广东省成人高等教育系列教材

主编 赵延孟 万细仔
副主编 杨立洪 郭莉

经济数学（2）辅导

中山大学出版社

广东省成人高等教育系列教材

经济数学（2）辅导

主　编　赵延孟　万细仔
副主编　杨立洪　郭　莉

中山大学出版社
·广州·

图书在版编目（CIP）数据

经济数学（2）辅导/赵延孟，万细仔主编；杨立洪，郭莉副主编．—广州：中山大学出版社，2008．1
（广东省成人高等教育系列教材）
ISBN 978－7－306－03002－3

Ⅰ．经…　Ⅱ．①赵…②万…③杨…④郭…　Ⅲ．经济数学—成人教育：高等教育—教学参考资料　Ⅳ．F224．0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 178328 号

出 版 人：叶侨健
责任编辑：李海东
封面设计：红　枫
责任校对：何　凡
责任技编：黄少伟
出版发行：中山大学出版社
电　　话：编辑部 020－84111996，84113349
　　　　　发行部 020－84111998，84111981，84111160
地　　址：广州市新港西路 135 号
邮　　编：510275　　传　真：020－84036565
网　　址：http：//www.zsup.com.cn　E-mail：zdcbs@mail.sysu.edu.cn
印 刷 者：中山大学印刷厂
经 销 者：广东学苑文化发展有限公司
　　　　　电话（020）37217189，37217733
规　　格：787mm×1092mm　1/16　8.75 印张　218 千字
版次印次：2008 年 1 月第 1 版　2008 年 1 月第 1 次印刷
印　　数：1－10000 册　　定　价：17.00 元

广东省成人高等教育系列教材简介

随着我省成人高等教育事业的蓬勃发展，成人高等教育教材存在着可选版本较少、内容陈旧等问题。借用普通高校教材又存在理论性较强、难度较大、脱离成人教育实际基础等问题。

为解决这一矛盾，在广东省成人教育协会支持下，在总结我省各普通高校成人教育教学及实践经验的基础上，由广东省普通高校成人高等教育专业委员会组织有关高校专家编写了本系列教材。教材根据成人高等教育学生的实际入学基础编写，力求突出成人业余、实用的特点，以求达到理论与实践相结合，内容和形式更加符合成人学习的目的。

本系列教材是集体智慧的结晶，由广东省26所大学一线教师承担主要编写及审稿工作。

教材编写实行主编负责制，由中山大学出版社于2007年1月起陆续出版，修订版供2008年春季各院校选用，广东学苑文化发展有限公司支持前期资金投入及代理发行工作。

本系列教材编审委员会成员如下：

顾　问：谭泽中　李少白

主　任：陈金华

副主任：（按姓氏笔画排列）

李　俊　吴庭万　杜秋虹　杨　松　何勇斌　林　兰

段雄春　钟炳辉　黄大乾　曾荣青　漆国生　廖仕湖

委　员：（按姓氏笔画排列）

王康华　申玉杰　江　滨　刘幸东　纪望平　汤耀新

许松荣　李旭旦　李卫安　吴　养　陈赵生　张大鹏

罗　辉　姜新发　钟良珍　胡克章　党丽娟　索庆华

黄宇翔　黄世扬　潘金山

总发行：广东学苑文化发展有限公司

总策划：广东省普通高校成人高等教育专业委员会

编写人员

总主编：王全迪（华南理工大学）

主　编：赵延孟（深圳大学）

　　　　万细仔（广州大学）

副主编：杨立洪（华南理工大学）

　　　　郭　莉（深圳大学）

编　者：（以姓氏笔画为序）

　　　　王全迪　方楚泽　杨立洪　赵延孟

　　　　唐民英　郭　艾　郭　莉

前　言

伴随着中国经济的持续快速发展，中国的高等教育已经由精英教育进入大众化教育阶段。这是中国经济发展的一个必然结果，同时也意味着高等教育在人才培养理念、培养模式、专业设置、课程内容、教育技术等方面，都面临着变革要求。

为适应我国成人高等教育的需要，由广东省普通高校成人高等教育专业委员会和广东学苑文化发展有限公司组织编写的《经济数学》教材，是由多年从事成人教育的专家、教授共同编写的。在本书编写过程中，既注意既符合教育部关于成人高等教育的要求，又尽可能考虑成人学习的特点，既注意知识的系统性，又避免过多推理论证，突出实用性。

