全国各类成人高等学校招生复习考试指导丛书

用北大版书
圆理想之梦

数学

附解题技巧与指导

（文史财经类）

主编 卢世玮

第一轮复习用书

（主干教材）

北京大学出版社
航空工业出版社

全国各类成人高等学校招生复习考试指导丛书

数学

附解题技巧与指导

（文史财经类）

主编 卢世玮
编者 彭林
李家智

北京大学出版社
航空工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学:附解题技巧与指导(文史财经类)/卢世玮主编. - 北京:北京大学出版社:航空工业出版社,1999.9
(全国各类成人高等学校招生复习考试指导丛书)
ISBN 7 - 80134 - 506 - 1

Ⅰ.数… Ⅱ.卢… Ⅲ.数学课 - 成人教育:高等教育 - 入学考试 - 教学参考资料 Ⅳ.G723.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 34342 号

北京大学出版社出版发行
(北京市海淀区中关村北京大学校内 100871)
航空工业出版社出版发行
(北京市安定门外小关东里 14 号 100029)
北京机工印刷厂印刷 全国各地新华书店经售
1999 年 9 月第 1 版 1999 年 9 月第 1 次印刷
开本:787 × 1092 1/16 印张:19 字数:510.7 千字
印数:1 - 8800 定价:20.00 元

前　言

为了帮助报考各类成人高等学校(含广播电视大学、职工高等学校、农民高等学校、管理干部学院、教育学院和教师进修学院,独立设置的函授学院、普通高校举办的成人高等学院等)的考生系统复习中学课程,顺利通过每年一度的全国各类成人高等学校招生考试,我们根据国家教育部最新修订的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》(以下简称《新大纲》),组织《新大纲》的制订者、人民教育出版社的成人教育专家、编审、首都著名中学的学者、特级教师等,编写了这套《全国各类成人高等学校招生复习考试指导丛书》。

《指导丛书》包括**第一轮复习用书**(主干教材)、**第二轮复习用书**(归纳、总结、提高)、**第三轮复习用书**(冲刺复习)。第一轮复习用书包括政治、语文、数学(文)、数学(理)、物理、化学、历史、地理八个考试科目的主干教材,另加《地理读图填图练习册》一册。第二轮复习用书包括文、理科应试指导二册。第三轮复习用书包括文、理科考前总复习模拟试卷二册。整套丛书紧扣《新大纲》,采用全新的编排体例,注重知识的系统性、全面性、综合性,便于考生循序渐进地进行复习备考。

《数学附解题技巧与指导(文史财经类)》是本套丛书第一轮复习用书(主干教材)之一。本书有以下几个特点:

1. 知识的系统性:本书严格按照《新大纲》编写,每章知识结构和内容通过"学习目的和要求"、"知识要点"、"重点、难点分析与说明"各项表述,有利于考生遵循学习的认知规律、循序渐进地复习掌握考试所要求的知识体系与相关的重点、难点。

2. 较强的针对性:针对成人高考所必考的知识、方法、能力编写的"典型例题分析与解答"、"错解分析"、"历年试题分析与解答"组成精辟的"三题举要",既从正面指导考生如何审题及掌握解题策略,又通过错解分析指导考生如何防范常见错误。"三题举要"详细表述出成人高考对考生的要求,是准备应试的考生必掌握的内容。

3. 复习的实用性:按照《新大纲》的内容要求和难度层次编写的练习题与单元测验题可以使考生在复习时有步骤、系统地练习或测试。六套成人高考数学(文)科模拟试卷可供考生综合检测复习效果之用。

本书在编写时,注意到对解题的方法与技巧作了比较详细的分析与说明,以引导考生注意掌握运用基础知识和基本技能解决问题,提高整体能力。

参加本书编写工作的有卢世玮、彭林、李家智,主编是卢世玮。

由于编写时间较紧迫,加之作者水平有限,书中难免有疏误之处,恳请读者批评指正,以期再版时修订。

编　者
1999 年 9 月

目　　录

第一部分　代　　数

第二部分　三　　角

第三部分　解析几何

第一部分　代　　数

第一章　数、式、方程和方程组

学习目的和要求

（一）理解有理数、实数及数轴、相反数、绝对值、倒数、算术平方根的概念，会进行有关计算.

