

线性时变 离散系统

王宏禹 邱天爽 著



国防工业出版社

National Defense Industry Press

线性时变离散系统

王宏禹 邱天爽 著



国防工业出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

本书比较全面系统地阐述了线性时变离散系统的基本理论、基本方法及其应用。全书共9章,分别为:线性时不变系统基本理论概述;线性时变离散系统的基本理论;线性时变数字滤波器的设计;求解线性离散系统差分方程的E变换法;求解线性时变系统差分方程的广义Z变换法与B-S(Belal-Shenoi)变换法;线性时变系统的极点与零点;非平稳随机信号时变参数模型估计;线性时变系统的离散状态方程与最佳滤波;线性周期时变离散系统。本书的特点是:取材广泛、系统性强、结构合理、内容新颖、概念清楚、理论联系实际并具有可读性。本书总结了国内外关于线性时变离散系统的研究成果,是国内外本领域具有显著特色的最新著作,可作为研究生教材或教学参考书,也可供从事信号处理的高等院校教师和科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性时变离散系统 / 王宏禹, 邱天爽著. —北京: 国防工业出版社, 2008. 7

ISBN 978-7-118-05564-1

I. 线... II. ①王... ②邱... III. 线性系统: 时变系统: 离散系统 IV. 0231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 009705 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100044)

北京市李史山胶印厂

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 13 字数 292 千字

2008 年 7 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 28.00 元

(本书如有印装错误, 我社负责调换)

国防书店: (010) 68428422

发行邮购: (010) 68414474

发行传真: (010) 68411535

发行业务: (010) 68472764

前言

系统定义为由输入至输出的映射或变换。系统有多种划分方法,包括:①视映射或变换为线性的与非线性的,分为线性系统与非线性系统;②视输入与输出是变量的连续函数与数字序列,分为连续系统与离散或数字系统;③视系统参数是否时变分为时不变或时变系统。在自然界,确有许多非线性系统,但至今为止还没有分析非线性系统的一般方法。由于大多数工程问题是线性的,或在规定条件下是线性的,因此,对研究线性系统具有重要意义。对于线性时不变连续与离散的,可分别用线性常系数微分方程与线性常系数差分方程来描述,已有成熟的数学方法求解和众多文献作系统阐述。对于线性时变连续系统,可用线性时变系数微分方程来描述,已有一些一般求解方法,在文献中有少量介绍。对于线性时变离散系统,尚无一般求解方法,但对其一些特殊类型,已研究出一些变换方法,可将其化为线性时变连续系统或线性时不变离散系统,从而可用已有的成熟数学方法求解,目前对线性时变系统理论方法,还缺乏系统阐述。

信号与系统是紧密相联的。现代信号处理向着非线性、非高斯与非平稳方向发展。白噪声与平稳随机信号通过线性时变系统,其输出为非平稳随机信号。现在非平稳随机信号分析与处理越来越受到人们的重视,因此,与其密切相关的线性时变系统理论,自然也应受到更多的重视。

作者于20世纪80年代中期就开始了线性时变滤波器的研究,20世纪90年代中期结合对非平稳随机信号分析与处理的研究,对线性时变系统进行了进一步的研究。现根据线性时变系统理论与应用的需要,将分散于文献有关线性时变系统理论方法,并包括作者较多的研究成果,进行系统化,写成此书。

由于线性时变系统理论是在线性时不变系统理论的基础上发展起来的,并且研究线性时变系统又常常利用变换方法,将其化为线性时不变系统,然后利用后者成熟的理论方法去解决。因此,线性时不变系统理论方法为其理论基础,有必要在本书之首进行必要的概述。然后,本书采用与线性时不变系统理论方法相平行的关系进行阐述。此外,考虑实际应用的需要,对线性时变系统的阐述以离散系统为主。据此,本书共9章,依次为:线性时不变系统基本理论概述;线性时变系统基本理论;线性时变数字滤波器的设计;求解线性时变系统差分方程的E变换法;求解线性时变系统差分方程的广义Z变换法与B-S(Belal-Shenoi)变换法;线性时变系统的极点与零点;非平稳随机信号时变参数模型估计;线性时变系统的离散状态方程与最佳滤波;线性周期时变离散系统。

