立足中考大纲　探究知识内涵

解读奥赛真题　揭示思维规律

点击中考难题　登上名校殿堂

QUANCHENG DUIJIE

ZHONGKAO AOSAI

中考·奥赛全程对接

第5版

初中数学 3

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

丛书主编　蔡　晔

中考·奥赛全程对接

初中数学 3

第 5 版

从书主编 蔡 晔
本书主编 黄凤圣
本书参编 解玉红 李成国 牛本富 张晓辉 郝伟华 李学镇
王凤丽 王宏愿 郑芝萍 刘跃先 刘建玉 李双平
佘平平 李晋渊 陈 虹 赵永明 李道军 樊 云
邸瑞成 卢建涛 陈 鹏 左丽华 赵忠平 金 洁
宋 曼 李国丽 汪 莉 苑炳慧 董世忠 钟 旭
黄凤圣 谢瑞聪 张立增

机械工业出版社

本书以新课标初中数学课程标准中的知识重点、难点以及中考大纲中疑难考点为知识基础，全面分析了各地最新中考试题，对接历年奥赛试卷中相关试题，剖析知识的内涵，发掘思维的本质，介绍解题的常规方法，归纳发散，培养和训练开放型创新思维，用奥赛解题思维巧解中考难题，边学边练及时巩固，引导创新.

图书在版编目(CIP)数据

中考·奥赛全程对接．初中数学　3/黄凤圣主编．—5 版．—北京：机械工业出版社，2008.5

ISBN 978-7-111-01851-3

Ⅰ．中…　Ⅱ．黄…　Ⅲ．数学课—初中—升学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 037721 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037)

策划编辑：胡　明　　责任编辑：胡　明

封面设计：鞠　杨　　责任印制：李　妍

保定市中画美凯印刷有限公司印刷

2008 年 6 月第 5 版·第 1 次印刷

148mm×210mm·11.5 印张·370 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-01851-3

定价：17.50 元

丛书编委会

前言

“中考”是每一位中学生朋友求学道路上的第一个重要关卡。随着新的“课程标准”的全面实施，“新标准”下的中考试卷出现了很大的变化。“能力综合”型试题和“开放探究”型试题在中考试卷中占有越来越大的分值。对于面临中考的学生来说，学习和复习的内容、角度及视野也必须更加多元化，才能适应新的中考趋势。

“奥林匹克”这一响亮的名字，已经成为最高水平竞赛的代名词，对每一位有竞争意识的人来说，能够得到它的垂青，是一种无尚的荣誉。中学生学科奥林匹克竞赛也是这样，近二十年来，中国的中学生选手在各项国际中学生学科奥赛中取得了令人瞩目的成绩，充分证明了中国学生的科学潜力。虽然不是每个人都有机会参加这一比赛并能获奖，但“奥赛”中渗透着的知识的精髓和创新的思维方法，对日常的学习和准备中考有着重要的指导和借鉴意义。

本书编写意图

奥林匹克竞赛具有如此高的地位，很重要的原因是各级竞赛奥赛试题具有很强的创新性、应用性和综合性。奥赛注重考查学生对基本知识的深入理解、对所学知识的综合运用以及独立的思考和创新能力。而这一点恰恰是素质教育中的核心内容，也是中考试卷改革的精神实质。

分析最近几年各地的中考试卷可以看出，考查综合能力的“选拔型”试题的考查点偏重于知识网络的交汇点，考查的信息量很大，考查的角度更灵活，对思维能力的考查逐渐增多。因此，在新形式下，用常规的课堂教学思维就会已明显不够。如果考生缺乏开放性思维和应用意识，肯定拿不到高分。

对比“奥赛”初赛、复赛大纲和中考大纲，以及历年初赛、复赛和近几年各地中考中的难题、压轴题也不难看出，许多中考难题都能在“奥赛”试题中看到“影子”。甚至某些题就是上一届奥林匹克竞赛赛题的翻版。因此，我们学习和研究奥林匹克竞赛试题不光是为了夺取“奥赛”金牌，更重要的是可以让我们让在一个更高的高度俯视日常学习和中考，在学习和考试中脱颖而出。

