线性方程组的非零公共解	(378)
题型一 求两齐次线性方程组的非零公共解	(378)
题型二 证明两齐次线性方程组有非零公共解	(380)

题型三	讨论两方程组同解的有关问题	(380)
习题 2.4		(382)
2.5	矩阵的特征值、特征向量	(387)
2.5.1	求矩阵的特征值、特征向量	(387)
题型一	求元素给出的矩阵的特征值、特征向量	(387)
题型二	求(证明)抽象矩阵的特征值、特征向量	(389)
2.5.2	由特征值和(或)特征向量反求其矩阵	(391)
题型一	由特征值和(或)特征向量反求矩阵的待定常数	(391)
题型二	已知特征值、特征向量,反求其矩阵	(393)
题型三	计算 $A^m\beta$, 其中 β 为列向量, A 为方阵	(395)
2.5.3	求相关联矩阵的特征值、特征向量	(396)
2.5.4	判别同阶方阵是否相似	(398)
题型一	判别方阵是否可对角化	(398)
题型二	判别两同阶方阵是否相似	(400)
2.5.5	相似矩阵性质的简单应用	(401)
2.5.6	与两矩阵相似有关的计算	(403)
题型一	矩阵 A 可相似对角化, 求 A 中待定常数及可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 A 的特征值	(403)
题型二	A 为实对称矩阵, 求 A 中待定常数及正交矩阵 Q , 使 $Q^{-1}AQ = Q^T A Q = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 A 的特征值	(403)
题型三	已知矩阵 A 和可逆矩阵 P 满足一等式, 求矩阵 B , 使 $P^{-1}AP = B$	(405)
习题 2.5		(405)
2.6	二次型	(408)
2.6.1	求二次型的矩阵及其秩	(408)
题型一	用矩阵形式表示二次型	(408)
题型二	求二次型的秩	(409)
2.6.2	化标准形及由标准形确定二次型	(409)
题型一	化二次型为标准形	(410)
题型二	已知二次型的标准形, 确定该二次型	(413)
2.6.3	判别(证明)实二次型(实对称矩阵)的正定性	(414)
题型一	判别具体给定的二次型或其矩阵的正定性	(414)
题型二	判别或证明抽象二次型(实对称矩阵)的正定性	(415)
题型三	确定待定常数使二次型或其矩阵正定	(417)
2.6.4	判别两矩阵是否合同	(417)
题型一	判别(证明)两实对称矩阵合同	(417)
题型二	判别(证明)两矩阵不合同	(419)
2.6.5	讨论矩阵等价、相似及合同的关系	(419)
习题 2.6		(421)
	习题答案与提示	(423)

第 1 篇 高等数学

1.1 函 数

1.1.1 求两类函数的表达式

题型一 已知一函数求其反函数的表达式

求反函数的方法是在原函数 $y=f(x)$ 中解出 x , 再交换 x 与 y 的位置即得所求的反函数 $y=f^{-1}(x)$, 同时得到 f^{-1} 的定义域即为 f 的值域.

如 $y=f(x)$ 为分段函数, 且在各分段区间上都是单调函数, 则分别求出各分段区间上的反函数就得到该分段函数的反函数, 且 $f(x)$ 的每段的值域就是其对应分段区间上反函数的定义域.

例 1[1996 年 2]* 设函数 $f(x)=\begin{cases} 1-2x^2, & x < -1, \\ x^3, & -1 \leq x \leq 2, \\ 12x-16, & x > 2. \end{cases}$ 写出 $f(x)$ 的反函数的表达式.

解 (1) 当 $x < -1$ 时, $y=1-2x^2 < -1$, 从 $y=1-2x^2$ 中解出 x 得到 $x=-\sqrt{(1-y)/2}$, 交换 x 与 y 的位置得到反函数 $y=-\sqrt{(1-x)/2}, x < -1$.

(2) 当 $-1 \leq x \leq 2$ 时, $-1 \leq y=x^3 \leq 8$. 从 $y=x^3$ 中解出 x , 得到 $x=\sqrt[3]{y}$, 交换 x 与 y 的位置得到反函数 $y=\sqrt[3]{x}, -1 \leq x \leq 8$.

(3) 当 $x > 2$ 时, $y=12x-16 > 8$, 从 $y=12x-16$ 中解出 x 得到 $x=(y+16)/12$, 交换 x 与 y 的位置得反函数为 $y=(x+16)/12, x > 8$.

