徐利治／著

金色夕阳出版工程

论无限

——无限的数学与哲学

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

徐利治／著

金色夕阳出版工程

论无限

——无限的数学与哲学

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

论无限:无限的数学与哲学/徐利治著. —大连:大连理工大学出版社,2008.12
ISBN 978-7-5611-4603-3

Ⅰ.论… Ⅱ.徐… Ⅲ.①无限—研究②无限—数学理论
Ⅳ.B025.9 O1

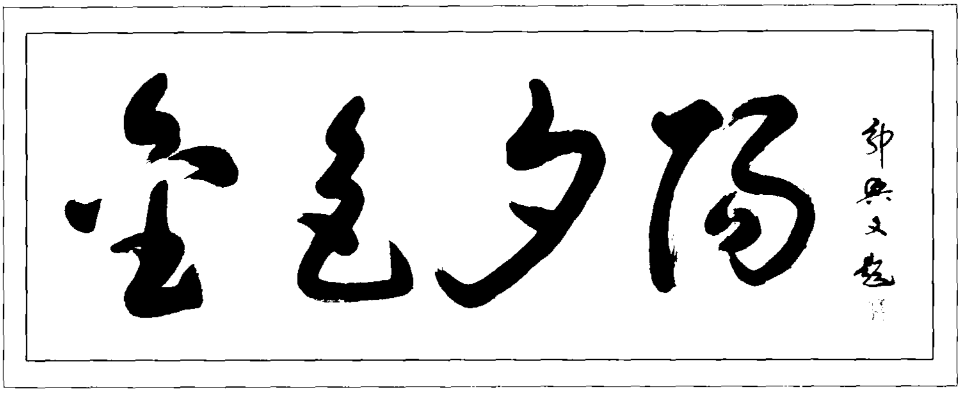
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 193843 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号　邮政编码:116023
发行:0411-84708842　邮购:0411-84703636　传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn
辽宁星海彩色印刷有限公司印刷　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:160mm×230mm　印张:11.5　插页:4　字数:154 千字
2008 年 12 月第 1 版　2008 年 12 月第 1 次印刷

责任编辑:刘新彦　梁　锋　责任校对:骁　杰
封面设计:宋　蕾

ISBN 978-7-5611-4603-3　定　价:30.00 元


金色夕陽

著者心愿录

愿以此书献给喜欢哲学的数学工作者和喜欢数学的哲学工作者.

徐利治

2008年10月于北京

金色夕阳出版工程编委会

主　任

马述君

主　编

王维恒

编　委

王　伟　方红星　田雪峰　刘明辉

宋纯智　李凤山　李兴威　李英健

李显鹏　杨永富　肖德运　张东平

武元凯　范文南　金英伟　孟凌君

栾世禄　崔勇谋　董晋骞　韩忠良

程培杰（以姓氏笔画为序）

编　务

王　伟　杨玉君　李丹歌

总　序

马述君

辽宁是全国城市化、工业化程度较高，现代化水平居于全国前列的省份，老龄化程度也居于全国前列。目前，全省60岁以上老龄人口已超过700万，超过老年人口比重的全国平均水平。相对而言，辽宁又是老干部、老知识分子、老文艺家比较集中的省份。

虽然大多数老年人都已离开了工作岗位，开始了颐养天年的晚年生活，但他们中的很多人仍然身体健康、思维活跃、精力旺盛。一部分具有扎实写作功底和良好文化基础的老年人，特别是老干部、老知识分子、老文艺家，利用离退休后的充裕时间，将自己丰厚的知识积淀、丰富的人生阅历和深刻的人生感悟通过文字落实于纸面。这些文字朴素而真诚，深沉而睿智，具有较高的出版价值。

但是从当前图书市场的实际情况看，出书难是一个不争的事实。很多老同志手里拿着凝结着心血的、沉甸甸的书稿，却找不到愿意出版的单位，即使有出版单位同意出版，往往也因高额的出版费用望而却步。基于这种情况，2007年年初，省财政厅、省新闻出版局共同策划运作了“金色夕阳”出版工程。其中“金色”象征着财富和收获；“夕阳”代表着老年群体。“金色夕阳”寓意“莫道桑榆晚，为霞尚满天”的绚烂多彩、充实而收获的晚年生活。这项工程旨在通过政府扶持为主，动员社会多方资助的形式，挖掘我省老年群体的出版资源，切实解决老干部、老知识分子、老文艺家出书难问题，为我省图书出版事业的繁荣发展做出贡献。

