金融函授中专教材

JINRONG
HANSHOU
zhong zhuan
jiaocai

应用数学

湖南省金融函授中等专业学校

湖南大学出版社

应 用 数 学

王苡耶　主编

湖 南 大 学 出 版 社

应 用 数 学

王苡耶　主编

☆

湖南大学出版社出版发行

解放军长沙政治军官进修学院印刷厂印装

☆

787×1092　1/32　$15\frac{1}{16}$印张　338千字

1987年1月第一版　1987年1月第一次印刷

印数0001—5000

统一书号：13412·6　定价：3.70元

ISBN7—314—00090—5/N·6

前　言

为了培养适应当前经济体制改革和“四化”建设需要的中级人才，湖南省金融函授中等专业学校组织力量编写了适合于成人学习的函授中专用的《应用数学》。

此书属基本教材（附有教学大纲），为了便于自学，另编有《应用数学学习指导》。这套书的内容为：集合，基本初等函数，不等式，排列组合及二项式定理，数列与数学归纳法，三角，平面解析几何，极限与连续，导数与微分，线性代数等。为了巩固所学的概念，还编写了一定数量的例题和习题，并指出了解题注意事项和学习方法。全书简明易懂，颇具特色。也可作为电大、职大、函大的学员及高中生自学的参考读物。

本书由王苡耶主编，第一章至第九章由王苡耶执笔，第十章由罗似然执笔。全书经湖南师大数学系戴世虎教授详细审稿。不足之处，盼读者批评指正。

编者　　1986．8．

目　录

第一章　集合与函数

第二章　基本初等函数

第三章　不等式

第四章　平面三角

第八章 极限与连续

第九章 导数与微分

第十章 线性代数

第一章　集合与函数

§1·1　集　合

一　集合的概念

“集合”是数学中一个重要的基础概念，许多近代数学，如逻辑、实变函数、泛函分析、概率统计、拓扑学等都是建立在集合基础之上的。

在日常生活中，我们常常要研究某些事物组成的集体，或是按照某一法则进行研究的对象的全体。如全体实数，某企业某年生产出的新产品等，这些组成的集体都是集合。

集合：把一些确定的对象看成一个整体就形成了一个集合．构成集合的对象称为该集合的元（元素）．

某个集合，一当给定以后，它的元素就随之而定．

如：（1）全中国的火车站；

（2）某单位几项改革的方案；

（3）$x^2-3x-4=0$ 的根；

（4）平面上满足$x^2+y^2\leqslant 25$的所有的点．

这些都可称为集合．

但是，像“接近零的数的全体”，“漂亮图形的全体”，“高个子的人”等，其中的对象不能确定，这样的集体，不能

称为集合。

集合通常用大写字母表示，集合的元素用小写字母表示。

元素与集合之间的关系，用“$\in$”（读作“属于”）或“$\overline{\in}$”（读作“不属于”）表示。如果a是集合A的元素，则记作$a\in A$。读作a属于A（或a在A中）；如果a不是集合A的元素，则记作$a\overline{\in}A$读作a不属于A（或a不在A中）

全体自然数的集合称为自然数集，记为N；

全体有理数的集合称为有理数集，记为Q；

全体整数的集合称为整数集，记为Z；

全体实数的集合称为实数集，记为R；

为了方便起见，有时还用Q^+表示正有理数集，用R^-表示负实数集等。

很明显：$\sqrt{2}\overline{\in}Q$，而$\sqrt{2}\in R^+$。

二　集合的表示法

1． 列举法：按任意顺序列出某个集合的所有元素，并且用“{ }”括起来。

如：由a，i，u，t，p五个元素组成的集合A可表示为：

$A=\{a, i, u, t, p\}$。

又如由$x^2-3x-4=0$的根组成的集合B，可以表示为：

$B=\{4, -1\}$。

在一个集合里，不要求不同元素排列成一定的顺序。因此，集合$\{a, b, c\}$也可以记为集合$\{b, c, a\}$等。

用列举法表示集合时，必须列出集合的所有的元素，不得重复和遗漏。

如由-3，0，2，-3，-3，2组成的集合C，可以记为

$C=\{-3, 0, 2\}$.