本书是由大连理工大学研究生院资助出版的研究生教材,对其资助致以深切谢意。

线性时变离散系统理论与应用还处于发展中,比较全面与系统进行阐述成书是有难度的,且作者水平有限,书中难免存在缺点与不足之处,恳请读者批评指正。

王宏禹 邱天爽

2007年12月于大连理工大学

目 录

第 1 章 线性时不变系统理论概述	1
1.1 线性系统的特征	1
1.2 线性系统与线性方程的关系	2
1.2.1 线性方程与线性系统的描述关系	2
1.2.2 线性方程与线性系统特性的关系	2
1.3 线性时不变系统的响应特性	5
1.4 线性时不变系统的零、极点	7
1.4.1 线性时不变连续系统的零、极点	7
1.4.2 线性时不变离散系统的零、极点	9
1.5 线性模拟滤波器与线性数字滤波器	9
1.5.1 巴特沃斯模拟滤波器设计	10
1.5.2 巴特沃斯数字滤波器设计	12
1.6 平稳随机信号模型与最佳滤波	17
1.6.1 平稳随机信号模型	17
1.6.2 统计最佳滤波	20
第 2 章 线性时变离散系统的基本理论	24
2.1 线性时变离散系统特性的描述	24
2.1.1 时变脉冲响应与格林函数	24
2.1.2 广义传递函数与时变频率响应	25
2.1.3 时变脉冲响应的傅里叶变换	27
2.2 线性时变离散系统的线性时变系数差分方程	27
2.2.1 时变脉冲响应或格林函数与线性时变系数差分方程的关系	27
2.2.2 广义传递函数与线性时变系数差分方程的关系	35
2.3 线性时变离散系统的稳定性	43
2.3.1 线性时变离散系统稳定性的时域条件	43
2.3.2 线性时变离散系统稳定性的频域条件	44
2.3.3 线性时变递归离散系统的稳定性	46
2.4 线性时变离散系统的级联及随机输入与输出的关系	48
2.4.1 线性时变离散系统的级联	48
2.4.2 线性时变离散系统的随机输入与输出的关系	49
第 3 章 线性时变数字滤波器的设计	51
3.1 分段线性时不变数字滤波器组合设计法	51

3.1.1	2 条曲线的拼接	51
3.1.2	分段线性时不变滤波器组合的线性时变滤波器	52
3.2	递归型带通时变数字滤波器的设计	54
3.3	2 维时不变映射设计法	57
3.3.1	1 维线性时变数字滤波器输入、输出序列映射为 2 维序列法	57
3.3.2	1 维线性时变数字滤波由 2 维线性递归型时不变数字滤波器的设计	58
3.3.3	设计示例	59
3.4	时域奇异值分解(SVD)设计法	59
3.4.1	时域 SVD 法	59
3.4.2	设计示例	62
3.5	频域 SVD 设计法	63
3.5.1	频域 SVD 分解法	63
3.5.2	频域 SVD 的快速算法	64
3.6	时域最小平方误差设计法	68
3.6.1	时域最小平方误差法	68
3.6.2	设计示例	70
第 4 章	求解线性时变系统差分方程的 E 变换法	72
4.1	E 变换的定义与性质	72
4.1.1	E 变换的定义	72
4.1.2	E 变换的性质	73
4.1.3	E 逆变换	76
4.1.4	E 变换表	76
4.1.5	与 Z 变换的关系	78
4.2	E 变换法求解线性差分方程	78
4.2.1	求解线性常系数差分方程	78
4.2.2	求解齐次线性时变系数差分方程	79
4.2.3	求解非齐次线性时变系数差分方程	82
4.3	E 变换法求解线性时变离散系统的格林函数	83
4.3.1	格林函数与其相应的线性时变差分方程的关系	83
4.3.2	E 变换法求解格林函数	85
4.4	线性离散系统差分方程求解法的统一	87
4.4.1	求解线性常系数差分方程法	87
4.4.2	求解线性时变系数差分方程法	89
4.4.3	求解线性常系数随机差分方程法	91
4.4.4	求解线性时变系数随机差分方程法	94
第 5 章	求解线性时变离散系统差分方程的广义 Z 变换法与 B-S 变换法	97
5.1	求解一类线性时变离散系统差分方程的广义 Z 变换法	97
5.1.1	广义正延迟算子与其广义 Z 变换	97
5.1.2	求解一类线性时变离散系统差分方程的广义 Z 变换法	98