《经济数学》分为两个分册，《经济数学（1）》是微积分，《经济数学（2）》是线性代数和概率统计，供成人高等教育专科和本科使用，也可供全日制普通高等教育本、专科学生学习时使用。《经济数学》是高等教育经济管理类各专业学生必修的一门专业基础课。学习这门课程，一是为学生学习后继课程打下必不可少的基础，二是培养学生的素养和分析问题、解决问题的能力。为便于教学，我们还编写了与教材配套的《经济数学辅导》，设有“教学基本要求”、“重点、难点诠释”、“典型例题解析”、“教材习题解答”等内容，供师生教学时使用。

《经济数学（2）辅导》由赵延孟教授、万细仔副教授任主编，杨立洪副教授、郭莉高级讲师任副主编。第1章至第3章、第7章由王全迪、郭艾、杨立洪、唐民英四位副教授编写，第4章至第6章由赵延孟教授、郭莉高级讲师、方楚泽讲师编写。

编写一本教师易教、学生易学的《经济数学》教材，是我们多年的愿望，借广东省成人高等教育教材建设之机，我们得以实践。但由于编者学识有限，加之时间仓促，缺点、错误在所难免，祈望专家、读者指正。

编　者

2008年1月

目　　录

第1章 行 列 式

一、教学基本要求

1. 理解行列式代表一个数值，一个由其元素经过特定的运算所得到的结果.
2. 理解 n 阶行列式的定义.
3. 了解并能应用行列式的基本性质，并会利用这些性质计算行列式的值.
4. 掌握行列式的计算方法，要求会计算行列式的值，能熟练地计算一些特殊行列式.
5. 掌握利用行列式解线性方程组的克莱姆法则.

二、重点、难点诠释

（一）行列式的定义

二阶行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$；

三阶行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}$ （$i=1, 2, 3$），

或 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$；

n 阶行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$ （$i=1, 2, \cdots, n$）.

1. n 阶行列式中，元素 a_{ij} 的余子式和代数余子式的关系是什么？

在 n 阶行列式中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后剩下的元素组成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}；在余子式 M_{ij} 前加上符号因子 $(-1)^{i+j}$（i，j 分别为元素 a_{ij} 所在的行号和列号），称为元素 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}. 两者的关系是：

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

例1 计算行列式 $\begin{vmatrix} -b & -c & 0 \\ 0 & a & b \\ -a & 0 & c \end{vmatrix}$.

解 利用行列式定义按第 1 行展开，即

$$\begin{vmatrix} -b & -c & 0 \\ 0 & a & b \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(-b)\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-c)\begin{vmatrix} 0 & b \\ -a & c \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\times 0\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-b)(ac-0) + c[0-b(-a)] + 0$$

$$= -abc + abc = 0.$$

2. 计算 n 阶行列式时，仅能按第 1 行展开吗?

不是. 计算 n 阶行列式 D 时，可以按任一行展开，D 的值等于它任意一行各元素与其相应的代数余子式的乘积之和.

3. 计算 n 阶行列式时，第 i 行元素与第 j 行相应元素的代数余子式乘积之和等于行列式的值吗?

在行列式中，一行元素与另一行相应元素的代数余子式的乘积之和为零，即：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} d & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases}.$$

4. 计算四阶行列式时有没有类似于计算二阶和三阶行列式的对角线法则?

没有. 设 D 为四阶行列式，若用画对角线的方法，只能画出 8 项取自不同行、不同列 4 个元素之积，而四阶行列式的值等于 24 项取自不同行、不同列 4 个元素之积的代数和. 因为，按照用低阶行列式定义高一阶行列式的递推式定义法，有：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

在上式右端，a_{1j} $(j=1, 2, 3, 4)$ 与每一个三阶行列式相乘，都有 6 项，即四阶行列式由 24 项取自不同行、不同列 4 个元素之积求代数和. 所以四阶及其以上的行列式不存在帮助记忆的对角线法则.

例 2 计算行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值.

解 利用行列式定义按第一行展开，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_1a_2a_3a_4 - a_1b_2a_3b_4 - b_1a_2b_3a_4 + b_1b_2b_3b_4.$$

（二）行列式的性质

性质 1 行列式中的行与列互换，行列式的值不变.

性质 2 互换行列式的两行（列），行列式的值变号.

例 3 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}.$

推论 1 如果行列式中有两行（列）的对应元素相同，则此行列式的值为零.