如何进行课外拓展学习，不能盲目操作，要有一套科学的方法和计划，还要有一个得力的助手－辅导参考书。否则，会顾此失彼，得不偿失。

基于以上几个方面的原因，我们编写了这套丛书，将奥赛和中考有机地结合起来，借“他山之石”，攻“此山之玉”，希望能为同学们找到一条通向成功的捷径。

本书编写特点

本书内容的难度定位在略高于中考的水平，相当于奥林匹克竞赛的中等难度，以新课标和中考大纲中的重、难点和被奥赛大纲加深、拓展的知识点为知识基础，结合各类典型竞赛例题，剖析知识的内涵，发掘思维的本质，介绍解决难题的开放性思维方法，归纳发散、培养和训练开放型创新思维能力，对接历年中考中的经典“选拔”题，用奥赛解题思维巧解中考难题，并通过边学边练及时巩固，引导创新。

本书重点放在例题讲解上。例题具有典型的代表性，思路剖析透彻，解答过程详尽，点津之笔富有启发性，跟踪练习题分为A卷、B卷两部分，A卷难度高于课本内容的难度，接近中考的难度；B卷难度与中考压轴题难度相当或稍高于中考压轴题的难度。对于所有的练习题，给出了全解或解答提示，但这仅作为参考。同学们要自己开开动脑筋，结合例题，想出自己的解决方案来。

本书编写力量

本丛书自2003年面世以来，参加编写的人员有数百人，他们大部分来自北京四中、人大附中、北师大附中、清华附中、黄冈中学、启东中学、龙岩一中、首师大附中、北师大二附中、北京八中、北京101中学、北京13中、民族大学附中等一批重点名校的一线优秀教师和奥赛辅导教练。本书所列出的编写人员仅为本次修订人员，还有以前数版的众位编者，由于人数众多，没有在此一一列出，特此声明，并向他们为本书所作的工作致以真诚的感谢。

修订版说明

本丛书面世以来，得到了读者朋友的一致认可。为了感谢读者的厚爱，并使我们的作品质量更上一层楼，我们本着与时俱进的时代精神和自我批评、精益求精的态度，组织了一批经验的专家和勇于创新的一线优秀青年教师，分析研究近几年的各类竞赛和中考的新变化，对原书内容进行了必要的修订，为同学们迎接升学考试助一臂之力。

由于编写时间较紧，可能存在一些缺憾，敬请广大读者批评指正。

编　者

目　　录

第一章 一元二次方程

第一节 根的判别式

考点对接

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$. 当 $\Delta\geqslant0$ 时，方程有实数根；当 $\Delta>0$ 时，有两个不相等的实数根；当 $\Delta=0$ 时，有两个相等的实数根；当 $\Delta<0$ 时，没有实数根. 以上性质的逆命题同样成立.

根的判别式是有关一元二次方程的重要知识之一，是近年来的中考和竞赛中常出现的题型之一. 它既可以根据判别式判断一元二次方程根的情况，也可以应用判别式的知识解决有关方程、不等式和函数方面的问题.

中考回顾

例1（2007 · 天津）已知关于 x 的一元二次方程 $(m-2)^2x^2+(2m+1)x+1=0$ 有两个不相等的实数根，求 m 的取值范围.

【思路导航】 本题重点考查根的判别式的运用. 已知方程有两个不相等的实数根，则有 $b^2-4ac>0$；又因为方程是一元二次方程，还需满足 $m-2\neq0$ 的条件.

【解答】 m 应满足 $\begin{cases}\Delta=(2m+1)^2-4(m-2)^2>0\\ m-2\neq0\end{cases}$ 解得 $m>\dfrac{3}{4}$ 且 $m\neq2$

$\therefore$ 当 $m>\dfrac{3}{4}$ 且 $m\neq2$ 时，原方程有两个不相等的实数根.

例2（2006 · 湛江）已知关于 x 的方程 $x^2+mx+n=0$ 的两个实数根为 m、n. 求 m、n 的值.