（二）理解有关整式、分式、二次根式的概念，掌握它们的一些性质和运算法则.

（三）掌握一元一次方程、一元二次方程的解法，能灵活运用一元二次方程根的判别式以及根与系数的关系解决有关问题.

（四）会解有惟一解的二元一次方程组、三元一次方程组；会解由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组；会解简单的由两个二元二次方程组成的方程组（主要指以下几种类型：用加减消元法可消去某个未知数、可消去二次项的，以及至少有一个方程可分解成一次方程的）.

知识要点

一、数

1. 有关数的基本概念

(1)实数

有理数与无理数统称为实数.

有限小数或循环小数统称有理数，任何一个有理数均可以表示成$\frac{n}{m}$形式，其中 $m,n\in Z$，且 $m\neq 0$.

无限不循环小数称为无理数.

实数可以按照下面的方法分类：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\end{cases}$$

(2)数轴

规定了原点、正方向和长度单位的直线叫数轴.

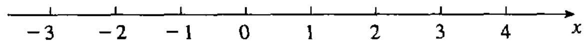

图 1-1

原点、正方向和单位长度称为数轴的三要素.

每个实数都可以用数轴上的一个点来表示;反之,数轴上的每一个点又都可以表示一个实数.也就是说,实数和数轴上的点是一一对应的.

在数轴上的任意两个点中,右边的点所对应的实数总大于左边的点所对应的实数.

(3)相反数

在数轴上分别在原点的两旁、离开原点的距离相等的两个点所对应的数叫做互为相反数.也就是说,只有符号不同的两个数叫做互为相反数,零的相反数是零.

例如,5 和 -5,$\sqrt{2}$和 $-\sqrt{2}$分别是互为相反数.

(4)倒数

1 除以一个数的商叫做这个数的倒数.

例如,3 和$\frac{1}{3}$,$-\sqrt{2}$和$-\frac{1}{\sqrt{2}}$分别互为倒数.

若 $a\neq0$,a 的倒数是$\frac{1}{a}$,也就是 a 和$\frac{1}{a}$互为倒数.又因为 $a\cdot\frac{1}{a}=1$,所以,若 $ab=1$,则 a、b 互为倒数.反之也对.

(5)绝对值

在数轴上表示一个数的点,它离开原点的距离叫做这个数的绝对值.a 的绝对值表示为$|a|$.

因此,一个正数的绝对值是它本身;一个负数的绝对值是它的相反数;零的绝对值是零.用式子表示为:

$$|a|=\begin{cases}a & (a>0)\\0 & (a=0)\\-a & (a<0)\end{cases}$$

例如,$|5|=5$,$|-5|=5$,$|0|=0$.

注意,$|a|$是一个非负数(大于零或等于零).

(6)平方根

如果一个数 x 的平方等于 a,即 $x^2=a$,则称 x 为 a 的平方根或二次方根.

正数 a 的平方根有两个,它们互为相反数,其中一个正的平方根记为$\sqrt{a}$,另一个负的平方根记为 $-\sqrt{a}$.正的平方根$\sqrt{a}$又叫做算术平方根(简称算术根).

例如,4 的平方根是 ±2,算术根是 2;

3 的平方根是 $\pm\sqrt{3}$,算术根是$\sqrt{3}$.

注意,$\sqrt{a}$读作“根号 a”,它是一个非负数;$\sqrt{a}$中的 a 叫做被开方数,它也是一个非负数.

2. 实数的运算

(1)运算法则

加法:同号两数相加,取原来的符号,并把绝对值相加;异号两数相加,取绝对值较大的加数的符号,并用较大的绝对值减去较小的绝对值;任何数与零相加等于原数.