性质 3 用数 k 乘以行列式的某一行（列）的各元素，等于用数 k 乘以此行列式.

推论 2 如果行列式中的某一行（列）的所有的元素有公因子，则公因子可以提到行列式的外面.

推论 3 如果行列式中有两行（列）的元素对应成比例，则此行列式的值为零.

注意：若 $|A_{ij}|$ 为 n 阶行列式，一般来说，$|ka_{ij}| \neq k|a_{ij}|$，$|ka_{ij}| = k^n|a_{ij}|$.

例 4 若 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = D$,

则有：$\begin{vmatrix} -a_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -D$，$\begin{vmatrix} -a_1 & -b_1 & -c_1 \\ -a_2 & -b_2 & -c_2 \\ -a_3 & -b_3 & -c_3 \end{vmatrix} = (-1)^3 D$,

$$\begin{vmatrix} 8a_1 & -4b_1 & -4c_1 \\ -6a_2 & 3b_2 & 3c_2 \\ -2a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-4) \begin{vmatrix} -2a_1 & b_1 & c_1 \\ -6a_2 & 3b_2 & 3c_2 \\ -2a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= (-4)(-2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 3a_2 & 3b_2 & 3c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= (-4)(-2) \times 3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 24D.$$

性质 4 若行列式中的某一行（列）的元素都是两数之和，例如第 j 列的元素都是两数之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j}+b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj}+b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注意：$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_3+b_3 \\ a_2+b_2 & a_4+b_4 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix}$,

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_3+b_3 \\ a_2+b_2 & a_4+b_4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_3 \\ a_2+b_2 & a_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_3 \\ a_2+b_2 & b_4 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & a_3 \\ b_2 & a_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_3 \\ a_2 & 4_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix}.$$

推论 4 如果行列式中的某一行（列）的每个元素都写成有 m 个数（m 为大于 2 的整数）的和，则此行列式可以写成 m 个行列式的和.

性质 5 将行列式的某一行（列）的所有元素同乘以数 k 后加到另一行（列）的对应的元素上，行列式的值不变.

例 5 计算 $D=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

解 $$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_1+5r_3]{r_4-r_3} \begin{vmatrix} 16 & 0 & -2 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 16 & -2 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-4r_2]{r_1+2r_2}(-1)\begin{vmatrix} 20 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(-1)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 20 & 5 \\ -7 & 1 \end{vmatrix}=-55.$$

符号说明 通常，我们用 r_i 表示行列式的第 i 行，用 c_j 表示行列式的第 j 列.

（三）行列式的计算

用定义计算行列式的值有时比较麻烦，利用行列式的性质能够使计算变得较容易些.

通常我们利用行列式的性质把行列式化为三角行列式，或者将行列式中某一行（列）化为仅含有一个非零元素，再按此行（列）展开，以降低行列式的阶数. 即综合运用行列式的性质可以达到简化计算行列式的目的.

5. 特殊行列式有哪些？

我们把行列式中由左上角至右下角的对角线，称之为主对角线. 主对角线以下的元素全为零，则称该行列式为上三角行列式，主对角线以上的元素全为零，则称该行列式为下三角行列式，上、下三角行列式统称为三角行列式；仅有主对角线的元素不为零的行列式称为对角形行列式.

（1）上三角行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

其中，“ * ”区元素为不全为零的数，“0”区元素皆为零，下同.

（2）下三角行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

（3）对角形行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

（4）次对角形行列式：

$$\begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ & a_{n-1,2} & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n-1,2} & & * & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1},$$

$$\begin{vmatrix} * & & & \\ & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n-1,2} & & & \\ a_{n1} & & 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

（5）分块行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ a_3 & a_4 & & \\ & & b_1 & b_2 \\ \multicolumn{2}{c}{*} & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \multicolumn{2}{c}{0} & a_1 & a_2 \\ & & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & & \\ b_3 & b_4 & \multicolumn{2}{c}{*} \end{vmatrix} = (-1)^{2\times 2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix}.$$

上述结果可以作为公式使用.

例 6 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 4 & b & 0 & 0 \\ 7 & -5 & c & 0 \\ -1 & 2 & 8 & d \end{vmatrix}$.

分析 1 该行列式的第 1 行只有 1 个非零元素，故按第 1 行展开，四阶行列式可降为三阶. 类似地，按三阶行列式的第 1 行展开，就只要计算一个二阶行列式.