【思路导航】 题中关键是建立关于 m、n 的方程组并解之，再利用根的

判别式判断 m、n 的值是否符合题意.

【解答】 ∵m、n 是方程 $x^2+mx+n=0$ 的两个实数根，

$\therefore \begin{cases} m+n=-m \\ mn=n \end{cases}$ 解之 $\begin{cases} m=0 \\ n=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=1 \\ n=-2 \end{cases}$

当 $m=0,n=0$ 时，$\Delta=m^2-4n=0$；

当 $m=1,n=2$ 时，$\Delta=m^2-4n=1^2-4\times1\times(-2)=9>0$.

$\therefore \begin{cases} m=0 \\ n=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=1 \\ n=-2 \end{cases}$ 都符合题意.

例 3（2005·杭州）若 t 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根，则判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 和完全平方式 $M=(2at+b)^2$ 的关系是（　　）

A. $\Delta=M$　　　　B. $\Delta>M$

C. $\Delta<M$　　　　D. 大小关系不能确定

【解答】 t 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，

$\therefore at^2+bt+c=0$，又 $\Delta-M=b^2-4ac-(2at+b)^2$

$=b^2-4ac-4a^2t^2-4abt-b^2$

$=-4a(c+at^2+bt)=0$

$\therefore\Delta=M$，选 A.

奥赛升级

例 1（2007·全国初中联合竞赛）设 m,n 为正整数，且 $m\neq2$，如果对一切实数 t，二次函数 $y=x^2+(3-mt)x-3mt$ 的图像与 x 轴的两个交点间的距离不小于 $|2t+n|$，求 m,n 的值.

【解答】 因为一元二次方程 $x^2+(3-mt)x-3mt=0$ 的两根分别为 mt 和 -3，所以二次函数 $y=x^2+(3-mt)x-3mt$ 的图像与 x 轴的两个交点间的距离为 $|mt+3|$.

由题意，$|mt+3|\geqslant|2t+n|$，即 $(mt+3)^2\geqslant(2t+n)^2$，即

$(m^2-4)t^2+(6m-4n)t+9-n^2\geqslant0$.

由题意知，$m^2-4\neq0$，且上式对一切实数 t 恒成立，所以

$\begin{cases} m^2-4>0 \\ \Delta=(6m-4n)^2-4(m^2-4)(9-n^2)\leqslant0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m>2 \\ 4(mn-6)^2\leqslant0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases}m>2\\mn=6\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}m=3\\n=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=6\\n=1.\end{cases}$

例2（2007·山东竞赛）设方程 $|x^2+ax|=4$ 只有三个不相等的实数根．求 a 的值和相应的三个根．

【解答】 方程 $|x^2+ax|=4$ 等价于如下两个方程：$x^2+ax-4=0$ ①

$x^2+ax+4=0$ ②

设 x_0 是方程①的根，则 $x_0^2+ax_0-4=0$，

又 $x_0^2+ax_0+4=x_0^2+ax_0-4+8=8\neq0$．

$\therefore x_0$ 一定不是方程②的根，则方程①和②无相同的根．由于只有3个相等的实根，故必有且只有方程①或②有重根．

$\Delta_1=a^2+16\geqslant0$，$\Delta_2=a^2-16\geqslant0$．由于 $\Delta_1>0$，故只可能 $\Delta_2=0$，

即 $a=\pm4$

当 $a=4$ 时，方程②的根为 -2，方程①的根为 $-2\pm2\sqrt{2}$；

当 $a=-4$ 时，方程②的根为2，方程①的根为 $2\pm2\sqrt{2}$．

$\therefore$ 当 $a=4$ 时的三个根是 $-2,-2\pm2\sqrt{2}$；当 $a=-4$ 时的三个根是 $2,2\pm2\sqrt{2}$．