减法:减去一个数,等于加上这个数的相反数.

乘法:两数相乘,同号得正,异号得负,并把绝对值相乘;零乘以任何数都得零.

除法:两数相除,同号得正,异号得负,并把绝对值相除;零除以任何一个不为零的数等于零;零不能作除数.

除以一个数等于乘以这个数的倒数,即

$$a \div b = a \times \frac{1}{b}(b \neq 0).$$

乘方:几个相同的因数相乘的运算叫做乘方,乘方所得结果叫做幂.如

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots\cdots a}_{n个} = a^n.$$

其中,a 叫做底数,n 叫做指数,a^n 表示有 n 个 a 相乘所得的积,叫做 a 的 n 次幂,n 是正整数,a^n 也叫 a 的正整数次幂.

正数的任何次幂都是正数;负数的偶数次幂是正数,奇数次幂是负数;零的正整数次幂是零.

例如,$(-2)^4 = 2^4 = 16$;$(-2)^5 = -2^5 = -32$;$0^3 = 0$.

(2)运算律

设 a、b、c 为任意实数,则有:

表 1-1　代数运算规律一览表

运算律	加　法	乘　法
交换律	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
结合律	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
分配律	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	

(3)运算顺序

在一个算式中,应先算乘方、开方,再算乘、除,最后算加减;有括号时,应先算括号里的;若有几层括号,应从最里层的括号算起,逐层向外去掉括号,必要时,可根据运算律改变上述运算顺序.

二、式

1. 代数式

(1)代数式的概念

用运算符号把数或表示数的字母连结而成的式子,叫做代数式.

用数值代替代数式里的字母,计算后所得的结果,叫做代数式的值.

(2)代数式的分类

代数式的分类可表示如下:

$$代数式\begin{cases}有理式\begin{cases}整式\begin{cases}单项式\\多项式\end{cases}\\分式\end{cases}\\无理式\end{cases}$$

2. 有理式

(1)整式

①整式的有关概念

由几个数字和字母相乘所得到的代数式,叫做单项式,单项式中数字因数叫做单项式的系数,所有字母的指数和叫做单项式的次数.

例如,$-4a^2b$ 是单项式,其中 -4 是这个单项式的系数,这个单项式的次数是 3.

几个单项式的和叫做多项式，多项式中的每一个单项式叫做多项式的项，次数最高项的次数叫做多项式的次数.

例如，$6x^2+(-5x)+\frac{1}{2}$是多项式，简写为$6x^2-5x+\frac{1}{2}$，其中$6x^2$，$-5x$，$\frac{1}{2}$都是这个多项式的项，这个多项式的次数是2.

②整式的加减

在一个多项式里，所含字母相同，并且相同字母的指数也相同的项，叫做同类项.

例如，$4xy^2+3x^2y+2x-3+2xy^2-2x^2y-3y+5$中$4xy^2$和$2xy^2$，$3x^2y$和$-2x^2y$分别是同类项，不含字母的项叫做常数项，常数项也是同类项，如多项式中-3和5.

把多项式中的同类项合并成一项，叫做合并同类项，方法是把同类项的系数相加，所得结果为系数，字母和字母的指数都不变.

整式的加、减运算，实际上就是合并同类项，如遇到括号，就根据去括号法则，先去括号，再合并同类项.

例如，$(3a^2-2ab+b^2)-(2a^2+ab+b^2)=3a^2-2ab+b^2-2a^2-ab-b^2=a^2-3ab$.

③幂的运算法则

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},$$
$$a^m\div a^n=a^{m-n}(a\neq0,m>n),$$
$$(a^m)^n=a^{mn},$$
$$(ab)^n=a^nb^n.$$

④整式的乘法

单项式乘以单项式的方法是把系数相乘作为积的系数，并把同底数的幂相乘，对于只在一个单项式里有的字母，连同它们的指数作为积的一个因式.