解法 1

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 4 & b & 0 & 0 \\ 7 & -5 & c & 0 \\ -1 & 2 & 8 & d \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ -5 & c & 0 \\ 2 & 8 & d \end{vmatrix}$$

$$= ab\begin{vmatrix} c & 0 \\ 8 & d \end{vmatrix} = abcd.$$

分析 2 该行列式是上述的下三角行列式，可直接使用上面的结果.

解法 2 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 4 & b & 0 & 0 \\ 7 & -5 & c & 0 \\ -1 & 2 & 8 & d \end{vmatrix} = abcd.$

分析 3 该行列式是上述的分块行列式，可直接使用上面的结果.

解法 3 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 4 & b & 0 & 0 \\ 7 & -5 & c & 0 \\ -1 & 2 & 8 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 4 & b \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & 0 \\ 8 & d \end{vmatrix}$

$$= (ab-0)(cd-0) = abcd.$$

例 7 计算 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 1 \\ c & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 的值.

解 使用特殊行列式的计算公式，有：

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 1 \\ c & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{3\times 2}{2}} abc = -abc.$$

例 8 如何计算 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & -1 \\ 0 & c & -2 & 5 \\ d & 2 & 8 & 7 \end{vmatrix}$ 的值？

解法 1 例 7 中的三阶行列式在通过第 1 列、第 3 列互换位置后，变为三角行列式，本例的四阶行列式只要交换第 1 列、第 4 列和第 2 列、第 3 列的位置也能变为三角行列式，符号为$(-1)^2$，即

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & -1 \\ 0 & c & -2 & 5 \\ d & 2 & 8 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[c_2\leftrightarrow c_3]{c_1\leftrightarrow c_4} (-1)^2 \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & b & 0 & 0 \\ 5 & -2 & c & 0 \\ 7 & 8 & 2 & d \end{vmatrix} = abcd.$$

解法 2 直接用计算公式，有：

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & -1 \\ 0 & c & -2 & 5 \\ d & 2 & 8 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{4\times 3}{2}} abcd = abcd.$$

解法 3 使用分块行列式的计算公式，有：

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & -1 \\ 0 & c & -2 & 5 \\ d & 2 & 8 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{2\times 2}{2}} \begin{vmatrix} 0 & a \\ b & -1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & c \\ d & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (0 - ab)(0 - cd) = abcd.$$

例 9 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 9 & -7 & -6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ -7 & 7 & 9 & -4 \end{vmatrix}$.

分析 该行列式第 3 行的元素是第 1 行对应元素的 2 倍，根据推论 3，如果行列式中有两行（列）的元素对应成比例，则此行列式的值为零. 故该行列式的值为 0.

解 利用行列式的性质 5，把第 1 行的所有元素乘以 -2 加到第 3 行的对应元素上，第 3 行的所有元素都变为 0，故该行列式的值为 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 9 & -7 & -6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ -7 & 7 & 9 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 9 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 7 & 9 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

例 10 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

分析 利用行列式的性质 5，首先将某行（列）的元素尽可能化为 0，再利用行列式可以按任一行（列）展开的性质，逐步将原行列式化为二阶行列式，计算出结果.

解 令所给行列式为 D，用 D 中第 1 行乘以 -4 加到第 2 行上，再用第 1 行乘以 -1 加到第 4 行上，有：

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_2-4r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -9 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-2r_2]{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & 21 & -17 \\ 0 & 0 & 18 & -14 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & \frac{2}{3} & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & -17 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 6 \times (-49 + 51) = 12.$$

（四）克莱姆法则

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \tag{1}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程（1）有唯一解：

$$x_j=\frac{D_j}{D}\qquad (j=1,2).$$

其中：$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{2}$$

当系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$ 时，方程组（2）有唯一解：

$$x_j=\frac{D_j}{D}\qquad (j=1,\ 2,\ 3).$$

其中：$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

类似地，对于含有 n 个未知数 x_1，x_2，…，x_n 的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{3}$$

它的解可以用 n 阶行列式表示.

克莱姆法则 如果线性方程组（3）的系数行列式 D 不等于 0，即：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

则线性方程组（3）有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中 D_j（$j=1$，2，…，n）是把系数行列式 D 中第 j 列的元素对应地用方程组右端的常数项 b_1，b_2，…，b_n，代替后所得到的 n 阶行列式，即