综上得到 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式为 $g(x)=f^{-1}(x)=\begin{cases} -\sqrt{(1-x)/2}, & x < -1, \\ \sqrt[3]{x}, & -1 \leq x \leq 8, \\ (x+16)/12, & x > 8. \end{cases}$

题型二 求分段函数的复合函数表达式

常用分段代入法或代入法求之. 为方便计, 设

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x \leq \varphi_1(x), \\ f_2(x), & x > \varphi_2(x); \end{cases} \quad g(x)=\begin{cases} g_1(x), & x \leq \psi_1(x), \\ g_2(x), & x > \psi_2(x). \end{cases}$$

为求 $f[g(x)]$, 先将 $g(x)$ 代入 $f(x)$ 表达式中的所有 x , 得到

$$f[g(x)]=\begin{cases} f_1[g(x)], & g(x) \leq \varphi_1[g(x)], \\ f_2[g(x)], & g(x) > \varphi_2[g(x)]. \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

②

* 例 1[1996 年 2]表示例 1 是 1996 年数学试卷二的全国统考试题. 下同.

再将 $g(x)$ 的分段表示式 $g_1(x)$ 分别代入式①、式②右端的 $g(x)$, 并将所得不等式与 $g_1(x)$ 的自变量的变化范围 $x \leq \varphi_1(x)$ 求交. 对 $g(x)$ 的另一分段表示式 $g_2(x)$ 也同样处理, 于是得到

$$f[g(x)] = \begin{cases} f_1[g_1(x)], & g_1(x) \leq \varphi_1[g_1(x)], & x \leq \varphi_1(x), & \text{③} \\ f_2[g_1(x)], & g_1(x) > \varphi_1[g_1(x)], & x \leq \varphi_1(x), & \text{④} \\ f_1[g_2(x)], & g_2(x) \leq \varphi_1[g_2(x)], & x > \varphi_2(x), & \text{⑤} \\ f_2[g_2(x)], & g_2(x) > \varphi_1[g_2(x)], & x > \varphi_2(x). & \text{⑥} \end{cases}$$

分别求解式③、式④、式⑤、式⑥中的不等式组(其中有些不等式组可能无解), 即得复合函数 $f[g(x)]$ 各段自变量的取值范围. 从而求得所求的分段复合函数.

例 2 [1997 年 2] 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0, \\ x+2, & x > 0, \end{cases} f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x, & x \geq 0, \end{cases}$ 则 $g[f(x)] = (\quad)$.

(A) $\begin{cases} 2+x^2, & x \leq 0, \\ 2-x, & x > 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 2-x, & x < 0, \\ 2+x, & x > 0 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases}$

解一 先将 $f(x)$ 代入 $g(x)$ 表示式中的所有 x , 得到 $g[f(x)] = \begin{cases} 2-f(x), & f(x) \leq 0, & \text{①} \\ f(x)+2, & f(x) > 0. & \text{②} \end{cases}$

再将 $f(x)$ 的分段表示式分别代入式①与式②右端的 $f(x)$, 并将所得的不等式与分段表示式相应的自变量的变化范围求交, 得到

$$g[f(x)] = \begin{cases} 2-x^2, & x^2 \leq 0, & x < 0, & \text{③} \\ x^2+2, & x^2 > 0, & x < 0, & \text{④} \\ 2+x, & -x \leq 0, & x \geq 0, & \text{⑤} \\ -x+2, & -x > 0, & x \geq 0. & \text{⑥} \end{cases}$$

不等式组③、⑥无解. 求解不等式组④、⑤分别得到 $x < 0, x \geq 0$. 此为所求的复合函数自变量的分段取值范围. 因而

$$g[f(x)] = \begin{cases} x^2+2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0. \end{cases} \quad \text{仅(D)入选.}$$

解二 当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^2 > 0$, 则 $g[f(x)] = f(x) + 2 = x^2 + 2$. 当 $x \geq 0$ 时 $f(x) = -x \leq 0$, 则 $g[f(x)] = 2 - f(x) = 2 - (-x) = 2 + x$, 故 $g[f(x)] = \begin{cases} x^2+2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0. \end{cases}$ 仅(D)入选.

注意 两分段函数 $f(x), g(x)$ 的分段点相同时, 用代入法求 $f[g(x)]$ 或 $g[f(x)]$ 较简; 分段点不同时, 常用上述分段代入法求 $f[g(x)]$ 或 $g[f(x)]$.