例如，$-3x^2y^3z\cdot2x^2y=-6x^4y^4z$.

单项式乘以多项式的方法是用单项式去乘多项式的每一项，再把所得的积相加，即

$$m(a+b+c)=ma+mb+mc.$$

多项式乘以多项式的方法是先用一个多项式的每一项乘以另一个多项式，再把所得的积相加，即

$$(a+b)(m+n)=a(m+n)+b(m+n)=am+an+bm+bn.$$

⑤乘法公式

完全平方公式：$(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$.

平方差公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

立方和与立方差公式：$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$.

⑥多项式的因式分解

把一个多项式化成几个整式的积的形式叫做多项式的因式分解.

多项式的因式分解与整式乘法是互逆的两个恒等变形的过程.

因式分解常用的方法有：提取公因式法，公式法，十字相乘法，分组分解法等.

如果多项式的各项有公因式，可以把这个公因式提到括号外面，将多项式写成因式乘积的形式，这种分解因式的方法叫做提取公因式法.

公因式可能是单纯的数字，如：

$$5a+10b+15c=5(a+2b+3c),$$

5 作为公因数提出来.

公因式是单项式的情况,如

$$ma+mb+mc=m(a+b+c),$$

m 作为公因式提出来.

公因式是多项式的情况,如

$$m(a+b+c)+n(a+b+c)+p(a+b+c)=(a+b+c)(m+n+p),$$

$a+b+c$ 作为公因式提出来.

因此,找准公因式是使用提取公因式法的关键.

把前面所列的乘法公式反过来使用,就是因式分解公式,即

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b);$$

$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2;$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2).$$

当多项式符合上述公式的结构规律时,可直接运用公式,一步步完成因式分解.

运用公式法分解因式的关键是要弄清各个公式的形式和特点,熟练地掌握公式.

对于一个二次三项式,可以借助画十字交叉线的办法分解它的系数,从而帮助我们把二次三项式分解因式的方法,通常叫做十字相乘法.

对于二次项系数是 1 的二次三项式,有

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b),$$

其十字交叉线很简单,即

$$\begin{array}{ccc} 1 & & a \\ & \times & \\ 1 & & b \end{array}$$

对于二次项系数是大于 1 的整数时,有

$a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$,其十字交叉草式如下:

$$\begin{array}{ccc} a_1 & & c_1 \\ & \times & \\ a_2 & & c_2 \end{array}$$

a_1a_2 是二次项系数,$a_1c_2+a_2c_1$ 是一次项系数,c_1c_2 是常数项.

这个十字交叉线将帮助我们因式分解.必须注意,在数字的搭配上可能有多种情况,这就要反复尝试或凭借数字的特征来完成.还应强调指出,不是任何一个二次三项式都能用十字相乘法来分解因式的.

在多项式没有直接应用提取公因式法、公式法、十字相乘法分解因式的可能时,请考虑分组分解法,分组后各组之间能用提取公因式法、公式法和十字相乘法继续分解.

例如,$am+an+bm+bn=a(m+n)+b(m+n)=(m+n)(a+b)$.

⑦整式的除法

单项式除以单项式的方法是把被除式的系数、幂分别除以除式的系数、同底数幂作为商的因式,对于只在被除式里含有的字母,则连同它的指数作为商的一个因式.

例如,$48a^3b^4x^4\div 12a^2b^3=(48\div 12)(a^3\div a^2)(b^4\div b^3)x^4=4abx^4$.

多项式除以单项式的方法是先把多项式的每一项除以单项式,再把所得的商相加.

例如,$(48x^4+24x^3-30x^2)\div 6x^2=48x^4\div 6x^2+24x^3\div 6x^2+(-30x^2)\div 6x^2=8x^2+4x-5$.

多项式除以多项式的方法是先把两个多项式都按同一字母降幂排列,若被除式有缺项,留出空

位(或补 0),用竖式演算.