5.1.3	具有广义负延迟算子的广义 Z 变换法	101
5.2	求解一类线性时变系统差分方程与微分方程的 B-S 变换法	103
5.2.1	求解一类线性时变离散系统差分方程的 B-S 变换法	104
5.2.2	B-S 变换与 Z 变换、E 变换及广义 Z 变换的关系	105
5.2.3	求解一类线性时变连续系统微分方程的 B-S 变换法	106
第 6 章	线性时变系统的极点与零点	108
6.1	2 阶线性时变离散系统的极点与零点	108
6.1.1	采用左(或负)移算子的情况	108
6.1.2	因式分解性质	111
6.1.3	采用右(或正)移算子的情况	115
6.2	n 阶线性时变离散系统的极点与零点	116
6.3	n 阶线性时变离散系统的零输入响应与渐近稳定性	118
6.4	基于线性时变离散系统差分方程的调幅-调频(AM-FM)信号分析	120
6.4.1	时不变正弦信号的差分方程	120
6.4.2	时变实正弦信号的差分方程	121
6.4.3	时变复正弦信号的差分方程	126
6.5	线性时变连续系统的极点与零点	128
6.6	应用 P 算子研究线性时变离散系统的极点与零点	131
附录	$\sum_{i=k_0+1}^{k_0+m} \sin[\alpha(i-k_0)] \approx \frac{1}{\alpha}[1 - \cos(\alpha m)]$ 的证明	133
第 7 章	非平稳随机信号时变参数模型估计	134
7.1	时变参数模型的基函数展开法	134
7.2	AR 时变参数模型估计	135
7.2.1	纯 AR 时变参数模型估计	135
7.2.2	ARMA 时变参数模型中 AR 部分时变参数估计	136
7.2.3	AR 模型时变参数估计的递推最小二乘(RLS)算法	137
7.2.4	仿真实验示例	138
7.3	白噪声中时变正弦组合模型估计	139
7.3.1	白噪声中时变正弦组合为一特殊的 ARMA 时变参数模型	139
7.3.2	特征技术求解法	140
7.4	ARMA 时变参数模型估计	142
7.4.1	ARMA 模型的逆函数	142
7.4.2	ARMA 时变参数模型多项式算子代数	143
7.4.3	ARMA 时变参数模型多项式-代数估计法	145
第 8 章	线性时变系统的时变离散状态方程与最佳滤波	150
8.1	线性时变系统的时变离散状态方程	150
8.1.1	由时变连续状态方程离散化而得的时变离散状态方程	150
8.1.2	由线性时变系数差分方程而得的离散状态方程	155
8.2	研究一类线性时变离散系统的代数变换法	159

8.2.1	代数变换法及其对线性时变离散系统稳定性的研究	159
8.2.2	矩阵 A_1 的存在性	161
8.2.3	计算示例	162
8.3	线性时变离散系统的最佳滤波	163
8.3.1	一般情况的卡尔曼滤波	163
8.3.2	白噪声卡尔曼滤波	169
8.3.3	有色噪声卡尔曼滤波	170
第9章	线性周期时变离散系统	172
9.1	线性周期时变离散系统采用格林函数描述时的分块处理法	172
9.1.1	取样率转换与修改的Z变换	172
9.1.2	线性周期时变离散系统的格林函数描述及其分块处理法	175
9.2	采用线性周期时变系数差分方程与周期时变状态方程描述时的 分块处理法	177
9.2.1	采用线性周期时变系数差分方程描述线性周期时变离散系统的 分块处理法	177
9.2.2	采用周期时变状态方程描述时的分块处理法	179
9.2.3	线性周期时变离散系统的稳定性	183
9.3	线性周期时变离散系统的自适应实现	184
9.3.1	平稳与周期平稳随机信号通过线性周期时变离散系统	184
9.3.2	线性周期时变离散系统的自适应实现法	186
9.3.3	线性周期时变离散系统周期 T 的自适应估计算法	188
9.3.4	仿真实验	189
9.4	与多取样率数字滤波器的关系	190
9.4.1	多取样率数字滤波器	191
9.4.2	多取样率数字滤波器为线性周期时变离散系统的一种特殊情况	191
附录	式(9-24)的推演	193
参考文献		196