例3（2007·河南竞赛）已知关于 x 的方程 $x^2-4|x|+k=0$．

若方程有四个不同的整数根，求 k 的值并求出这四个根；

【解答】（1）方程 $x^2-4|x|+k=0$ 有四个不同的整数根．

则关于 $|x|$ 的方程 $|x|^2-4|x|+k=0$ 有两个不同的正整数根．

$\therefore\Delta=16-4k>0$，即 $k<4$ 且 k 为正整数

$\therefore k=1,2,3$

当 $k=1$，$k=2$ 时，原方程无整数根；

当 $k=3$ 时，$|x|^2-4|x|+3=0$，解得 $|x|=1$ 或 $|x|=3$．

$\therefore$ 当 $k=3$ 时，原方程有4个不同整数根 $x_1=1,x_2=-1,x_3=3,x_4=-3$．

例4（2003·山东竞赛）设 $n(n\geqslant2)$ 个方程 $x^2+a_ix+b_i=0(i=1,2,\cdots,n)$ 均无实根，求证：方程 $nx^2+(a_1+a_2+\cdots+a_n)x+(b_1+b_2+\cdots+b_n)=0$ 也无实根．

【证明】 因为 n 个方程 $x^2+a_ix+b_i=0(i=1,2,\cdots,n)$ 均无实根，则

$\Delta_i=a_i^2-4b_i<0$，即 $-4b_i<-a_i^2$，$i=1,2,\cdots,n$．

设所证方程的判别式为 Δ，则

$\Delta=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2-4(b_1+b_2+\cdots+b_n)n<(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)n$

$=-[(n-1)(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)-2a_1a_2-2a_1a_3-\cdots-2a_1a_n-2a_2a_3-2a_2a_4-\cdots-2a_{n-1}a_n]$

$=-[(a_1-a_2)^2+(a_1-a_3)^2+\cdots+(a_1-a_n)^2+(a_2-a_3)^2+\cdots+(a_2-a_n)^2+\cdots+(a_{n-1}-a_n)^2]\leqslant 0$

即　$\Delta<0$

所以所证方程无实根.

例 5（2004 · 太原市初中数学竞赛）已知 k 为整数，若关于 x 的二次方程 $kx^2+(2k+3)x+1=0$ 有有理根，则 k 的值是________.

【解答】 ∵方程有有理根，

∴判别式 $\Delta_1=(2k+3)^2-4k$ 为完全平方数.

设 $(2k+3)^2-4k=m^2$（m 为正整数），即

$4k^2+8k+9-m^2=0$　①

将①式看作关于 k 的二次方程，由题设知有整数根，故①式的判别式 $\Delta_2=64-16(9-m^2)=16(m^2-5)$ 应为完全平方数，而 16 是完全平方数，令 $m^2-5=n^2$（n 为正整数，且 $m>n$），则有 $(m+n)(m-n)=5$，

$\therefore \begin{cases} m+n=5 \\ m-n=1 \end{cases}$　解得　$\begin{cases} m=3 \\ n=2 \end{cases}$

将 $m=3$ 代入①式得 $k=-2$ 或 $k=0$（舍去），

$\therefore k=-2$.

【点津】 本题也可由 $\Delta_1=4(k+1)^2+5$ 为完全平方数直接求得 $k=-2$.

思维对接

竞赛中常出现的几类问题是：①根据方程根的情况，确定方程中字母系数的取值范围；②应用判别式来判断实根的有理性、无理性和整数性；③应用判别式求值、证不等式等．④利用判别式判断方程根的情况：$\Delta>0$ 方程有两个不等实根，$\Delta=0$ 方程有两个相等实根，$\Delta<0$ 方程无实根.

在利用一元二次方程的根的判别式时，首先要把方程化为一般形式，正确地确定各项系数，计算出 $\Delta=b^2-4ac$ 的值，然后对问题进行解答.