老年人是社会的宝贵财富。他们走过坎坷波折，历经沧桑风雨，用自己的热血青春打造了共和国的繁荣昌盛，为国家、社会无怨无悔地奉献了一生。在国泰民安、和谐稳定的社会环境中，很多老年人退而不休，老当益壮，通过各种形式丰富自己的晚年生活。著书立说是部分老年人老有所学、老有所为、老有所乐的重要表现形式。相对于青年人来说，老年人在从事创作过程中遇到的阻碍更大，有些人视力已经下降，但还借助老花镜和放大镜查找资料；有些人体力不支，需要在他人帮助下完成书稿的录入。从某种意义上说，老年人的书稿不单单是知识、情感和智慧的融合，更重要的是毅力、精神和境界的体现。这些书稿是留给后代的不可复制的精神财富，让这些书稿付梓，立言于世，泽被后人，又是件具有“抢救”意义的事情。

在推进社会主义文化大发展大繁荣的时代，“金色夕阳”出版工程无疑是推进和谐文化建设，繁荣图书出版的创新之举，又是继承老一辈优良传统，弘扬老一辈革命精神的文化盛事，同时，也是传承文化、继往开来的薪火工程。这一工程将通过文学系列、艺术系列、学术系列图书的合理出版，为社会提供多种类的优质图书。顾炎武有诗：“苍龙日暮还行雨，老树春深更著花”。我们相信，在科学发展观的指导下，“金色夕阳”出版工程能够传播壮心不已、蓬勃向上的时代精神，能够提供无愧于时代、无愧于人民的名品佳作，更能够为全省图书出版业迎来璀璨多姿、充满生机的金色时代添上一抹绚丽的彩霞。

前　言

这本书取名"论无限",而不叫"论无穷"。本来在科技界,无限与无穷常作为同义词.但我很赞同中国已故老数学家吴大任先生(1908～1997)的意见,他认为从中文词义看,"无穷"一词适用于离散数量,而"无限"一词可通用于连续数量和离散数量。所以,人们说得对:"自然数有无穷多,实数轴是无限长。"因为自然数与实数连续统都是书中的论题,所以本书乐意选用"无限"一词。

任何一位读者阅读任何一本书时,都是想要有一点收获的。我想,我写的这本书篇幅不大,只可能在多数人对"无限"感兴趣的几个问题方面,提供一系列简要的论述、分析、解答和可供参考研究的信息。

大家知道,自然数序列"1,2,3,…,n,…"既可以看成是一个永远在增长着的没完没了的数列,这叫做"潜无限观";也可以理解成为一个完成了的整体性无限集合(有序集合),而一切自然数都在其内,这叫做"实无限观"。说来奇怪,这两种不相同的无限观,竟成为古今哲学界与数学界诸不同流派观点分歧的根源。所以一个令人深思的问题是,为什么自然数的"无限性"竟能在人脑概念思维中产生截然不同的印象和观念。本书第1章对此问题做出了深入分析和解答。可能有人认为这并非问题的"最终解答",那么好学深思的读者还可继续研究。

本书的第2章是用"无限观"审视了数学分析中的"极限论"。特别,附带地澄清了极限论中有时会招致误解的概念问题。相信这章题材内容对于从事分析数学教学者能有一定深度的启示作用和参考价值。

记得我年过70时曾遇到一位大学教授朋友和我私下议论说:"对于由量度为零的几何点(又称数学点)能组成有长度的直线这一概念总是想不通。"其实我自己也早有同样疑虑,因此一经得知数学直觉主义学派反对"直线由点组成"的观点时,我就萌生一个信念,即坚信连续统结构的分析与数学建

模问题，必须借助于直觉主义派的思想和观点，虽然在数学哲学上我又是一名现代"数学客观主义"的信奉者。

本书第 3、5 章中讲述了近、现代发展起来的非标准分析方法。其实，这两章的写作动机都是为了要用直觉主义者的连续统理念重建"连续统模型"的问题引发出来的。特别，在第 3 章中读者还可以看到自然数无限性的哲学悖论（又称 Engels 悖论），如何能在一种非标准自然数模型中获得十分明确的自然的解释。