第 1 章 线性时不变系统理论概述

系统定义为输入至输出的映射或变换。若输入与输出都是变量的连续函数,则系统是连续的或模拟的,若输入与输出都是数字的,则系统是离散的或数字的。系统视映射或变换为线性的或非线性的分为线性系统与非线性系统。线性系统又分为时不变的与时变的。线性时不变系统理论是研究线性时变系统的基础,在研究中常将线性时变系统通过变化为线性时不变系统,从而便于用线性时不变系统的成熟理论进行研究。为此,本书先对线性时不变系统理论进行必要的概述。在叙述中采用线性连续与离散系统理论平行的方式,以便对两者的关系有清楚的了解。

1.1 线性系统的特征

线性连续系统与线性离散系统具有相同的特征,现以线性连续系统为例来说明。

设系统输入为 $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$ 时,其输出分别为 $y_1(t)$ 与 $y_2(t)$,即

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) \quad (1-1)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) \quad (1-2)$$

对于线性系统,有

$$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t) \quad (1-3)$$

故线性系统具有叠加性。若有 n 个相同的输入,即

$$x_1(t) = x_2(t) = \cdots = x_n(t) \quad (1-4)$$

对线性系统,有

$$\sum_{i=1}^n x_i(t) = nx_i(t) \rightarrow \sum_{i=1}^n y_i(t) = ny_i(t) \quad (1-5)$$

比较式(1-1)与式(1-5)可知, n 为比例因子,故线性还具有比例性。

由以上分析可知,线性系统是同时具有叠加性与比例性的系统。应注意,若系统仅满足叠加性,则不一定是线性系统。图1-1所示为1个非线性系统,其中滤波器1与滤波器2将输入信号分成2个不重叠的频带。若 $x_1(t)$ 的频谱完全落在滤波器1的通频带内,而 $x_2(t)$ 的频谱完全落在滤波器2的通频带内,则在此情况下,式(1-3)得到满足,但系统仍然是非线性的。于是,就存在从式(1-1)不能导出式(1-5)的情况。正是由于这个原因,叠加性与比例性为线性系统的2个独立要求。只有式(1-3)与式(1-5)同时得到满足,系统才是线性的。

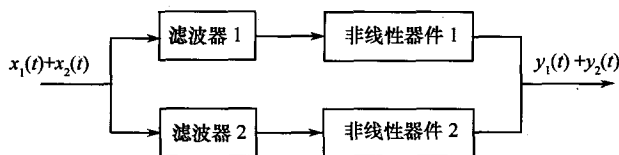


图 1-1 非线性系统的输入与输出

1.2 线性系统与线性方程的关系

从数学的观点来看,线性系统是可用线性方程描述的系统。因此,分析线性系统实际上就是根据具体对象求解线性方程。线性方程有代数方程、微分方程与差分方程。线性系统除了分为连续的与离散的以外,还分为时不变的与时变的 2 种,线性时不变系统的输入与输出有如下时移性质。

(1) 线性连续系统: $x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0)$ 。

(2) 线性离散系统: $x(n - k) \rightarrow y(n - k)$ 。

1.2.1 线性方程与线性系统的描述关系

线性方程与其所描述的线性系统的关系如图 1-2 所示。

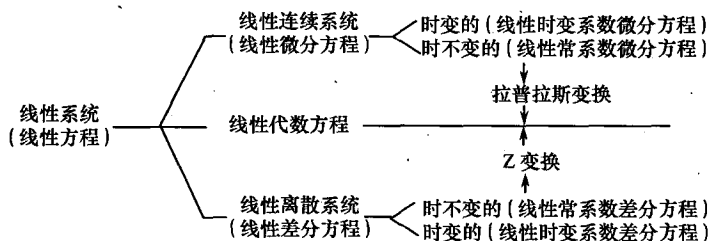


图 1-2 线性方程与其所描述的线性系统的关系

1.2.2 线性方程与线性系统特性的关系

1) 线性时不变连续系统情况

一般的线性时不变连续系统可表示为 n 阶线性常系数微分方程,即

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y(t) = x(t) \quad (1-6)$$

若激励函数 $x(t) = 0$,该微分方程为齐次的,而 $x(t) \neq 0$ 则为非齐次的。

在齐次线性微分方程中,若将响应函数或应变函数 $y(t)$ 乘以常数 c ,则方程式中每一项乘以同一常数 c ,因而 $cy(n)$ 与 $y(n)$ 一样是原来齐次线性微分方程的解,这就体现了线性微分方程的比例关系,数学上称为齐次性。若将响应函数或应变函数 $y(n)$ 分为 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$ 2 部分,方程式中每一项分裂为含有 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 的 2 项。因此, $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 分别满足原来的齐次线性微分方程,这就体现了线性方程的叠加关系。对非齐次线性微分方程,若激励函数的幅度或其分量有所增减时,则响应函数或应变函数按相同的比例幅度