边学边练

A 卷

1. 如果正数 a、b、c 满足 $b>a+c$，那么关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的情况是　（　　）

A. 有 2 个实根　　B. 有 2 个相等的实根

C. 没有实根　　D. 无法确定有无实根

2. 满足 $x^2+7x+c=0$ 有实根的最大整数 c 是　（　　）

A. 4　　B. 8　　C. 10　　D. 12

3. 已知关于 x 的方程 $x^2-(2k-1)x+k^2=0$ 有两个不相等的实数根，那么 k 的最大整数值是（　　）

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 1

4. 设 m 是不为 0 的整数，一元二次方程 $mx^2-(m-1)x+1=0$ 有有理根，求 m 的值．

5. 如果关于 x 的方程 $(x+a)(x+b)+(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)=0$（其中 a,b,c 均为正数）有两个相等的实数根．

求证：以 a,b,c 的长为线段能够组成一个三角形，并指出三角形的特征．

6. 是否存在这样的实数 k，使得二次方程 $x^2+(2k-1)x-(3k+2)=0$ 有两个实数根且两根都在 2 与 4 之间？如果有，试确定 k 的取值范围？如果没有，试述理由．

7. 实数 x,y 满足 $x^2-2x-4y=5$，则 $x-2y$ 的取值范围是什么？

8. 已知关于 x 的二次方程 $x^2=2x+m$（m 为实数）无实根，则关于 x 的二次方程 $x^2+2mx+1+2(m^2-1)(x^2+1)=0$ 的根的情况怎样？

9. 求代数式 $\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+2x+1}$ 的取值范围．

10. 如果关于 x 的方程 $mx^2-2(m+2)x+m+5=0$ 没有实数根，试判断关于 x 的方程 $(m-5)x^2-2(m-1)x+m=0$ 的根的情况．

11. 如图 1-1，有长为 24 米的篱笆，一面利用墙（墙的最大可用长度为 11 米），围成中间有一道篱笆的长方形花圃．

(1)如果要围成面积为 45 平方米的花圃，那么 AD 的长为多少米？

(2)能否围成面积为 60 平方米的花圃？若能，请求出 AD 的长；若不能，

请说明理由.

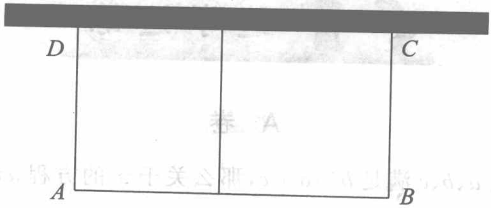

图 1-1

B 卷

1. 设 Δ 为整数系数二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式.

(1)4、5、6、7、8 五个数值中,哪几个能作为 Δ 的值?分别写出 1 个相应的二次方程.

(2)请你从中导出一般规律——一切整数中,怎样的整数值不能作为 Δ 的值,并给出证明.

2. 若 a_1,a_2,b_1,b_2 是实数,且 $a_1a_2=2(b_1+b_2)$,

求证:方程组 $\begin{cases}x^2+a_1x+b_1=0,\\x^2+a_2x+b_2=0\end{cases}$ 中至少有一个方程有实数根.

3. 如果 m,n 是正实数,方程 $x^2+mx+2n=0$ 和方程 $x^2+2nx+m=0$ 都有实数根,则 $m+n$ 的最小值是什么?

4. 若二次方程 $(b-c)x^2+(a-b)x+(c-a)=0$ 有两相等实根,且 $b\neq c$,则 a,b,c 间的关系是什么?

5. 已知实数 a,b 满足 $a^2+ab+b^2=1$,求 a^2-ab+b^2 的取值范围.

6. m 为给定的有理数,求 k 为何值时,使得方程 $x^2+4(1-m)x+3m^2-2m+4k=0$ 的根总为有理数?

7. k 取何值时,方程 $x^2-11x+(30+k)=0$ 有两个实根,且两实根均大于 5.

8. 已知关于 x、y 的方程组 $\begin{cases}x^2-y+k=0 & ①\\(x-y)^2-2x+2y+1=0 & ②\end{cases}$

有两个不相同的实数解.

(1)求实数 k 的取值范围;

(2)若 $\begin{cases}x=x_1\\y=y_1\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=x_2\\y=y_2\end{cases}$ 是方程组的两个不相同的实数解,是否存在实数

k,使得 $y_1y_2-\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}$ 的值等于 2?若存在,求出 k 的值;若不存在,请说明理由.