例如,计算$(2+11x+20x^2+32x^3)\div(1+4x)$.

先把被除式与除式的两个多项式都按同一字母 x 降幂排列,再用竖式演算:

$$\begin{array}{r}
8x^2+3x+2 \\
4x+1\;\overline{)\,32x^3+20x^2+11x+2} \\
\underline{32x^3+8x^2} \\
12x^2+11x \\
\underline{12x^2+3x} \\
8x+2 \\
\underline{8x+2} \\
0
\end{array}$$

所以 $(2+11x+20x^2+32x^3)\div(1+4x)=8x^2+3x+2$.

(2)分式

①概念

设 A、B 是两个整式,且 B 含有字母,则式子$\dfrac{A}{B}$叫做分式.

例如,$\dfrac{1}{x}$、$\dfrac{x+1}{2x-5}$等是分式.

如果没有特别说明,我们约定分式中的分母的值不为零.

②基本性质

分式的分子和分母都乘以(或除以)同一个不等于零的整式,分式的值不变,即

$$\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M},\frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}(M\text{ 是不等于零的整式}).$$

③约分和通分

把一个分式的分子与分母的公因式约去,叫做分式的约分,即

$$\frac{ma}{mb}=\frac{a}{b}.$$

分子与分母没有公因式的分式叫做最简分式.

根据分式的基本性质,把几个异分母的分式化成同分母的分式,叫做分式的通分.

④符号法则

分式的分子、分母与分式本身的符号,改变其中的任何两个,分式的值不变,即

$$\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}=-\frac{-a}{-b}.$$

⑤分式的运算

加、减法:先通分,变成同分母的分式,分子相加减,分母保持不变,即

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=\frac{ad\pm bc}{bd}.$$

乘、除法:分式乘以分式,用分子的积作为积的分子,分母的积作为积的分母,即

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

分式除以分式,将除式的分子、分母颠倒后,与被除式相乘,即

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}.$$

乘方:分式乘方,将分子、分母分别乘方,即

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}(n\text{ 是正整数}).$$

3. 二次根式

(1)概念

式子$\sqrt{a}(a\geqslant0)$叫做二次根式.

由定义知道,二次根式$\sqrt{a}(a\geqslant0)$就是 a 的算术根的表示式.

例如,$\sqrt{5}$、$\sqrt{x^2+1}$、$\sqrt{y^2-y-1}$等都是二次根式.

注意,对于含有字母的根式,如果没有特别说明,我们均认为字母所取的值使根式有意义.

(2)二次根式的性质

$$(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant0),$$

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant0),\\ -a & (a<0).\end{cases}$$

(3)最简二次根式

满足下列两个条件的二次根式称为最简二次根式:

①被开方数的每一个因式的指数都小于根指数 2;

②被开方数不含分母.

例如,$\sqrt{3}$,$\sqrt{ab}$都是最简二次根式,而$\sqrt{4a^2}$$\sqrt{\frac{a}{2}}$,$\sqrt{18}$等都不是最简二次根式.

(4)同类二次根式

几个二次根式化成最简二次根式以后,如果被开方数都相同,那么这几个二次根式叫做同类二次根式.

例如,$\sqrt{12}$、$\sqrt{48}$、$\sqrt{75}$是同类二次根式,因为,$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$,$\sqrt{48}=4\sqrt{3}$,$\sqrt{75}=5\sqrt{3}$.

(5)二次根式的运算

①加、减法:先把各二次根式化为最简二次根式,再把同类二次根式合并.

例如,$\sqrt{12}-\sqrt{48}+\sqrt{8}-\sqrt{32}=2\sqrt{3}-4\sqrt{3}+2\sqrt{2}-4\sqrt{2}=-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$.

②乘、除法:$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

(6)分母有理化

①有理化因式

两个含有二次根式的代数式相乘,如果积不含二次根式,那么称这两个代数式互为有理化因式.