和相应的分量而改变。线性常系数微分方程的这种比例性与叠加性与线性时不变连续系统的比例性与叠加性相对应。

线性常系数微分方程在激励为零时,即 $x(t) = 0$, 其齐次线性微分方程的解称为通解。对式(1-6) n 阶线性常系数微分方程, 若其 n 个单独解 $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ 彼此线性独立, 则由 n 个任意常数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 加权和解 $y_c(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t)$ 为齐次线性微分方程的通解。非齐次线性微分方程除通解外, 还有一特解 $y_p(t)$ 。通解与特解的和

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(t) + y_p(t) \quad (1-7)$$

称为线性常系数微分方程的全解或一般解。

线性常系数微分方程的通解相当于线性时不变连续系统的瞬态特性, 它完全决定于系统本身的参数与结构, 与激励无关。线性常系数微分方程的特解相当于线性时不变连续系统的稳态解, 它不仅与系统本身有关, 而且也与激励有关。

线性常系数微分方程有经典求解法与拉普拉斯变换法 2 种。拉普拉斯变换法是将线性常系数微分方程变为代数方程, 故运算简单, 特别对一些激励函数, 如脉冲函数与阶跃函数等, 更为方便。因此, 该法得到了普遍的应用。经典求解法在许多情况下反而比拉普拉斯变换法更为方便, 并且由其所得到的通解和特解与系统的瞬态特性和稳态特性密切相关, 物理概念清楚。

例 1-1 设 2 阶线性常系数微分方程为

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + a_1 \frac{d}{dt}y(t) + a_0 y(t) = x(t) \quad (1-8)$$

用经典法与拉普拉斯变换法求解。

解:(1) 经典法。先求式(1-8) 线性齐次常系数微分方程

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + a_1 \frac{d}{dt}y(t) + a_0 y(t) = 0 \quad (1-9)$$

的通解 $y_c(t)$ 。设 $y_c(t)$ 为指数形式 e^{st} , 于是

$$y(t) = e^{st} \quad (1-10)$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = se^{st} \quad (1-11)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = s^2 e^{st} \quad (1-12)$$

将式(1-10)至式(1-12)代入式(1-9), 得

$$(s^2 + a_1 s + a_0)e^{st} = 0 \quad (1-13)$$

因 e^{st} 不为 0, 故仅有

$$s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \quad (1-14)$$

其 2 个根分别为 s_1 与 s_2 。因此, $y_c(t)$ 的 2 个单独解为 $e^{s_1 t}$ 与 $e^{s_2 t}$ 。于是, 齐次线性常系数微分方程式(1-9) 的通解为

$$y_c(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} \quad (1-15)$$

设式(1-8)的特解为 $y_p(t)$ (这里不讨论), 则其全解或一般解为

$$y(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + y_p(t) \quad (1-16)$$

$y_c(t)$ 中 2 个任意常数 c_1 与 c_2 由已知初始条件确定。

(2) 拉普拉斯变换法。对式(1-8)取拉普拉斯变换, 令

$$L[y(t)] = Y(s), \quad L[x(t)] = X(s) \quad (1-17)$$

由此, 得

$$[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)] + a_1[sY(s) - y(0)] + a_0 Y(s) = X(s)$$

该式可以写成

$$(s^2 + a_1 s + a_0)Y(s) = X(s) + (s + a_1)y(0) + y'(0) \quad (1-18)$$

应用拉普拉斯变换, 将所给的微分方程式(1-8)变成了代数方程式(1-18)。由式(1-18), 得

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} [X(s) + (s + a_1)y(0) + y'(0)] \quad (1-19)$$