第二节 根与系数的关系

考点对接

韦达定理:设 x_1、x_2 为一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个根,则根与系数之间存在如下关系:$x_1+x_2=-b/a$;$x_1x_2=c/a$.

韦达定理揭示了根与系数之间的一种必然的联系,反映了两个根与系数的等量关系.在运用根与系数的关系解题的过程中,要注意 $a\neq0$ 且 $\Delta\geqslant0$,这两个条件缺一不可.

中考回顾

例1 (2007·广东)已知 a,b 是方程 $x^2+2x-1=0$ 的两个根,求代数式 $(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})(ab^2-a^2b)$ 的值.

【思路导航】 利用根与系数的关系,$a+b=-2$,$ab=-1$.将代数式转化为有关 $a+b$ 和 ab 的式子.

【解答】 $(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})(ab^2-a^2b)=\frac{b-a}{ab}\cdot ab(b-a)=(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

$\because a,b$ 是方程 $x^2+2x-1=0$ 的两个根,$\therefore a+b=-2,ab=-1$

原式 $=(-2)^2-4\times(-1)=8$.

例2 (2007·湖北)关于 x 的方程 $x^2-2(m-2)x+m^2=0$.问:是否存在实数 m,使方程的两个实数根的平方和等于 56.若存在,求出 m 的值;若不存在,请说明理由.

【思路导航】 利用根与系数的关系,列一个关于 m 的一元二次方程并解之.然后运用根的判别式判断方程是否有实数根.

【解答】 设方程的两实数根为 x_1, x_2，则 $x_1+x_2=2(m-2)$，$x_1 \cdot x_2=m^2$.

令 $x_1^2+x_2^2=56$，得 $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4(m-2)^2-2m^2=56$

即：$m^2-8m-20=0$. 解之 $m_1=10$，$m_2=-2$

当 $m=10$ 时，$\Delta<0$. 不符合题意，舍去.

当 $m=-2$，$\Delta>0$.

∴存在实数 m，使方程的两实根的平方和等于 56，m 的值为 -2.

例3 (2005·浙江宁波)已知关于 x 的方程 $x^2-2(m+1)x+m^2=0$.

(1)当 m 取何值时，方程有两个实数根；

(2)为 m 选择一个合适的整数，使方程有两个不相等的实数根，并求出这两个根.

【解答】 (1) $\Delta=[-2(m+1)]^2-4m^2=8m+4$

由题意知 $8m+4\geqslant 0$，解得 $m\geqslant -\frac{1}{2}$，

∴当 $m\geqslant -\frac{1}{2}$ 时，方程有两个实数根.

(2)选取 $m=0$，

方程为 $x^2-2x=0$，∴$x_1=0$，$x_2=2$.

【点津】 选取 m 值时要注意满足 $m\geqslant -\frac{1}{2}$，且为整数.

例4 (2005·北京)已知关于 x 的方程 $(a+2)x^2-2ax+a=0$ 有两个不相等的实数根 x_1 和 x_2，并且抛物线 $y=x^2-(2a+1)x+2a-5$ 与 x 轴的两个交点，分别位于点 $(2,0)$ 两旁.

(1)求实数 a 取值范围；

(2)当 $|x_1|+|x_2|=2\sqrt{2}$ 时，求 a 的值.

【思路导航】 本题第一个问题，可根据判别式定理和韦达定理，列出关于 a 的不等式组，进而求出 a 的取值范围；第二个问题，可以根据 x_1、x_2 的正负情况去掉绝对值，列出关于 a 的方程，进而求得 a.

【解答】 (1)∵关于 x 的方程 $(a+2)x^2-2ax+a=0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore \begin{cases} a+2\neq 0 \\ \Delta=(-2a)^2-4a(a+2)>0 \end{cases}$$

解得 $a<0$，且 $a\neq 2$ ①

设抛物线 $y=x^2-(2a+1)x+2a-5$ 与 x 轴两个交点坐标分别为 $(\alpha,0)$ 和 $(\beta,0)$ 且 $\alpha<\beta$.

