

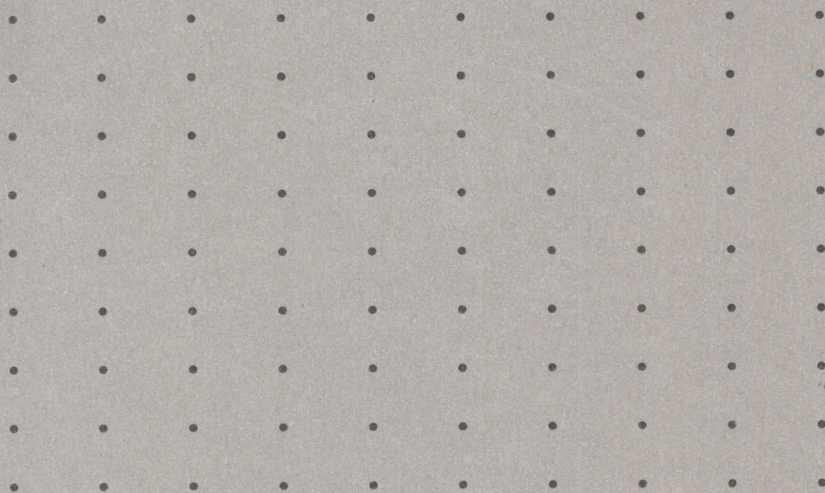
现代数学基础

8

泛函分析第二教程

(第二版)

■ 夏道行 严绍宗 舒五昌 童裕孙 编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

8

泛函分析第二教程

(第二版)

■ 夏道行 严绍宗 舒五昌 童裕孙 编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书共分五章,分别介绍了向量值函数的积分和向量值测度,算子半群,拓扑线性空间, Banach 代数,非线性映射等基本内容。除广义函数论因《实变函数论与泛函分析》(夏道行等编)第七章中已有扼要介绍外,泛函分析中最重要也是最具应用价值的几个部分都在本书中作了介绍。只要具备大学阶段所规定的泛函分析基础课知识就可阅读本书,本书可作为综合大学、师范院校数学类各专业高年级学生的选修课教材,也可作为理、工科有关专业研究生教材。

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析第二教程 / 夏道行等编著. —2 版. —北京:
高等教育出版社, 2008. 11

ISBN 978-7-04-024750-3

I. 泛… II. 夏… III. 泛函分析—高等学校—教材
IV. O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 154640 号

策划编辑 王丽萍
版式设计 马敬茹

责任编辑 张耀明
责任校对 王效珍

封面设计 张楠
责任印制 韩刚

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京民族印务有限责任公司

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

开 本 787 × 1092 1/16
印 张 23
字 数 450 000

版 次 1987 年 10 月第 1 版
2009 年 1 月第 2 版
印 次 2009 年 1 月第 1 次印刷
定 价 59.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 24750-00

第二版前言

本书第一版(原名《泛函分析第二教程》)问世至今,二十多年过去了。承蒙读者厚爱,出版后曾有多所院校使用,作者们也不时获得有关本书的信息反馈,其中有不少很好的建议,也有一些十分中肯的意见,这些建议和意见对我们启发甚大。这些年来,笔者长期为复旦大学数学类各专业的研究生讲授泛函分析。在教学过程中,曾对原书多个章节尝试并比较了几种不同的处理方法。感谢高等教育出版社为本书提供了再版的机会,使我们得以根据同行的意见和自己的体会,对该书作进一步的加工。

修订后的第二版保持了原书的框架和主要内容,因为它们是当年写作时作者们广泛征求意见,反复斟酌探讨的结果。主要修改之处在于补充了几个基本定理,增添了一些有意义的例子,调整和充实了过于简略的部分,删去了几处前后重复的叙述,改写了原书中的若干段落。这些修改散见于全书各章节。希望修订后的教材将更适用于本科生泛函分析选修课和研究生泛函分析学位课的实际教学过程。