所求解就是 $Y(s)$ 的拉普拉斯逆变换, 即

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] \quad (1-20)$$

2) 线性时不变离散系统情况

一般的线性时不变离散系统表示为 n 阶线性常系数差分方程, 即

$$a_n y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \cdots + a_0 y(k) = x(k) \quad (1-21)$$

若激励函数 $x(k) = 0$, 则该差分方程称为齐次的, 而 $x(k) \neq 0$, 则为非齐次的。

线性常系数差分方程的解与线性齐次时不变离散系统的特性关系, 与线性常系数微分方程及线性连续时不变系统时的特性关系相同, 不再重述。

线性常系数差分方程有经典求解法与 Z 变换法 2 种, 这 2 种方法和求解线性常系数微分方程 2 种方法相似。下面举一例来说明。

例 1-2 设 2 阶线性常系数差分方程为

$$y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = x(k) \quad (1-22)$$

分别用经典法与 Z 变换法求解。

解: (1) 经典法。先求式(1-22) 齐次线性常系数差分方程

$$y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = 0 \quad (1-23)$$

的通解 $y_c(k)$ 。设 $y_c(k)$ 为指数形式 e^{sk} , 并令 $e^s = z$, 于是

$$y_c(k) = e^{sk} \quad (1-24)$$

$$y_c(k+1) = e^{s(k+1)} = e^s e^{sk} = z e^{sk} \quad (1-25)$$

$$y_c(k+2) = e^{s(k+2)} = e^{2s} e^{sk} = z^2 e^{sk} \quad (1-26)$$

将式(1-24)至式(1-26)代入式(1-23), 得

$$(z^2 + a_1 z + a_0) e^{sk} = 0 \quad (1-27)$$

因 e^{sk} 不为 0, 故只有

$$z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \quad (1-28)$$

其2个根为 z_1 与 z_2 ,与其相对应有2个 s 值,即 $z_1 = e^{s_1}$, $z_2 = e^{s_2}$ 因此, $y_c(n)$ 得2个单独解为

$$e^{s_1 k} = z_1^k, \quad e^{s_2 k} = z_2^k$$

于是,齐次线性常系数差分方程式(1-23)的通解为

$$y_c(k) = c_1 z_1^k + c_2 z_2^k \quad (1-29)$$

设式(1-22)的特解为 $y_p(k)$ (这里不讨论),则其全解或一般解为

$$y(k) = c_1 z_1^k + c_2 z_2^k + y_p(k) \quad (1-30)$$

$y_c(k)$ 中2个任意常数 c_1 与 c_2 由已知初始条件确定。

(2) Z变换法。对式(1-22)两边取Z变换,令

$$Z[y(k)] = Y(z), \quad Z[x(k)] = X(z)$$

由此得

$$z^2[Y(z) - y(0)] - zy(1) + a_1 z[Y(z) - y(0)] + a_0 Y(z) = X(z)$$

或

$$(z^2 + a_1 z + a_0)Y(z) = X(z) + (z^2 + a_1 z)y(0) + zy(1) \quad (1-31)$$

这样,通过Z变换,将差分方程变为代数方程,由式(1-31)得

$$Y(z) = \frac{1}{z^2 + a_1 z + a_0} [X(z) + (z^2 + a_1 z)y(0) + zy(0)] \quad (1-32)$$

式(1-32)与表示2阶线性常系数微分方程拉普拉斯变换解的式(1-19)相比,它们的形式相似,此外,可以见到式(1-32)含有2个给定值 $y(0)$ 与 $y(1)$,不需要另外任意常数。最后,由Z逆变换得所求解,即

$$y(k) = Z^{-1}[Y(z)] \quad (1-33)$$

此式只对 $k = 0, 1, 2, \dots$ 有意义。

1.3 线性时不变系统的响应特性

系统是与信号密切联系的,信号通过系统所引起的变化,称为系统对信号的响应。系统响应特性是研究信号与系统非常重要的问题。在实际应用中,应根据条件要求,使信号与系统在时间特性和频率特性互相适应,能比较完善的匹配。

系统对信号在时间上的响应特性称为时间响应,而系统对信号在频率上的响应特性称为频率响应。在分析系统的时间响应时,为了更清楚地理解信号通过系统所引起的变化,经常将信号分解为脉冲信号,从系统对这种激励信号的时间响应来透视对任意信号的时间响应。同样,在分析系统的频率响应时,则经常将信号分解为实或复正弦信号,从系统对正弦振荡来透视系统对任意信号的频率响应。为此,采用脉冲响应与频率响应或传递函数来表示系统的响应特性。