这里先跳过第 4 章来谈第 5 章的主旨。第 5 章一开始就分析论述 Cantor 实数连续统的功能与得失。这样，读者就会很容易理解为什么我们一定要利用 Poincaré 的"内束"（intimate bond）概念来重建"连续统模型"的动机了。

事实上，正是因为受到了 Poincaré 内束思想、Hegel 有关 Zeno 运动悖论的哲学分析，以及 Robinson 的单子结构模型 $^*R$ 三者的综合性启发，才使得我们称之为"Poincaré 连续统模型"的（PC）与[PC]的描述性建构成为可能。这其中值得关注的是"半无限小"（semi-infinitesimal）和"线量子"（line-quantum）两个新概念。事实上，正因为有了这些概念，才能确切说明为什么直觉主义者"否定点组成连续统"的理论观点是无可非议的事。

看来比较孤立的是第 4 章。其实这一章的部分题材内容，起着联系第 3、第 5 章的作用。写作这一章确实还包含有宣传"非标准分析"（简称 NSA）的功能与作用的动机。这一章中特别介绍了"广义互反公式"，它就是将数论与微积分中的两种最重要的"互逆关系"（Möobius 反演与 Newton-Leibniz 基本定理）综合成一个模式的命题。这一命题显然表明 NSA 方法的"数学表现功能"是经典分析数学所不能企及的。所以再加上一些其他理由，我赞同 Kurt Gödel（1906～1978）的看法，"NSA 终将成为 21 世纪广为使用的分析数学。"但如何使得 NSA 具有教学形态的通用教材一事，还有不少教学科研工作要做。这也就是我在第 4 章特别提到的问题。

"无限"的研究确实是数学与哲学中的"永恒主题"。我写此书时，就不断联想到一些自己无法解答的难题。我相信读者阅读本书时也将会发现问题。其实，读书过程中发现问题就隐含有或大或小的收获。

德国杰出的数理逻辑学家 Frege（1848～1925）有句名言说："一个好的数学家至少是半个哲学家，一个好的哲学家至少是半个数学家。"我并不全信此说的普遍意义，但认为数学家与哲学家的合作会对双方都有启发并能获得更好的成就。我个人的经验是，在搞数学研究工作的间歇时，选读一些

经典哲学著作是有益处的。

本书既谈数学，又谈哲学，当然主要篇幅是讨论数学。作为本书作者，我希望在本书读者中，搞哲学的人能引起对数学的兴趣，搞数学的人能引起对哲学的兴趣。还希望数学工作者与哲学工作者的思想交流与合作将同时推进数学与哲学研究。

在晚年写作这样一本“论无限”的书，实是我的平生夙愿。现今大连理工大学出版社提供出版此书的机会，并为作者申请到基金资助，特在此对科技教育出版中心的负责人刘新彦与梁锋两位以及帮助编辑校对的同志们致以诚挚谢忱。

徐利治

2008年10月于北京

目 录

1

两种对立的无限观

1.1 引　言

“无限”(又称“无穷”)是指数量上的无限大或无限多,数学上常用∞表示“无限大”,但它并不是一个有精确定义的符号.据数学史家查证,∞这符号是 Wallis 首创的,最早出现于 1656 年他出版的《无穷算术》一书中. Newton 曾说过他首次发现“流数术”(微分学)是受了 Wallis 著作的启发.

后来人们就常用∞这符号来表示一个变量 x 无限地增大的意思,简记作 $x \to \infty$. 这一点很重要,有了这一概念,无限小作为无限大变量的倒数就有定义了.从而就能有极限理论,为微积分学建立基础.这是 19 世纪数学家 Cauchy 和 Weierstrass 相继完成的功绩.

Cantor 是 19 世纪晚期大胆创始“无限数学理论”的一位数学家,他的主要贡献就是无限集合理论和超穷数理论.按照他的说法,无限有三种,一是“绝对无限”(又称形而上学的无限),二是“物

理无限",三是"数学无限".绝对无限观念可以联系到至高无上的上帝概念,始终为宗教界人士所赞赏.物理无限是指宇宙时空的无限性概念和时间与空间的无限可分割性质.这在古典哲学家Kant,Hegel等人的著作里有许多论述.Cantor把分析数学中使用的无限概念和他自己创始的超穷基数与序数都归入数学无限范畴.关于这方面的详细论述可参考Rucker的巨著《无限与心智》(Infinity and the Mind)中的有关章节.