笔者早年在夏道行教授和严绍宗教授的指导下修读泛函分析。两位导师对事业执着的追求和邃深的学术造诣是我深为敬慕的。当年参加编写关于非线性映射和向量值函数等章节,对我而言是一个很有收效的学习过程。这次笔者遵嘱修订这本教材,自感责任重大,因而期望能努力把握好每一处修改的质量。然而,一本成熟的教材终须久经锤炼,所以仍然热切地盼望同行与同学们一如既往,不吝指正,以期通过共同努力,把本书的质量再次提升到一个新的台阶。

童裕孙

2008年5月1日

第一版序

泛函分析是数学中的一个较新的重要分支。它起源于经典数学物理中变分问题,概括了经典分析、函数论等中某些重要概念、问题和成果,并受到量子物理、现代力学以及现代工程技术的有力刺激。它综合地运用分析、代数和几何的观点和方法,研究分析数学、现代物理和现代工程技术等所提出的有关问题。它是本世纪出现的第一个高度综合性的数学学科分支。从本世纪中叶开始,偏微分方程理论、概率论(特别是随机过程理论)以及部分计算数学,由于运用了泛函分析而得到了大发展。现在,泛函分析的观念和方法已经有力地渗透并影响着现代纯粹与应用数学、理论物理及现代工程技术理论的许多分支,如微分方程、概率论、计算数学、量子物理、统计力学、现代控制论、现代力学、抽象调和函数、函数论、大范围微分几何等。

泛函分析课程现在已作为一门基础课列入我国高等院校数学系和应用数学系的教学计划,也已成为许多工程技术专业研究生必修的数学基础课之一。考虑到泛函分析在数学的理论研究和应用中的需要,而许多重要和有价值的内容又不可能在基础课中介绍,因此,1982年春数学、力学教材编审委员会函数论、泛函分析组决定在基础课内容基础上再编写一本泛函分析的选修课读物,以适应我国目前教学发展的需要。

本书主要综合介绍泛函分析的最基本最重要的几个方面。全书共分五章:第一章,向量值函数的积分和向量值测度;第二章,算子半群;第三章,拓扑线性空间;第四章, Banach 代数;第五章,非线性映射。显然,作为反映泛函分析最基本最重要的方面而言,理应还有广义函数论,由于考虑到在本书部分作者所编的《实变函数论与泛函分析》(高等教育出版社出版)一书的第七章已对它作了扼

要介绍(从本书的要求来看,这个介绍略嫌简单了点)以及本书的篇幅所限,所以本书未列入广义函数论内容。

本书第一章的前三节和第四节的前两小节是一般性的基础知识,其余的部分初学者可暂不学。第二章—第五章,除第三、四章内容有些联系外,各章内容具有相对独立性,也就是说,第二—第五的章次顺序既非是数学内容的必然的逻辑顺序,也非数学内容重要性的顺序。在编写本书的技术方面也充分注意并有意加强这种独立性。因此,在用本书教学时,例如,可以在讲完第一章部分内容后立即讲第五章;讲授者认为必要时,甚至也可先讲第四章 Banach 代数,而后再适当介绍第三章拓扑线性空间的某些内容(当然,这样做就要少许介绍或暂时承认少量拓扑线性空间的基本事实)。如果每周讲授三学时,估计讲完本书需一年;如果安排学时不足,则应按所学对象的需要可只讲部分章节。

本书承蒙吉林大学江泽坚、北京大学张恭庆、兰州大学陈文岷、四川大学孙顺华、南京大学马吉溥诸位教授组成的审查组进行审查,他们的许多宝贵意见和精辟见解使得本书大为增色。最后张恭庆教授还仔细审阅了修改稿全文,为本书的最后定稿和完善付出了艰辛的劳动。因此,本书实际上是我国泛函界同行共同的劳动成果。在此,作者对他们诸位以及为组织此书出版出过大力气的北京师范大学孙永生教授表示衷心的感谢。限于作者水平,本书诸多不当之处尚希同行批评指正,以便日臻完善。

作者

1986年2月

目 录

第一章 向量值函数的积分与向量值测度	1
§1.1 向量值函数的微积分	2
1.1.1 向量值函数的连续性	2
1.1.2 向量值函数的可导性	4
1.1.3 向量值函数的 Riemann 积分	5
§1.2 向量值可测函数	6
1.2.1 可测函数的定义	7
1.2.2 强可测与弱可测的关系	7
1.2.3 算子值可测函数	11
§1.3 Bochner 积分和 Pettis 积分	12
1.3.1 Pettis 积分	13
1.3.2 Bochner 积分	15
1.3.3 Bochner 可积函数的性质	19
1.3.4 算子值函数的 Bochner 积分	25
§1.4 向量值测度	27
1.4.1 向量值测度的基本概念	27
1.4.2 向量值测度的可列可加性	33
1.4.3 向量值测度的绝对连续性	35
1.4.4 Radon-Nikodym 性质	38
1.4.5 具有 Riesz 表示的算子	41
1.4.6 关于 Radon-Nikodym 性质的附注	45

1.4.7 Vitali-Hahn-Saks 定理	45
1.4.8 数值函数关于向量值测度的积分	47
第二章 算子半群	52
§2.1 算子半群的概念	53
2.1.1 算子半群概念的由来	53
2.1.2 算子半群的一些例子	55
2.1.3 算子半群的可测性和连续性	58
§2.2 C_0 类算子半群	63
2.2.1 C_0 类算子半群的基本概念	63
2.2.2 无穷小母元的预解式	65
2.2.3 C_0 类算子半群的表示	68
2.2.4 无穷小母元的特征	72
2.2.5 C_0 类压缩半群	75
§2.3 算子半群的应用	76
2.3.1 Taylor 公式的推广	77
2.3.2 抽象 Cauchy 问题	78
§2.4 遍历理论	82
2.4.1 概述	82
2.4.2 遍历定理	84
2.4.3 推广的形式	89
2.4.4 算子半群的遍历定理	90
§2.5 单参数算子群, Stone 定理	96
2.5.1 半群成为群的条件	96
2.5.2 单参数酉算子群的 Stone 定理	98
2.5.3 Stone 定理的应用: 平稳随机过程	101
2.5.4 Stone 定理的应用: 平均遍历定理	103
第三章 拓扑线性空间	105
§3.1 拓扑空间	105
3.1.1 邻域, 序, 网	106
3.1.2 拓扑的强弱、生成和分离公理	108
3.1.3 连续映射和 Uryson 引理	109
3.1.4 紧性	111
3.1.5 乘积拓扑, Тихонов 定理	112
3.1.6 诱导拓扑和可度量化空间	114

§3.2 拓扑线性空间	116
3.2.1 基本概念和性质	116
3.2.2 有限维线性空间的特征	120
3.2.3 线性连续算子和线性连续泛函	124
3.2.4 有界集和完全有界集	125
3.2.5 局部基的特征, 商拓扑	126
3.2.6 完备集, 完备性	129
3.2.7 线性度量空间	132
§3.3 凸集与局部凸空间	133
3.3.1 凸集及凸集的分离定理	133
3.3.2 凸集的 Minkowski 泛函, 线性泛函的延拓	136
3.3.3 局部凸空间	142
3.3.4 弱拓扑, 商拓扑	147
3.3.5 弱 * 拓扑	150
3.3.6 端点, Крейн-Мильман 定理, 不动点定理	151
§3.4 几种局部凸空间	156
3.4.1 圈空间	157
3.4.2 桶式空间	158
3.4.3 Mackey 空间	160
3.4.4 赋范线性空间	166
3.4.5 $B(H \rightarrow H)$ 的各种拓扑	181
3.4.6 归纳极限与投影极限	189
第四章 Banach 代数	194
§4.1 基本概念和性质, 元的正则集及谱	194
4.1.1 代数, 单位元, 正则元, 正则集及谱	194
4.1.2 Banach 代数中元素的谱	197
4.1.3 元素在子代数中的谱	199
4.1.4 几个例子	201
§4.2 Гельфанд 表示, 交换 Banach 代数	206
4.2.1 线性可乘泛函	206
4.2.2 Гельфанд 表示	208
4.2.3 理想, 极大理想	209
4.2.4 几个 Banach 代数上线性可乘泛函的形式	213
4.2.5 半单的 Banach 代数	217

§4.3 对称 Banach 代数	218
4.3.1 对合	218
4.3.2 正泛函与表示	221
4.3.3 不可分解的正泛函与既约表示	224
§4.4 C^* 代数	227
4.4.1 C^* 代数的基本性质	227
4.4.2 正常元的函数演算	231
4.4.3 谱分解定理	232
4.4.4 二次换位定理	236
4.4.5 正元	237
4.4.6 Kaplansky 稠密性定理	241
4.4.7 正泛函, 态与纯态	241
4.4.8 线性有界泛函的分解	246
4.4.9 纯态与可乘性	249
§4.5 群代数	251
4.5.1 局部紧 Hausdorff 空间上的积分	251
4.5.2 局部紧群上的 Haar 积分	264
4.5.3 群代数	272
第五章 非线性映射	279
§5.1 映射的微分	279
5.1.1 强微分	280
5.1.2 弱微分	282
5.1.3 高阶微分	287
5.1.4 Taylor 公式	293
5.1.5 幂级数	295
§5.2 隐函数定理	297
5.2.1 C^p 映射	297
5.2.2 隐函数存在定理	298
5.2.3 隐函数的可微性	300
§5.3 泛函极值	303
5.3.1 泛函极值的必要条件	303
5.3.2 泛函极值存在性的下半弱连续条件	303
5.3.3 最速下降法	306
5.3.4 泛函极值存在性的 Palais-Smale 条件	309

§5.4 Brouwer 度	312
5.4.1 C^1 类映射的拓扑度	312
5.4.2 几个引理	315
5.4.3 C^1 类映射的拓扑度 (续)	319
5.4.4 连续映射的拓扑度及其性质	322
§5.5 Leray-Schauder 度	329
5.5.1 全连续映射	329
5.5.2 Leray-Schauder 度的定义	331
5.5.3 Leray-Schauder 度的性质	334
§5.6 不动点定理	338
5.6.1 Brouwer 不动点定理	338
5.6.2 Schauder 不动点定理	338
5.6.3 集压缩映射的不动点	342
5.6.4 多值映射的不动点	345
参考文献	348
索引	349

第一章 向量值函数的积分与向量值测度

本章目的在于把实分析中的基本概念提升到向量值情况, 这里的向量通常指赋范线性空间中的元. 由于分析数学的基础是收敛概念, 而无限维赋范线性空间又有若干种不同的拓扑结构, 因此, 实分析中一个概念, 在向量值函数理论中, 往往可以引伸出强形式的推广和弱形式的推广. 两者有区别, 又有联系, 在某种情况下还可能是一致的, 它们分别应用于不同问题的研究, 丰富了向量值函数分析的内容.

作为引子, 我们首先在 §1.1 中建立了向量值函数的微积分. 从简要的讨论中人们可以看到, 由数值函数过渡到向量值函数, 相应的概念如何进一步深化, 也能初步体会到 Hahn-Banach 定理、共鸣定理等泛函分析的基本结果在这类推广中的作用. §1.2 和 §1.3 用于讨论向量值函数的可测性, 并在此基础上导出 Bochner 积分和 Pettis 积分, 它们是 Lebesgue 积分在强、弱两种情况下的推广, 也是较常用的两种向量值函数的积分. 本章的另一个对象是 §1.4 所讨论的向量值测度, 对这种可列可加向量值集函数的研究, 不可避免地要大量使用前两节所提供的工具. 我们在这一节中初步介绍了向量值测度的 Radon-Nikodym 性质, 人们对该问题研究的兴趣延续至今. 我们还用一定的篇幅讨论了数值函数关于向量值测度的积分, Hilbert 空间上的谱积分当然可以看作这里的一个特例.

§1.1 向量值函数的微积分

在本书中,我们用 $\mathbb{K}$ 表示实数域或复数域, X 表示赋范线性空间. 本节中所谓向量值函数是指从 $\mathbb{K}$ 的子集 Ω 到 X 的任一单值映射.

本节作为初等分析的推广,主要讨论向量值函数的连续性、可导性和 Riemann 积分. 由于 Banach 空间中有几种不同的拓扑结构,即有几种不同的极限,因而相应地产生了几种不同的连续性、可导性等概念.

1.1.1 向量值函数的连续性

定义 1.1.1 设 $\Omega \subset \mathbb{K}$, x 是定义于 Ω , 取值于 X 的向量值函数, 即 $x: \Omega \rightarrow X, t_0 \in \Omega$,

(i) 如果对一切 $f \in X^*$, 有

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(x(t)) = f(x(t_0)),$$

则称 x 在 t_0 弱连续;

(ii) 如果

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|x(t) - x(t_0)\| = 0,$$

则称 x 在 t_0 强连续;

如果 x 在 Ω 上每一点均是弱(强)连续的, 那么, 称 x 在 Ω 上弱(强)连续. 显然, 如果向量值函数 x 在 t_0 强连续, 则必在 t_0 弱连续, 但反之不然.

例 1 设有向量值函数 $x: [0, 1] \rightarrow l^2$,

$$x(t) = \begin{cases} e_n, & t = \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中, e_n 是 l^2 中第 n 个坐标为 1, 其余坐标为 0 的元. 于是, 易见 $w\text{-}\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = 0$, 但 $\left\| x\left(\frac{1}{n}\right) - x(0) \right\| = 1$, 所以 x 在 0 点弱连续而不强连续.

特别地, 设 $B(X \rightarrow X)$ 为 X 上有界线性算子全体, 则它按算子范数是赋范线性空间, 自然可以考察定义于 Ω 取值于 $B(X \rightarrow X)$ 的向量值函数 (也称作算子值函数). 这时, 常用到下列连续性的概念.

定义 1.1.2 设有向量值函数 $U: \Omega \rightarrow B(X \rightarrow X), t_0 \in \Omega$,

(i) 如果对任何 $x \in X, f \in X^*$, 均有

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f((U(t) - U(t_0))x) = 0,$$

则称 U 于 t_0 处按弱算子拓扑连续;

(ii) 如果对任何 $x \in X$, 均有

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|(U(t) - U(t_0))x\| = 0,$$

则称 U 于 t_0 处按强算子拓扑连续;

(iii) 如果

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|U(t) - U(t_0)\| = 0,$$

则称 U 在 t_0 处按一致算子拓扑连续.

显然, 由算子值函数按一致算子拓扑连续可以导出按强算子拓扑连续, 由按强算子拓扑连续又可导出按弱算子拓扑连续. 但反之未必成立.

定理 1.1.1 设 Ω 是 $\mathbb{K}$ 中的有界闭集,

(i) 如果向量值函数 $x: \Omega \rightarrow X$ 弱连续, 则 $\{\|x(t)\| \mid t \in \Omega\}$ 是有界集;

(ii) 如果算子值函数 $U: \Omega \rightarrow B(X \rightarrow X)$ 按弱算子拓扑连续, 并且 X 是 Banach 空间, 则 $\{\|U(t)\| \mid t \in \Omega\}$ 是有界集.

证 (i) 由假设, 对任何 $f \in X^*$, $f(x(t))$ 是 Ω 上的连续数值函数, 因此, 在 Ω 上有界, 即

$$\sup_{t \in \Omega} |f(x(t))| < +\infty, \quad \forall f \in X^*,$$

记 τ 为嵌入映射 $X \rightarrow X^{**}$, 上式即为

$$\sup_{t \in \Omega} |\tau(x(t))(f)| < +\infty, \quad \forall f \in X^*,$$

由共鸣定理得到

$$\sup_{t \in \Omega} \|\tau(x(t))\| < +\infty,$$

但 $\|x(t)\| = \|\tau(x(t))\|$, 所以

$$\sup_{t \in \Omega} \|x(t)\| < +\infty.$$

(ii) 由假设, 对每个 $x \in X$, $t \mapsto U(t)x$ 是弱连续的向量值函数, 定义于 Ω , 由 (i) 可知

$$\sup_{t \in \Omega} \|U(t)x\| < +\infty, \quad \forall x \in X,$$

再利用共鸣定理, 即知

$$\sup_{t \in \Omega} \|U(t)\| < +\infty. \quad \text{证毕.}$$

定理 1.1.2 设 Ω 是 $\mathbb{K}$ 中的有界闭集, 向量值函数 $x: \Omega \rightarrow X$ 强连续, 则它在 Ω 上必是均匀强连续的, 即对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $t_1, t_2 \in \Omega, |t_1 - t_2| < \delta$ 时

$$\|x(t_1) - x(t_2)\| < \varepsilon.$$

这个结论的证明和数值函数的情况完全一致, 此处从略.

1.1.2 向量值函数的可导性

定义 1.1.3 设 Ω 是 $\mathbb{K}$ 中的开子集, $t_0 \in \Omega$, 向量值函数 $x: \Omega \rightarrow X$ 称为在 t_0 处强可导, 是指存在 $x_0 \in X$, 使得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} - x_0 \right\| = 0.$$

称 x_0 为 $x(t)$ 在 t_0 处的强导数; 称向量值函数 x 在 t_0 处弱可导, 是指存在 $x_0 \in X$, 使得

$$\lim_{h \rightarrow 0} f \left(\frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} \right) = f(x_0), \quad \forall f \in X^*,$$

此时, 称 x_0 为 $x(t)$ 在 t_0 处的弱导数, 记为 $x_0 = x'(t_0)$.

显然, 强可导必定弱可导, 并且强导数即是弱导数, x 在 t_0 的强导数一般仍记为 $x'(t_0)$. 反过来, 弱可导未必强可导, 下面就是一个例子.

例 2 设有向量值函数 $x: (-1, 1) \rightarrow l^2$,

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{n} e_n, & t = \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

e_n 是 l^2 中第 n 个坐标为 1, 其余坐标为 0 的元. 于是

$$\frac{x(t) - x(0)}{t} = \begin{cases} e_n, & t = \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

由于 $w\text{-}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(h) - x(0)}{h} = 0$, 因此 x 在 $t_0 = 0$ 处弱可导, 且 $x'(0) = 0$, 但是

$$\left\| \frac{x\left(\frac{1}{n}\right) - x(0)}{\frac{1}{n}} \right\| = 1, \text{ 因而 } x \text{ 在 } t_0 = 0 \text{ 处不是强可导的.}$$

由定义容易知道: 如果向量值函数 $x: \Omega \rightarrow X$ 在 t_0 处弱可导, 那么对任何 $f \in X^*$, 相应的数值函数 $f(x(t))$ 必定在 t_0 处可导, 而且

$$\{f(x(t))\}'_{t=t_0} = f(x'(t_0)).$$

但是, 这个结论的逆命题一般并不成立, 关于这一点, 此处不拟详细讨论.

定理 1.1.3 设 Ω 为 $\mathbb{K}$ 中的一个区域, 向量值函数 $x: \Omega \rightarrow X$, 则 x 弱可导且 $x'(t) \equiv 0, t \in \Omega$ 的充要条件是 $x(t) \equiv x_0, t \in \Omega$.

证 充分性 显然.

必要性 当 x 弱可导且弱导数恒为 0 时, 对任何 $f \in X^*, f(x(t))$ 可导, 且

$$\frac{d}{dt}[f(x(t))] = f(x'(t)) = f(0) = 0.$$

因此, $f(x(t))$ 为常值函数. 任取 $t_0 \in \Omega$, 即有

$$f(x(t)) = f(x(t_0)), \quad \forall f \in X^*,$$

从而必有 $x(t) \equiv x(t_0), t \in \Omega$. 证毕.