1) 线性时不变连续系统情况

线性时不变连续系统对单位脉冲的响应,即系统在 $\delta(t)$ 函数输入时的输出定义为系统的脉冲响应或冲激响应,以 $h(t)$ 表示。当系统为任意连续输入 $x(t)$ 时,其输出 $y(t)$ 为

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau \quad (1-34)$$

即输出 $y(t)$ 为输入 $x(t)$ 与系统脉冲响应 $h(t)$ 的卷积。

若线性时不变系统的输入为指数函数,即

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \quad (1-35)$$

则由式(1-34)可知,其输出为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0(t-\tau)} h(\tau) d\tau = e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_0 \tau} h(\tau) d\tau \quad (1-36)$$

因此, $y(t)$ 也等于输入指数函数 $e^{j\omega_0 t}$ 乘以 $h(t)$ 的傅里叶变换

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \quad (1-37)$$

于 $\omega = \omega_0$ 时的值 $H(\omega_0)$ 。此结果对每一个 ω_0 都是对的,故得

$$y(t) = H(\omega) e^{j\omega t} \quad (1-38)$$

$H(\omega)$ 称为线性时不变连续系统的传递函数或频率响应。 $H(\omega)$ 可由式(1-37)决定,也可由式(1-38)决定。若用式(1-38)决定,就应以复正弦 $e^{j\omega t}$ 为输入, $H(\omega)$ 为系统输出复正弦 $H(\omega) e^{j\omega t}$ 的幅度。

若输入 $x(t)$ 为实正弦 $\cos(\omega t)$, 则系统对

$$x(t) = \cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

的输出为

$$y(t) = \frac{H(\omega)}{2} e^{j\omega t} + \frac{H(-\omega)}{2} e^{-j\omega t}$$

如 $h(t)$ 是实函数, $H^*(\omega) = H(-\omega)$, $H(\omega) = A(\omega) e^{j\phi(\omega)}$, 则

$$y(t) = \text{Re}[H(\omega) e^{j\omega t}]$$

而 $\cos(\omega t) = \text{Re}[e^{j\omega t}]$, 因此

$$y(t) = \text{Re}[H(\omega) e^{j\omega t}] = \text{Re}[A(\omega) e^{j\phi(\omega)} e^{j\omega t}] = A(\omega) \cos(\omega t + \phi)$$

由上可见,当系统输入为实正弦 $\cos(\omega t)$ 时, $H(\omega)$ 的幅度 $A(\omega)$ 与相位 ϕ 分别是输出正弦 $A(\omega) \cos(\omega t + \phi)$ 的幅度 $A(\omega)$ 与相位 ϕ 。

2) 线性时不变离散系统情况

线性时不变离散系统的脉冲响应定义为 δ 序列 $\{\delta(n)\}$ 输入时的输出,以 $h(n)$ 表示。当系统输入为任意离散信号 $x(n)$ 时,其输出 $y(n)$ 为

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n) h(n - k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n - k) h(k) \quad (1-39)$$

即输出 $y(n)$ 为输入 $x(n)$ 与系统 $h(n)$ 的离散卷积。

当线性时不变离散系统的输入是一等比级数时,即

$$x(n) = r^n$$

式中: r 为公比, 由式(1-39) 得其输出 $y(n)$ 为

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{n-k} h(k) = r^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) r^{-k} \quad (1-40)$$

它也是一个等比级数, 其系数是序列 $h(n)$ 的 Z 变换

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) z^{-k} \quad (1-41)$$

的值 $H(r)$ 。因此, 结果对每个 r 都是对的, 故得

$$y(n) = H(z) z^n \quad (1-42)$$

$H(z)$ 称为线性时不变离散系统的传递函数。 $H(z)$ 可由式(1-41) 决定, 也可由式(1-42) 决定。当 $H(z)$ 由式(1-41) 决定时, $H(z)$ 为脉冲响应 $h(n)$ 的 Z 变换, 而 $h(n)$ 为 $H(z)$ 的 Z 逆变换。当 $H(z)$ 由式(1-42) 决定时, 就应以 z^n 为输入, $H(z)$ 为系统输出 $H(z) z^n$ 中 z^n 的系数。