$\therefore \alpha$、β 是关于 x 的方程 $x^2-(2a+1)x+2a-5=0$ 的两个不相等实数根

又$\because$抛物线 $y=x^2-(2a+1)x+2a-5$ 与 x 轴两个交点位于点 $(2,0)$ 两旁

$\therefore \alpha<2,\beta>2$

$\therefore (\alpha-2)(\beta-2)<0$　　即　$\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4<0$

$$\therefore \begin{cases}\Delta'=[-(2a+1)]^2-4(2a-5)>0\\ \alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4=2a-5-2(2a+1)+4<0\end{cases}$$

解得 $a>-\dfrac{3}{2}$　　②

由①、②,得 a 的取值范围是 $-\dfrac{3}{2}<a<0$.

(2)$\because x_1$ 和 x_2 是关于 x 的方程 $(a+2)x^2-2ax+a=0$ 的两个不相等的实数根

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{2a}{a+2}$　　$x_1x_2=\dfrac{a}{a+2}$

$\because -\dfrac{3}{2}<a<0$

$\therefore x_1x_2<0$　　$x_1+x_2<0$

又$\because |x_1|+|x_2|=2\sqrt{2}$

$\therefore (|x_1|+|x_2|)^2=8$

即 $x_1^2+x_2^2+2|x_1x_2|=8$

$\because x_1x_2<0$

$\therefore x_1^2+x_2^2-2x_1x_2=8$

即 $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=8$

$(\dfrac{2a}{a+2})^2-\dfrac{4a}{a+2}=8$

解这个方程,得 $a=-4$ 或 $a=-1$.

经检验 $a=-4$　$a=-1$ 都是方程 $\left(\dfrac{2a}{a+2}\right)^2+\dfrac{4a}{a+2}=8$ 的根.

$\because a=-4<-\dfrac{3}{2}$(舍去)

$\therefore a=-1$.

奥赛升级

例1（2006·全国初中数学竞赛）关于x的方程$x^2+3x+a=0$①的两个实数根的倒数和等于3，且关于x的方程$(k-1)x^2+3x-2a=0$②有实数根，又k为正整数，求代数式$\frac{k^2-1}{k^2+k-6}$的值.

【解答】 方程①的两个根为x_1、x_2，则$\begin{cases}x_1+x_2=-3\\x_1\cdot x_2=a\\\Delta=9-4a\geqslant 0\end{cases}$

由条件知$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=3$

即$\frac{-3}{a}=3$且$a\leqslant\frac{9}{4}$，故$a=-1$

则方程②为$(k-1)x^2+3x+2=0$

当$k-1=0$即$k=1$时，$\frac{k^2-1}{k^2+k-6}=0$；

当$k-1\neq 0$时，$\Delta=9-8(k-1)=17-8k\geqslant 0$，$\therefore k\leqslant\frac{17}{8}$

又$\because k$是正数，且$k-1\neq 0$，$\therefore k=2$，但使$\frac{k^2-1}{k^2+k-6}$无意义.

例2（2007·全国竞赛）已知a,b都是正整数，试问关于x的方程$x^2-abx+\frac{1}{2}(a+b)=0$是否有两个整数解？如果有，请把它们求出来；如果没有，请给出证明.

【解答】 不妨设$a\leqslant b$，且方程的两个整数根为$x_1,x_2(x_1\leqslant x_2)$，则有

$$\begin{cases}x_1+x_2=ab\\x_1x_2=\frac{1}{2}(a+b)\end{cases}$$

所以
$$x_1x_2-x_1-x_2=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-ab$$

$$4(x_1-1)(x_2-1)+(2a-1)(2b-1)=5$$

因为a、b都是正整数，所以x_1、x_2均是正整数，于是，$x_1-1\geqslant 0$，$x_2-1\geqslant 0$，$2a-1\geqslant 1$，$2b-1\geqslant 1$，所以