例如,$\sqrt{a}$与$\sqrt{a}$、$a\pm\sqrt{b}$与$a\mp\sqrt{b}$、$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$与$\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$分别互为有理化因式.

②分母有理化

化去分母中的根号,叫做把分母有理化.

把分母有理化时,一般是把分子和分母都乘以分母的有理化因式.

二次根式的除法,可以先写成分式的形式,再通过分母有理化进行.

注意,二次根式运算的最后结果都要化为最简二次根式.

三、方程和方程组

1. 方程的基本概念

(1)方程

含有未知数的等式叫做方程.

例如,$2x-1=0$、$2x^2-3y=0$ 都是方程.

(2)方程的解

能使方程左右两边的值相等的未知数的值,叫做方程的解.

只含有一个未知数的方程的解,也叫做方程的根.

(3)解方程

求方程的解或确定方程无解的过程,叫做解方程.

(4)同解方程

如果两个方程的解完全相同,那么这两个方程叫做同解方程.

(5)方程的同解原理

①方程的两边都加上(或都减去)同一个数或同一个整式,所得方程和原方程是同解方程.

②方程的两边都乘以(或都除以)不等于零的同一个数,所得方程和原方程是同解方程.

2. 一元一次方程及其解法

(1)一元一次方程

只含有一个未知数,并且未知数的次数是一次的方程,叫做一元一次方程.

(2)一般形式

$$ax+b=0\ (a\neq0).$$

(3) 解法

解一元一次方程的一般步骤是:①去分母;②去括号;③移项;④合并同类项,把方程化成 $mx=n$ 形式;⑤方程两边都除以未知数的系数,得到方程的解 $x=\dfrac{n}{m}(m\neq0)$.

3. 一元二次方程及其解法

(1)一元二次方程

只含有一个未知数,并且未知数的最高次数是二次的方程,叫做一元二次方程.

(2)一般形式

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq0).$$

(3)解法

①开平方法

形如 $ax^2+c=0$ 的方程,化为 $x^2=-\dfrac{c}{a}$,若 $-\dfrac{c}{a}\geqslant0$,则 $x=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$.

或把方程变形为 $(x+m)^2=n(n\geqslant0)$,则 $x+m=\pm\sqrt{n}$,$x=-m\pm\sqrt{n}$.

②配方法

用配方法把方程变形为 $(x+m)^2=n(n\geqslant0)$ 的形式,再用开平方法得到方程的解.

例如,求方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的解.

将方程变形:
$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a},$$
$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

得到 $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

③求根公式法

当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

这就是一元二次方程的求根公式.

先把一元二次方程化为一般形式，然后把各项的系数 a、b、c 的值代入求根公式，便可得到方程的解.

④因式分解法

如果 $ax^2+bx+c=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$，那么方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解是 $a_1x+c_1=0$ 或 $a_2x+c_2=0$ 的解，所以 $x_1=-\frac{c_1}{a_1}$，$x_2=-\frac{c_2}{a_2}$是一元二次方程的解.

(4)一元二次方程的根的判别式

$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$经过配方得到

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

$\because\quad a\neq 0,\therefore\quad 4a^2>0.$

因此，根据 b^2-4ac 的符号可以判定一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的根的情况.

我们把 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的判别式，通常用符号“Δ”来表示.

当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；

当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数根；

当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程没有实数根.

(5)根与系数的关系

如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$有两个根，那么

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

反过来，以 x_1,x_2 为两个根的一元二次方程是 $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$.

例如，以 $x_1=-3,x_2=4$ 为两个根的一元二次方程是 $x^2-(-3+4)x+(-3)\cdot 4=0$，即 $x^2-x-12=0$.

4. 方程组

(1)方程组的基本概念

①方程组

由几个方程组成的一组方程，叫做方程组.

②方程组的解

方程组里各个方程的公共解，叫做这个方程组的解.

③解方程组

求方程组的全部解或确定方程组无解的过程，叫做解方程组.

(2)二元一次方程组及其解法

①二元一次方程组

含有相同的两个未知数的两个一次方程组成的方程组,叫做二元一次方程组.

②一般形式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

③解法

二元一次方程组的解法有:代入消元法;加减消元法等.

用代入消元法解二元一次方程组的步骤:

A. 把方程组里的一个方程变形,用含有一个未知数的代数式表示另一个未知数;

B. 用 A 中代数式代替另一个方程中相应的未知数,得到一个一元一次方程,并解这个一元一次方程,得出一个未知数的值;

C. 把求得的一个未知数的值代入 A 中的代数式,求出另一个未知数的值;

D. 把两个未知数的值写在一起,就是方程组的解.

用加减消元法解二元一次方程组的步骤:

A. 根据方程的同解原理,把方程组中的某一个未知数的系数化为绝对值相等的系数;

B. 把 A 中得到的两个方程的两边相加或相减,消去这个未知数,得出另一个未知数的一元一次方程,并解这个一元一次方程,得出一个未知数的值;

C. 把这个未知数的值代入方程组的任何一个方程,得出另一个未知数的值;

D. 把两个未知数的值写在一起,就是方程组的解.

解二元一次方程组无论是代入消元法还是加减消元法,其本质都是先消去一个未知数,即把二元一次方程组转化为一元一次方程来解.

(3)三元一次方程组的解法

解三元一次方程组的一般方法仍是消元,可用代入消元法或加减消元法先消去一个未知数,化成两个二元一次方程组成的方程组.解这个二元一次方程组得到两个未知数的值.再把这两个未知数的值代入原方程组中的任何一个方程,求出另一个未知数的值,得到方程组的解.

(4)简单的二元二次方程组

①二元二次方程

含有两个未知数,并且含未知数的项的最高次数是 2 的整式方程,叫做二元二次方程.

二元二次方程的一般形式:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

其中 a、b、c、d、e、f 是常数,且 a、b、c 中至少有一个不是零.

②由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的二元二次方程组的解法

通常解法是代入消元法.由二元一次方程解出 x 或解出 y 代入二元二次方程,化为一元二次方程来解.

③由两个二元二次方程组成的方程组的解法

两个二元二次方程组成的方程组的解法是比较复杂的,但其解题思路仍是消元与降次.

重点、难点分析与说明

数及其有关运算律是数学的基础.

相反数、绝对值、倒数、算术平方根是这部分的重要概念，它们在数学的计算中扮演重要的角色.

整式、分式、根式部分的重点是它的概念及运算.

由于前面三部分是代数中的基础知识，在试题中常作为数学其他部分的工具，单独命题不多.

一元二次方程的重点是一元二次方程的解法、根的判别式、根与系数的关系(韦达定理). 难点是含有参数的一元二次方程的解法，以及根的判别式和韦达定理的综合运用.

与一元二次方程有关的试题多为选择题或解答题，属较容易题或中等难度题. 但在其他学科中用到一元二次方程有关知识的亦不少.

作为单独以方程组形式出现的试题比较少，它多出现在数学的其他知识尤其是在解析几何有关的计算问题中.

三 题 举 要

Ⅰ 典型例题分析与解答

例 1 判断下列命题是否正确，正确的在括号内画“√”，错误的画“×”.

(1)若 b 是有理数，则 $-b$ 为负有理数.(　　)

(2)所有的整数都是正数.(　　)

(3)所有的无限小数都是无理数.(　　)

(4)不论 a 是什么实数，$-a^2$ 永远是负数 .(　　)

(5)整数和分数统称为有理数.(　　)

(6)既不是正数，又不是整数的数不存在.(　　)

分析：要判断这些命题是否正确，首先要理解实数与有理数的分类. 有理数与无理数统称为实数，有理数又可分为正有理数、负有理数和零，或分为整数和分数，整数中包括正整数、负整数和零，分数中包括了正分数和负分数. 了解了这些知识间的联系，再判断以上几个命题的对错就比较容易了. 在方法上要否定一个命题，只要举一反例就能判定这个命题是不正确的. $-a^2$ 永远是负数这个命题中，举出 $a=0$，则 $-a^2=0$，就可以判断这个命题是错的.