1.4 线性时不变系统的零、极点

线性时不变系统可由零、极点所在位置, 得到其时间响应特性与研究其稳定性, 此外, 它还可用来研究线性系统与滤波器的设计。

1.4.1 线性时不变连续系统的零、极点

设线性时不变连续系统的传递函数为 $H(s)$, $H(s)$ 通常为有理函数, 即

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_m s^m}{1 + a_1 s + \cdots + a_n s^n} \quad (m \leq n) \quad (1-43)$$

原则上讲, 多项式能因式分解, $H(s)$ 可写成零、极点形式, 即

$$H(s) = b_0 \frac{(s - q_1)(s - q_2) \cdots (s - q_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (1-44)$$

式(1-44) 中分子的根, 即 $q_1, q_2, \cdots, q_m$ 为 $H(s)$ 的 1 阶零点, 而 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为 $H(s)$ 的 1 阶极点。当 $q_1 = q_2 = \cdots = q_k$ 与 $p_1 = p_2 = \cdots = p_k$ 时, q_1 与 p_1 分别称 k 阶零点或极点。 $H(s)$ 的零点与极点可以是实数、复数或等于 0。

在 s 平面上, 将 $H(s)$ 的零点与极点绘出, 这就是零、极点分布图。由零、极点在 s 平面上的位置, 可得其时间函数与图形。现将几种简单对应情况列于表 1-1 中。表 1-1 中的零、极点分布图中, $\circ$ 代表零点, $\times$ 代表极点。

有理函数式(1-43) 可展开为部分分式, 若所有极点不相等, 其展开形式为

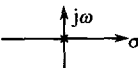
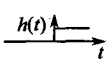
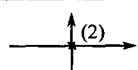
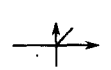
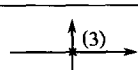
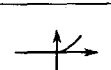
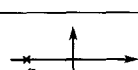
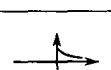
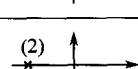
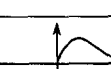
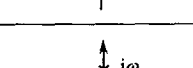
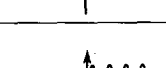
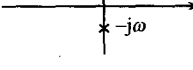
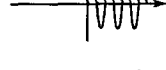
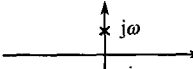
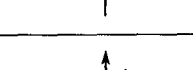
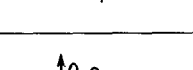
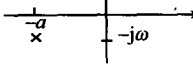
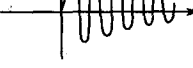
$$H(s) = \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s - p_n} \quad (1-45)$$

式中: $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为常数。式(1-45) 部分分式中每项对应 1 个极点, 根据表 1-1, 从极点的位置可知以下几点。

- (1) 负实轴上的极点所对应的时间函数按其极点阶次具有 e^{-at} 、 te^{-at} 、 t^2e^{-at} 等形式。
- (2) s 左半平面内的共轭极点对应于衰减振荡 $e^{-at}\sin(\omega t)$ 或 $e^{-at}\cos(\omega t)$ 。
- (3) 虚轴上的共轭极点对应于等幅振荡。
- (4) 正实轴上极点对应于按指数规律增长的波形, s 右半平面内的共轭极点对应于增长振荡。

如果系统的极点是已知的, 就可以完全确定系统是否稳定。由以上分析可见, 线性时不变连续系统稳定的条件是其所有极点 $p_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为负实部。

表 1-1 $H(s)$ 零、极点图与 $h(t)$ 的对应关系

$H(s)$	s 平面上的零、极点	t 平面上的波形	$h(t) (t \geq 0)$
$\frac{1}{s}$			$u(t)$
$\frac{1}{s^2}$			t
$\frac{1}{s^3}$			$\frac{t^2}{2}$
$\frac{1}{s+a}$			e^{-at}
$\frac{1}{(s+a)^2}$			te^{-at}
$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$			$\sin(\omega t)$
$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$			$\cos(\omega t)$
$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$			$e^{-at}\sin(\omega t)$
$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$			$e^{-at}\cos(\omega t)$
$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$			$t\sin(\omega t)$

在设计线性时不变连续系统与模拟滤波器时, 零、极点分布图很有用。在设计过程中, 可以借想象零、极点在 s 平面上的配置来达到预定的目标。