例 3 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1, \\ x, & x \geq 1, \end{cases} \varphi(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0, \\ x^2-1, & x \geq 0, \end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

解 第一步将 $\varphi(x)$ 代入 $f(x)$ 表示式中的所有 x , 得到 $f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x) < 1, \\ \varphi(x), & \varphi(x) \geq 1. \end{cases}$

第二步用 $\varphi(x)$ 的各个分段函数分别替换上式中右边的 $\varphi(x)$, 有

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{x+2}, & x+2 < 1, & x < 0, \\ x+2, & x+2 \geq 1, & x < 0, \\ e^{x^2-1}, & x^2-1 < 1, & x \geq 0, \\ x^2-1, & x^2-1 \geq 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

第三步求解上式右边的四个不等式组, 确定 $f[\varphi(x)]$ 的各段取值范围.

解 $\begin{cases} x+2 < 1, \\ x < 0 \end{cases}$ 得到 $x < -1$; 解 $\begin{cases} x+2 \geq 1, \\ x < 0 \end{cases}$ 得到 $-1 \leq x < 0$;

解 $\begin{cases} x^2 - 1 < 1, \\ x \geq 0 \end{cases}$ 得到 $0 \leq x < \sqrt{2}$; 解 $\begin{cases} x^2 - 1 \geq 1, \\ x \geq 0 \end{cases}$ 得到 $x \geq \sqrt{2}$.

最后得到所求的分段复合函数为
$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{x+2}, & x < -1, \\ x+2, & -1 \leq x < 0, \\ e^{x^2-1}, & 0 \leq x < \sqrt{2}, \\ x^2-1, & x \geq \sqrt{2}. \end{cases}$$

1.1.2 函数的奇偶性

题型一 判别(证明)几类函数的奇偶性

类型(一) 判别经四则运算后的函数的奇偶性.

命题 1.1.2.1 (1) 奇函数乘(除)偶函数=奇函数;(2) 奇函数乘(除)奇函数=偶函数;(3) 偶函数乘(除)偶函数=偶函数;(4) 奇函数加(减)奇函数=奇函数;(5) 偶函数加(减)偶函数=偶函数;(6) 不恒等于零的偶函数(不恒等于零的奇函数)加减不恒等于零的奇函数(不恒等于零的偶函数)为非奇非偶函数;(7) 不恒等于零的偶(奇)函数乘以非奇非偶函数,一般不再是偶(奇)函数,而是非奇非偶函数.

例 1 [1987年2] $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x} (-\infty < x < +\infty)$ 是().

(A) 有界函数 (B) 单调函数 (C) 周期函数 (D) 偶函数

解 因 $|x \sin x|$ 是偶函数, $e^{\cos x}$ 也是偶函数, 由命题 1.1.2.1(3)知, $f(x)$ 是偶函数, 仅(D)入选.

类型(二) 判别自变量带相反符号的两同名函数代数和的奇偶性.

命题 1.1.2.2 设 $f(x)$ 为定义在 $[-a, a]$ (a 可为无穷) 上非常数的任意函数, 则

(1) $f(x) + f(-x)$ 为偶函数;(2) $f(x) - f(-x)$ (或 $f(-x) - f(x)$) 为奇函数.

即自变量带相反符号且为非常数的两同名函数之和为偶函数, 之差为奇函数.

例 2 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为非常数的任意函数, 试判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) + f(-x) + g(x) + g(-x)$; (2) $f(x) - f(-x) + g(x) + g(-x)$;

(3) $f(x) - f(-x) - g(x) + g(-x)$; (4) $f(x) + f(-x) - g(x) - g(-x)$.

解 (1) 因为 $f(x) + f(-x)$, $g(x) + g(-x)$ 均为偶函数, 其和必为偶函数.

(2) 因 $f(x) - f(-x)$ 为奇函数, $g(x) + g(-x)$ 为偶函数, 其和为非奇非偶函数.

(3) $f(x) - f(-x)$, $g(x) - g(-x)$ 均为奇函数, 其差为奇函数.

(4) $f(x) + f(-x)$, $g(x) + g(-x)$ 均为偶函数, 其差为偶函数.

类型(三) 判别复合函数的奇偶性.

利用下述命题判别之.

命题 1.1.2.3 (1) 若函数 $y=f(t)$, $t=g(x)$ 的奇偶性不同, 则其复合函数 $y=f[g(x)]$ 必为偶函数; 若奇偶性相同, 则其复合函数 $y=f[g(x)]$ 与外层函数 $f(x)$ 具有相同的奇偶性.

(2) f 不具有奇偶性时, 一般 $f(g_o)$, $g_o(f)$, $g_e(f)$, $f(f)$ 及 $f \cdot f$ 不具有奇偶性但 $f(g_e)$ 为偶函数, 其中 g_o 为奇函数, g_e 为偶函数.

例 3 设 f 为偶函数, g 为奇函数, 试考察下列函数的奇偶性: