高等数学

工程类

下册

主编 谭维奇

GAODENG SHUXUE

凤凰出版传媒集团
江苏人民出版社

主　编　谭维奇
副主编　管志忠　吴邦昆　金启胜　焦小平

GAODENG SHUXUE

高等数学

工程类

下册

凤凰出版传媒集团
江苏人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下/工程类/谭维奇主编.—南京：江苏人民出版社，2008.8

ISBN 978-7-214-05553-8

Ⅰ.高… Ⅱ.谭… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 ②工程类—高等学校—教材 Ⅳ.013 TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 113794 号

书　　名	**高等数学——工程类　下册**
主　　编	谭维奇
责任编辑	张惠玲
特约编辑	宋　强
出版发行	江苏人民出版社(南京中央路 165 号　邮编：210009)
网　　址	http://www.book-wind.com
集团地址	凤凰出版传媒集团(南京中央路 165 号　邮编：210009)
集团网址	凤凰出版传媒网 http://www.ppm.cn
经　　销	江苏省新华发行集团有限公司
照　　排	南京紫藤制版印务中心
印 刷 者	镇江中山印务有限公司
开　　本	1 000×1 436 毫米　1/32
印　　张	13.375
字　　数	453 千字
版　　次	2008 年 8 月第 1 版　2008 年 8 月第 1 次印刷
标准书号	ISBN 978-7-214-05553-8
定　　价	39.00 元(共 3 册)

(江苏人民出版社图书凡印装错误可向印刷厂调换)

前　　言

随着21世纪我国对各类人才需求的不断增加，近几年来作为高等教育重要组成部分的高等职业技术教育得到了长足的发展。从事高等职业技术教育的教师和接受此种教育的学生希望有一套适合自己的《高等数学》教材。

本书由宣城职业技术学院、安庆职业技术学院、池州职业技术学院、巢湖职业技术学院联合编写。她搭建了四所职业技术学院相互交流和学习的平台，凝聚了四所学校从事《高等数学》教学教师的智慧和心血，体现了以学生为本的宗旨。本书的编写过程也是一个探讨和研究的过程，编写的大纲和四所学院共同研讨的教学大纲相一致。内容上力求突出重点、删繁就简，以应用为目的、以必需够用为原则，注意讲清概念，注重学生基本运算能力和分析、解决问题能力的培养，定理的证明和推导不追求其严密性而改用直观的方法解释其含义，便于学生的学习。

全书分为上、下两册，下册又分为经济类和工程类两个分册。上册内容包括函数、极限、连续，微分学及其应用，积分学及其应用三章；下册经济类分册内容包括随机事件与概率、随机事件与数字特征、矩阵代数、线性方程组四章；工程类分册，内容包括多元函数微积分、常微分方程、无穷级数、矩阵代数、复变函数基础、积分变换六章。上册由宣城职业技术学院程双幸主编，下册由安庆职业技术学院谭维奇主编，供高职专科学生使用。

参加本书编写的有宣城职业技术学院翟素琴、吕宗明、焦小平，安庆职业技术学院金启胜、房小红，池州职业技术学院管志忠、程逸珍、许晓根，巢湖职业技术学院吴邦昆老师等。

本书的编写始终得到了四所院校领导和教师的大力支持，同时江苏人民出版社为本书的出版和我们四所院校的教材建设做了大量的工作、付出了巨大的努力，对此我们一并表示感谢。

四所院校共同编写这套教材是一种新的尝试，敬请使用本教材的师生和其他读者能够提出宝贵意见并给予指正，使其能日臻完善。

编　者

2008年6月

目　录

第一章　多元函数微积分 …… 1

§1.1　多元函数的概念 …… 1

1.1.1　平面点集 …… 1

1.1.2　二元函数 …… 3

1.1.3　多元函数 …… 3

练习 1.1 …… 3

§1.2　二元函数的极限与连续 …… 4

1.2.1　二元函数的极限 …… 4

1.2.2　二元函数的连续性 …… 6

练习 1.2 …… 7

§1.3　偏导数的概念与计算 …… 7

1.3.1　二元函数的一阶偏导数定义 …… 7

1.3.2　二元函数的二阶偏导数 …… 9

练习 1.3 …… 9

§1.4　全微分的概念及计算 …… 10

1.4.1　全微分 …… 10

1.4.2　复合函数的微分 …… 12

练习 1.4 …… 15

§1.5　二重积分的概念及性质 …… 16

1.5.1　二重积分的概念 …… 16

1.5.2　二重积分的性质 …… 17

练习 1.5 …… 18

§1.6　直角坐标系下二重积分的计算 …… 19

1.6.1　矩形区域上二重积分的计算 …… 19

1.6.2　一般区域上二重积分的计算 …… 20

练习 1.6 …… 22

§1.7　极坐标系下二重积分的计算 …… 23

1.7.1　极坐标的转化形式 …… 23
1.7.2　极坐标系下二重积分计算的常见几种情况 …… 23
练习 1.7 …… 24
习题一 …… 24
第二章　常微分方程 …… 28
§2.1　常微分方程的一般概念 …… 28
练习 2.1 …… 29
§2.2　一阶微分方程 …… 30
2.2.1　可分离变量的一阶微分方程 …… 30
2.2.2　一阶线性微分方程 …… 32
练习 2.2 …… 34
习题二 …… 35
第三章　无穷级数 …… 36
§3.1　常数项级数的概念及基本性质 …… 36
3.1.1　无穷级数的概念 …… 36
3.1.2　无穷级数的基本性质 …… 38
练习 3.1 …… 40
§3.2　正项级数及其审敛法 …… 40
3.2.1　基本定理 …… 40
3.2.2　正项级数的比较审敛法 …… 41
3.2.3　正项级数的比值审敛法 …… 43
练习 3.2 …… 44
§3.3　幂级数及其收敛性 …… 44
3.3.1　函数项级数的概念 …… 44
3.3.2　幂级数及其收敛性 …… 45
3.3.3　函数展开成幂级数 …… 47
练习 3.3 …… 47
习题三 …… 49
第四章　矩阵代数 …… 52
§4.1　矩阵的概念 …… 52
4.1.1　矩阵的概念 …… 52
4.1.2　特殊矩阵 …… 53

4.1.3　矩阵问题举例 …… 55
练习 4.1 …… 57
§4.2　矩阵的运算 …… 57
4.2.1　矩阵的加法 …… 57
4.2.2　矩阵的数乘 …… 58
4.2.3　矩阵的乘法 …… 59
4.2.4　矩阵的转置 …… 63
练习 4.2 …… 64
§4.3　矩阵的逆 …… 65
4.3.1　可逆矩阵与逆矩阵 …… 65
4.3.2　矩阵的初等变换 …… 67
4.3.3　逆矩阵的求法 …… 68
练习 4.3 …… 70
§4.4　矩阵的秩 …… 70
习题四 …… 72
第五章　复变函数基础 …… 74
§5.1　复数的概念及运算 …… 75
5.1.1　复数的概念 …… 75
5.1.2　复数的表示 …… 75
5.1.3　复数的运算 …… 77
练习 5.1 …… 80
§5.2　复变函数 …… 81
5.2.1　复变函数的概念 …… 81
5.2.2　复变函数的极限与连续 …… 82
5.2.3　复变基本初等函数 …… 83
练习 5.2 …… 84
§5.3　复变函数的导数 …… 85
5.3.1　复变函数的导数 …… 85
5.3.2　解析函数 …… 86
练习 5.3 …… 87
§5.4　复变函数的积分 …… 88
5.4.1　复变函数积分的概念 …… 88

5.4.2　解析函数的基本积分定理 …… 90
5.4.3　留数及留数定理 …… 93
练习 5.4 …… 95
习题五 …… 96
第六章　积分变换 …… 98
§6.1　傅氏变换 …… 98
6.1.1　傅氏级数的复数形式 …… 98
6.1.2　傅里叶变换及其逆变换 …… 101
6.1.3　傅氏变换的性质 …… 103
练习 6.1 …… 104
§6.2　拉普拉斯变换 …… 105
6.2.1　拉普拉斯变换的基本概念 …… 105
6.2.2　拉普拉斯变换的性质 …… 107
6.2.3　拉普拉斯逆变换 …… 109
6.2.4　拉氏变换的应用 …… 111
练习 6.2 …… 112
§6.3　Z 变换 …… 113
6.3.1　序列 …… 113
6.3.2　Z 变换的概念 …… 113
6.3.3　Z 变换的性质 …… 115
6.3.4　Z 反变换 …… 116
练习 6.3 …… 117
习题六 …… 118
附录 …… 120
附表 1　傅氏变换简表 …… 120
附表 2　拉氏变换简表 …… 121
附表 3　常用序列的 Z 变换公式 …… 122
练习及习题参考答案 …… 123

如果说语言反映和揭示了造物主的心声，那么数学就反映和揭示了造物主的智慧，并且反复地重复着事物如何变异为存在的故事.

——钱塞勒(W. E. Chancellor)

第一章　多元函数微积分

我们在《高等数学》上册部分(即《高职数学基础》)介绍了一元函数的微积分以及利用一元函数微积分的理论来解决实际问题. 但在物理力学及工程技术中，大量的现实问题仅仅利用一元函数微积分的知识还不足以解决，所以我们要学习多元函数微积分.

多元函数是一元函数的推广，保留着一元函数的诸多性质，但由于自变量由一个增加到多个，产生了某些新的内容. 不过在研究方法上，多元函数的许多问题可以转化为一元函数的问题，利用一元函数微积分的理论和方法加以解决. 在微积分中，三元以上的多元函数研究方法与二元函数类似，本章我们主要讨论二元函数.

§1.1　多元函数的概念

我们知道，一元函数的定义域是实数轴上点集；二元函数的定义域是平面上点集. 所以在讨论二元函数之前，有必要先了解关于平面点集的一些简单基本概念.

1.1.1　平面点集

由平面解析几何知道，当在平面上确定了一个坐标系后，所有有序实数对 (x,y) 与平面上所有点之间建立了一一对应. 这种确定了坐标系的平面称为坐标平面. 坐标平面上满足某种条件 P 的点的集合，称为平面点集，记作 $E=\{(x,y)\mid (x,y)\text{ 满足条件 }P\}$.

例如，全平面上的点组成的点集是

$$\mathbf{R}^2 = \{(x,y) \mid -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty\}. \tag{1}$$

平面上以原点为中心，r 为半径的圆内所有点集是

$$C = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < r^2\}. \tag{2}$$

一矩形及其内部所有点集是

$$S = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}. \tag{3}$$

1. 邻域

设 $P(x_0, y_0)$ 是平面上一点，以该点为中心，δ 为半径的不带边圆盘或以 2δ 为边长的不带边正方块称为点 $P(x_0, y_0)$ 的邻域，记为 $U(P)$，即

$$U(P) = \{(x,y) \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2\},$$

或　$U(P) = \{(x,y) \mid |x-x_0| < \delta, |y-y_0| < \delta\}$.

如图 1.1－1.

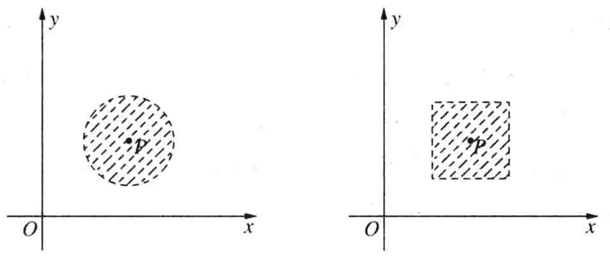

图 1.1－1

点 P 的空心邻域是指

$$\{(x,y) \mid 0 < (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2\},$$

或　$\{(x,y) \mid |x = x_0| < \delta, |y-y_0| < \delta, (x,y) \neq (x_0, y_0)\}$,

记为 $U^0(P)$.

2. 开集

设 M 是平面上一个点集，如果对于 M 中任意一点，均存在该点的邻域，使得这个邻域中任一点都在 M 中，则称 M 为开集.

3. 区域

如果开集中任意两点均可用含于此开集中的折线相连接，则称此开集为区域. 区域连同它的边界一起称为闭区域. 如：前面的(1)、(2)、(3)都是区域，而且(1)、(2)为开集，(3)为闭区域.

1.1.2　二元函数

设平面点集 $D\subset\mathbf{R}^2$，若按照某种对应法则 f,D 中任一点 $P(x,y)$ 都有惟一确定实数 z 与之对应,则称 f 为定义在D 上的二元函数,记作：$f:D\to\mathbf{R}$.

D 为 f 的定义域，$P\in D$ 对应的 z 为 f 在点 P 的函数值,记作 $z=f(P)$ 或 $z=f(x,y)$. 全体函数值的集合为 f 的值域,记作 $f(D)\subset\mathbf{R}$，x,y 为自变量. 二元函数主要用解析法表示,通常写成二元显函数 $z=f(x,y)$ 或二元隐函数 $f(x,y,z)=0$ 的形式. 但图示法对学习、理解二元函数微积分很有帮助,二元函数图形是空间一张曲面,此处因涉及空间解析几何中的二次曲面,我们就不多述了. 例如,函数 $z=2x+5y$ 的图象是 $\mathbf{R}^3$ 中一个平面,定义域是 $\mathbf{R}^2$，值域是 $\mathbf{R}$，函数 $z=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$ 的图象是以原点为中心的单位球面的上半部分,定义域是 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，值域是$[0,1]$.

1.1.3　多元函数

所有 n 个有序实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体称为 n 维向量空间,记作 $\mathbf{R}^n$. 其中每个有序实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点，n 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是这个点的坐标.

设 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中点集,若有某个对应法则 f 使E 中每一点$P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$都有惟一的一个实数 y 与之对应,则称 f 为定义在E 上的n 元函数,记作 $f:E\to\mathbf{R}$. 也常把 n 元函数简写成 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E$ 或 $y=f(P)$,$P\in E$.

练习 1.1

1. 一个开集满足什么条件时就构成区域?
2. 求下列函数的定义域,并画出定义域图形.

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$;　　(2) $f(x,y)=\dfrac{1}{2x^2+3y^2}$;

(3) $f(x,y)=\sqrt{xy}$;　　(4) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$;

(5) $f(x,y)=\ln x+\ln y$;　　(6) $f(x,y)=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$;

(7) $f(x,y)=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$;　　(8) $f(x,y,z)=\dfrac{z}{x^2+y^2+1}$.

3. 求下列函数的函数值.

(1) $f(x,y)=\left[\dfrac{\arctan(x+y)}{\arctan(x-y)}\right]^2$，求 $f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

(2) $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$，求 $f(tx,ty)$.

4. 设 $f(x+y,x-y)=xy+y^2$，求 $f(x,y)$.

§1.2　二元函数的极限与连续

1.2.1　二元函数的极限

1. 二元函数的极限定义

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上有定义，点 $P_0(x_0,y_0)$ 可以不属于 D，但在点 P_0 的任意邻域内总有 D 的无穷多点. 如果存在常数 A 使得对任意给定的正数 ε，总存在正数 δ 使得对 $P(x,y)\in D$ 且满足 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 就有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立，则称二元函数 $f(x,y)$ 在 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$ 或 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$.

注：(1) 表面上看，二元函数极限定义同一元函数极限定义类似，但 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 的方式极为复杂！(x,y) 可以沿着任何路径以任意方式趋于 (x_0,y_0). 而一元函数极限只要求 x 沿 x_0 左或右侧沿直线趋于 x_0 即可.

(2) 如果 (x,y) 沿两条特殊的路径趋于 (x_0,y_0)，$f(x,y)$ 极限不同，我们就说 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时 $f(x,y)$ 极限不存在，这也为我们反面讨论 $f(x,y)$ 极限不存在提供了理论基础.

【例 1】 讨论 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\right)$ 是否存在.

解：对 $\forall\varepsilon>0$，$|f(x,y)-0|=\left|x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\right|$

$$\leqslant\left|x\sin\frac{1}{y}\right|+\left|y\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|+|y|,$$

总 $\exists\delta(\varepsilon)$，当 $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\leqslant\sqrt{x^2+y^2+2|xy|}=|x|+|y|<\delta,$$

取 $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$ 即可. 故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\right)=0.$

【例 2】 讨论 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 是否存在.

解: 当 (x,y) 沿任意直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时,

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}\frac{kx}{x^2+k^2}=0,$$

而 (x,y) 沿抛物线 $y=x^2$ 趋于 $(0,0)$ 时, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=x^2}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=x^2}}\dfrac{x^4}{x^4+x^4}=\dfrac{1}{2},$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在.

2. 二元函数的极限求法

(1) 定义法

参见例 1

(2) 利用连续函数定义来求. 二元函数若连续(参见下面二元函数的连续性), 则极限值等于该点函数值.

【例 3】 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}(x^3+3xy-2y)$.

解: 因为函数 $z=x^3+3xy-2y$ 在全平面上连续,

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}(x^3+3xy-2y)=1^3+3\cdot1\cdot1-2\cdot1=2.$

(3) 变量代换法. 化二元函数极限为一元函数的极限.

【例 4】 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^4+y^2)}{x^4+y^2}$.

解: 令 $t=x^4+y^2$, 且当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, $t\to0$,

于是 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^4+y^2)}{x^4+y^2}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t}=1.$

(4) 有理化法.

【例 5】 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x-y+9}-3}$.

解:
$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x-y+9}-3}&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2-y^2)(\sqrt{x-y+9}+3)}{x-y}\\&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)(\sqrt{x-y+9}+3)\\&=0.\end{aligned}$$

1.2.2 二元函数的连续性

1. 二元函数的连续性定义

设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，$(x_0,y_0)\in D$，如果 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续. 如果 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点都连续，则称 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内连续.

注:(1) 上述定义等价形式 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}[f(x,y)-f(x_0,y_0)]=0$ 若令 $\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=y-y_0$，称为自变量的改变量. 当 $x\to x_0,y\to y_0$ 时有 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0,f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 为函数 z 的改变量，记为 Δz，于是有 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\Delta z=0$.

(2) 二元函数连续的几何意义就它的图形为连续曲面，即曲面上既没有“洞”也没有断裂.

2. 二元函数的连续性有关结论

(1) 基本初等二元函数在其定义域内连续.

(2) 基本初等的四则运算(除法运算分母不为零)形成的函数仍是连续的.

(3) 二元连续函数的复合函数仍是连续的.

【例 6】 讨论下列函数的连续性.

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 2, & x^2+y^2=0;\end{cases}$　　(2) $f(x,y)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{y}{x}}, & x\neq 0,\\ e^y, & x=0.\end{cases}$

解:(1) 易验证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0\neq f(0,0)$，故 $(0,0)$ 为 $f(x,y)$ 间断点.

(2) 这是分段函数，在非分段处显然连续.

在分段线 $x=0$ 上取任一点 $(0,y)$，有

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}f(0+\Delta x,y+\Delta y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}(1+\Delta x)^{\frac{y}{\Delta x}}=e^y=f(0,y),$$

故 $f(x,y)$ 在全平面上连续.

练习 1.2

1. 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\cdot\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$；　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2\cdot y)}{x^2+y^2}$；

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x\cdot y)}{y}$；　　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x+y}{xy}$.

2. 讨论下列函数在(0,0)的连续性.

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{y}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0;\end{cases}$

(3) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0);\end{cases}$

(4) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{y(1+x^2)}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0.\end{cases}$

§1.3　偏导数的概念与计算

1.3.1　二元函数的一阶偏导数定义

二元函数当固定其中一个自变量时(即把该自变量看成常量)，它对另一个自变量的导数称为偏导数，现定义如下：

设函数 $z=f(x,y)$ 在平面区域 D 上有定义，$(x_0,y_0)\in D$，如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记作 $f_x(x_0,y_0)$ 或 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ 或 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$.

同样可定义极限 $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$ 为函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 y 的偏导数,记作 $f_y(x_0, y_0)$ 或 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}$ 或 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}$.

若函数 $z = f(x,y)$,在区域 D 上任一点 (x,y),都存在对 x(或对 y)的偏导数,则得到函数 $z = f(x,y)$,在区域 D 上对 x(或对 y)的偏导函数(也简称偏导数)为 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$,$\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$. 分别记作 $f_x(x,y)$ 或 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 或 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$,$f_y(x,y)$ 或 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 或 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

注:在一元函数中,导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 可视为函数微分与自变量微分之商;在二元函数中,偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 不能视为 ∂z 与 ∂x 之商,因为 ∂z 与 ∂x 没有明确的意义,$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 应看成一个整体.

【例 1】 求函数 $z = f(x,y) = x^3 + 2x^2 y - y^3$ 在点 $(1,3)$ 处关于 x 和 y 的偏导数.

解: $f_x(1,3) = \left.\dfrac{\mathrm{d}f(x,3)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1} = \left.\dfrac{\mathrm{d}(x^3 + 6x^2 - 27)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1} = (3x^2 + 12x)\big|_{x=1} = 15$,

$f_y(1,3) = \left.\dfrac{\mathrm{d}f(1,y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=3} = \left.\dfrac{\mathrm{d}(1 + 2y - y^3)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=3} = (2 - 3y^2)\big|_{y=3} = -25$.

或者分别求出 $f(x,y)$ 对 x 和 y 的偏导函数,

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 4xy, f_y(x,y) = 2x^2 - 3y^2,$$

从而 $f_x(1,3) = 15, f_y(1,3) = -25$.

【例 2】 已知 $z = x^y$,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}$ (此处 y 为常量时是幂函数),

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$ (此处 x 为常量时是指数函数).

但是,我们对于幂指函数一般用对数法求导.

对 $z = x^y$ 取对数得 $\ln z = y \cdot \ln x$,

两边关于 x 求导,得

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x},$$

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = z \cdot \dfrac{y}{x} = y \cdot x^{y-1}$.

两边关于 y 求导,得

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\ln x,$$

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=z\cdot\ln x=x^y\cdot\ln x.$

由二元函数偏导数定义可知,求偏导数其实就是把一个分自变量看成常量而对另一个自变量求导数,因此熟练掌握一元函数的求导才能熟练地求偏导数.

1.3.2 二元函数的二阶偏导数

由于 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $f_x(x,y)$,$f_y(x,y)$ 仍是自变量 x 和 y 的函数,如果它们关于 x 和 y 的偏导数也存在,就说 $f(x,y)$ 具有二阶偏导数.二元函数的二阶偏导数有以下四种情况:

$$f_{xx}(x,y)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\qquad f_{xy}(x,y)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$f_{yx}(x,y)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\qquad f_{yy}(x,y)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

类似可定义更高阶的偏导数.一般来说,二元函数的 n 阶偏导数共有 2^n 个.

练习 1.3

1. 求下列函数的偏导数.

(1) $z=y\cos x$;　　(2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(3) $z=e^{xy}$;　　(4) $z=\ln(x^2+y^2)$;

(5) $z=\arctan\dfrac{y}{x}$;　　(6) $u=x^{y^z}$;

(7) $z=(\sin x)^{\cos y}$;　　(8) $z=\arcsin y+\ln xy$;

(9) $z=\dfrac{x+y}{x-y}$;　　(10) $z=x+y(y-1)\arcsin\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}$.

2. 求下列函数的二阶偏导数.

(1) $z=x^y$;　　(2) $z=x^3y-3x^2y^3$;

(3) $z=e^{x^2+y^2}$;　　(4) $z=\sin^2(2x-y)+xy$.