答：(1)×；(2)×；(3)×；(4)×；(5)√；(6)×.

例 2 填空：

(1)$2\sqrt{3}-3$ 的倒数是________，相反数是________，绝对值是________.

(2)数轴上距原点距离是 3 个单位长度的数是__________.

(3)若 $|m|<2$，则整数 m 值是______.

(4)________的倒数的相反数是 $\frac{1}{5}$.

(5)若 $|m-2|=1$，则 m 值是____________.

(6)若某数的倒数是它本身，则某数是________.

分析：倒数、相反数、绝对值是实数中几个很重要的概念，特别是绝对值概念既是重点又是难

点,绝对值的几何意义定义为在数轴上表示这个数的点距原点的距离.考虑$|m|<2$的整数与$|m-2|=1$的问题,都可以从绝对值的几何意义来考虑.或从正数的绝对值是它本身,负数的绝对值是它的相反数,零的绝对值是零去考虑.

答:(1) $2\sqrt{3}-3$的倒数是$\frac{1}{2\sqrt{3}-3}=\frac{2\sqrt{3}+3}{(2\sqrt{3}-3)(2\sqrt{3}+3)}=\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$,相反数是$3-2\sqrt{3}$,绝对值是$2\sqrt{3}-3$;(2) ±3;(3) $m=0,\pm1$;(4) -5;(5) $m=3$或1;(6)设某数是x,由题意$\frac{1}{x}=x$,则$x^2=1$,$x=\pm1$.

例3 已知有理数a、b在数轴上对应的点如图1-2所示,判断$a+b$、$a-b$是正数还是负数.

分析:数轴是研究数的性质的重要工具,数轴的建立把数和形有机的结合起来,由有理数a、b对应的点在数轴上的位置可知$a>0$、$b<0$,且a距原点距离比b距原点距离小,则一定有$|b|>|a|$,所以$a-b$一定是正数,$a+b$一定是负数.

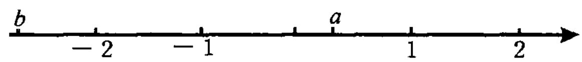

图1-2

例4 选择题:

(1)下列命题中,正确命题的个数是(　　).

①两个数中,较大数的绝对值也较大.

②一个数的绝对值的相反数一定是负数.

③零是最小的整数.

④-0.001的相反数是$\frac{1}{1000}$.

A.0个　　B.1个　　C.2个　　D.3个

(2)两个无理数之和(　　).

A.不会是零　　B.一定是无理数

C.不会是有理数　　D.可能是有理数

(3)下列4个命题中,正确命题是(　　).

A.一个整数的倒数都小于这个整数.　　B.符号相反的两个数就是相反数

C.任何有理数的绝对值都是正数　　D.$-a$是a的相反数

(4)若$|a|=-a$,则a的取值范围是(　　).

A.正数　　B.负数　　C.非负数　　D.非正数

分析:这是一组考查概念的问题,在解答时要注意全面和细致,例如零这个数就不能忽略,零的绝对值是零,零的相反数还是零,把"0"这个数做为一个特例情况考虑.

答:(1)B;　(2)D;　(3)D;　(4)D

例5 已知m、n是实数,且$\sqrt{2m+1}+|3n-2|=0$,求实数$m+n^2$的相反数的倒数值.

分析:因为一个实数的算术根与绝对值都是非负数,所以若和为零,则应每一项都为零.

解:$\because\sqrt{2m+1}+|3n-2|=0$,

又$\because\sqrt{2m+1}\geqslant0$,$|3n-2|\geqslant0$,

$\therefore 2m+1=0,3n-2=0$,

$\therefore m=-\frac{1}{2},n=\frac{2}{3}$.