正如Davis和Hersh合著《数学经验》(The Mathematical Experience)一书的§4.7(无限——数学的超凡容器)中所说:"重要的数学常被认为是当它的讲述范围大到包括无限的时候.现代数学对象的库存中是充满无限的.无限是难以回避的."事实上,无限概念及其逻辑演绎产物到处出现在分析数学的诸分支领域(如级数论、点集论、测度论、积分论、泛函分析、非标准分析等).特别,在数学哲学与数学基础问题研究中,无限更是一个备受关注的永恒性论题.

由于整数与直线分别是算术和几何的基本构件,所以"自然数序列"与"点组成的直线"是一对最基本最原始的无限性对象.然而,正是自然数的无限性由于观察的视角不同,曾导致千百年来数学家与哲学家群体中的意见分歧,以致产生了不同的学派.下面两节将深入地讨论不同的无限观及其认识论根源.

1.2 自然数的无限性:两种对立的无限观

自然数序列(简称"数列")的无限性看来是一目了然的:

$$1,2,3,\cdots,n,\cdots$$

这里用什么符号来表示自然数当然是无关紧要的:要紧的是,它是从一个有限数 1(也可从 0)开始,后继数都由加 1 的手续产生.自然数列作为一意确定的数学模式,已由 Peano 五条公理作出了完整的表述;其中第 5 条公理称之为“归纳公理”,即肯定了自然数的无限性.

在上述数列中,n 表示一般的任意自然数(这里 $n>3$).n 之前的“…”表示 3 与 n 之间可能存在的有很多个依次增大的自然数,而 n 之后的“…”则表示“无限相续”之意.

注意,正是对 n 之后的“…”的不同理解法,导致了数学界和哲学界内部的长期分歧,因为对“无限相续”可以有两种彼此对立的观点和解释.这种观点分歧迄今还继续存在于数学界的直觉主义者与非直觉主义者(即经典数学家,包括形式主义者和现代的柏拉图主义者)之间.

直觉主义者坚信自然数列的延伸是没完没了的、永远不可能完成的,自然数存在于不断创造之中,而且是创造不完的,因而它们不可能形成一个整体性的无限集体.这就是说,自然数列只是一种具有潜在无限性的事物,自然数的无限是“潜无限”.

我们可以把上述潜无限观点下的自然数列模型表示为

$$\vec{N}:\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$$

这表示自然数列是一个开放性(进程式)的无限性量态,也可简记为$\{n\}$.

自古以来,主张潜无限观的哲学家和数学家有:Aristotle(包括其后继者),Gauss,Galois,Kronecker,Poincaré,Brouwer,Weyl,Bishop 等.例如,Weyl 曾申辩说:“我确信并不存在明显的证据以支持关于自然数总体存在性的信仰……,自然数序列永远处在创

造着状态中,而不是一个本来就存在着的王国."

另一方面,经典数学家(非直觉主义者)认为自然数可以考虑成为一个"完成了的整体",即作成一个含有真无限多元素(自然数)的有序集合,而一切自然数都在其内.这是关于自然数列的实无限观,即认定自然数的无限是"实无限".

我们可以把实无限观点下的自然数列模型表示成

$$\overline{N}:\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$$

这表示自然数列形成一个闭合性(过程式)的真无限集合,可简记为$\{n\}$.

我们知道,赞同实无限观的哲学家和数学家有 Platonists(柏拉图主义者),Leibniz,Hegel,Dedekind,Cantor,Weierstrass,Hilbert,Russell,Gödel,Thom 等.例如,Cantor 集合论与超穷数理论的原始思想就是从自然数的实无限观开始形成的,而 Hilbert 完全支持 Cantor 的数学理念和其所作出的贡献.

综上所述,可以提出两个问题.

问题Ⅰ:关于 $\overrightarrow{N}$ 和 $\overline{N}$,是否都能找到合理的实例解释或应用场合?

问题Ⅱ:直觉主义者与非直觉主义者在无限观上的分歧有怎样的认识论根源?

这两个问题在数学哲学和数学史上都是发人深思的,特别是问题Ⅱ隐含有深刻意义.下一节将集中讨论这两个问题.

注 1 一些经典哲学著作中,有时把潜无限叫做"假无限"或"恶无限",而把实无限称为"真无限".这说明经典哲学家们多数是信奉实无限观点的,这很可能是由于受到了"数学柏拉图主义"的思想影响所致.