在某一点弱 (强) 可导的向量值函数必在该点处弱 (强) 连续. 实际上有如下更进一步的结论.

定理 1.1.4 向量值函数在弱可导的点上强连续.

证 设 x 在 t_0 处弱可导, $\{h_n\}$ 是收敛于 0 的非零数列, 记 $x_n = \frac{1}{h_n}[x(t_0 + h_n) - x(t_0)]$, 则对任何 $f \in X^*$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

存在. 由共鸣定理可知存在常数 K , 使得

$$\sup_n \|x_n\| \leq K.$$

从而 $\|x(t_0 + h_n) - x(t_0)\| \leq K|h_n| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 即 x 在 t_0 处是强连续的. 证毕.

1.1.3 向量值函数的 Riemann 积分

为了便于今后的应用, 这里简单介绍一下向量值函数的 Riemann 积分.

定义 1.1.4 设 X 为赋范线性空间, 向量值函数 $x: [a, b] \rightarrow X$, 对 $[a, b]$ 的任一有限分割 $\mathcal{D}: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, 作和

$$S_{\mathcal{D}} = \sum_{i=1}^{n-1} x(\xi_i)(t_{i+1} - t_i), \quad \xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$$

又记 $\lambda = \max_i (t_{i+1} - t_i)$, 如果存在 $z \in X$, 使得 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \|S_{\mathcal{D}} - z\| = 0$, 那么称 $x(t)$ 在 $[a, b]$ 上 **Riemann 可积**, z 称为 $x(t)$ 在 $[a, b]$ 上的 **Riemann 积分**, 记作

$$z = \int_a^b x(t) dt.$$

由定义立即可知: 如果 $x(t)$ 是 Riemann 可积的向量值函数, 泛函 $f \in X^*$, 那么 $f(x(t))$ 必定是 Riemann 可积的数值函数, 而且

$$f\left(\int_a^b x(t)dt\right) = \int_a^b f(x(t))dt.$$

和数学分析类似地, 有下述基本定理.

定理 1.1.5 设向量值函数 $x(t)$ 定义于 $[a, b]$, 取值于 Banach 空间 X , x 在 $[a, b]$ 上强连续, 则 x 必在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积.

证 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta > 0$, 使得

$$|t_1 - t_2| < \delta, t_1, t_2 \in [a, b] \text{ 时 } \|x(t_1) - x(t_2)\| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

由定理 1.1.2, 这是可以办到的. 于是, 当分割 $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2$ 的相邻分点最大距离都小于 $\frac{\delta}{2}$ 时,

$$\|S_{\mathscr{D}_1} - S_{\mathscr{D}_2}\| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

由于 X 是完备的, 故仿数学分析可证积分和序列 $\{S_{\mathscr{D}}\}$ 必收敛于 X 中的一个元. 证毕.

定理 1.1.6 (Newton-Leibniz 公式) 设 X 是赋范线性空间, 向量值函数 $x: [a, b] \rightarrow X$ 在 $[a, b]$ 上弱可导, 而且 $x'(t)$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 则

$$\int_a^b x'(t)dt = x(b) - x(a).$$

证 对任何 $f \in X^*$, 利用定理 1.1.4 有

$$\begin{aligned} f\left(\int_a^b x'(t)dt\right) &= \int_a^b f(x'(t))dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(x(t))dt \\ &= f(x(b)) - f(x(a)). \end{aligned}$$

因此

$$\int_a^b x'(t)dt = x(b) - x(a). \quad \text{证毕.}$$

§1.2 向量值可测函数

向量值函数 Riemann 积分概念在应用上往往受到较大的限制, 人们根据实变函数论的经验, 试图讨论更为一般的 Lebesgue 积分. 为此, 我们先引入向量值可测函数的概念.