2. 描述法：把集合中的一切元素共同的特性描述出来，写在大括号内表示集合。

如：A为全体奇数的集合，可表示为：

$A=\{x \mid x=2n-1, n\in z\}$

又如，设B为园$x^2+y^2=3^2$上的点的集合，可记为：

$B=\{(x, y) \mid x^2+y^2=9, x\in R, y\in R\}$。

集合与集合之间的关系，还可以用图形表示，这种图称为维恩图。维恩图是用一个简单的平面区域表示一个集合。

如图1—1，集合内的元素以区域内的点表示。

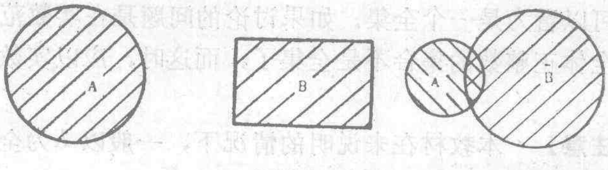


图1—1

三 集合的种类

1. 按集合中元素个数来分有：

① **有限集合**：含有有限个元素的集合。

② **无限集合**：含有无限个元素的集合。

③ **单元集合**：只含有一个元素的集合。

④ **空集**：不含任何元素的集合，记作ϕ。

如：① 若A表示-3与5之间的全体整数的集合，则：$A=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$是有限集；

② 若B表示全体偶数的集合。

则：$B=\{x \mid x=2n, n\in N\}$是无限集；

③ 如果C表示数 0 的集合，
则：$C=\{0\}$，C是单元集合；

④ 如果D表示方程：$x^2=-5$的实根的集合，
则：$D=\phi$（也可以记为$D=\{\ \}$）集合D是空集。

2． 按集合之间的关系来分有：

① **全集**：由所研究的所有事物构成的集合，称为全集，记为I（或U）。

【注意】 全集是相对的，一个集合，在一定的条件下是全集，在另一条件下又可能不是全集。

例如，讨论问题仅限于正整数的范围之内，则全体正整数的集合可以看为是一个全集。如果讨论的问题是在实数范围之内，则全体正整数的集合不是全集了，而这时，应以实数集为全集。

【注意】 本教材在未说明的情况下，一般以R为全集，即所研究的问题都是在实数范围内进行的。

② **子集**：对于两个集合A、B，如果

$x\in A$，则$x\in B$，则称A为B的子集。记为$A\subseteq B$（或$B\supseteq A$）。读作 A 包 含 于 B，（或B包含A）。即“$\subseteq$”读“包含于”，“$\supseteq$”读“包含”。

A是B的子集，从“$\subseteq$”符号来看，它形象地表明 A与B的关系有两种可能性，如图1—2

$$A\subseteq B\begin{cases}A\subset B\\ \text{或}\\ A=B\end{cases}$$

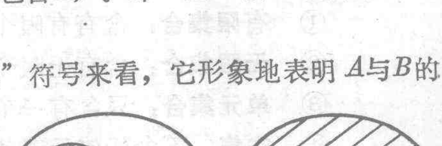


图1—2

由以上分析，很好理解集合的真子集与相等的概念。

③　**真子集**：如果A是B的子集，且B中至少有一个元素不属于A，那么A叫做B的真子集，记为：$A\subset B$(或$B\supset A$)，读作A真包含于B（或B真包含A），如图 1—3．

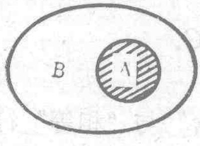


图1—3

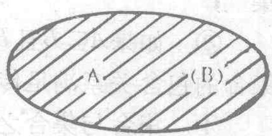


图1—4

即：“$\subset$”读为“真包含于”；“$\supset$”读为“真包含”．

$A\subset B$（或$B\supset A$）

④　**两集合相等**：对于集合A、B当它们的元素完全相同时，则A等于B，记为：$A=B$，如图 1—4．

如：设$A=\{x\mid x$为大于 1 小于 4 的整数$\}$

$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$

则：$A=B$。

【例 1】　显然有$N\subseteq Z$；$N\subseteq Q$；$R\supseteq Q^-$；

$N\subset R^+$；$N=Z^+$。

【例 2】　集合$\{a, b, c\}$的子集有：

ϕ, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$。

【例 3】　如果集合$A=\{x\mid -3\leqslant x<1\}$

$B=\{x\mid x>3$ 或$x\leqslant 2\}$。

如图 1—5，可见$B\supset A$。

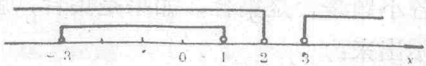


图1—5

据以上定义有以下结论：

① “$A\subseteq A$”即“任何一个集合都是它自己的子集”；

② 对于任意集合A，有$\phi\subseteq A$，即“空集是任何集合的子集”；

③ 如果$A\subseteq B$且$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$。即“集合的包含关系满足传递性”；

④ 集合与集合之间常用“包含”与“相等”符号表示；而元素与集合之间却用“属于”与“不属于”的符号表示。

【例 5】 如$-3\in Z^-$；$\sqrt{3}\overline{\in}Z$；$0\in\{0\}$；$0\overline{\in}\{\ \}$；$\{0\}\neq\phi$；$\phi\subset\{a, c\}$；$\{a, c\}\supset\{a\}$；$\{x, y, z\}=\{y, z, x\}$。

【例 6】 如果设$I=\{(x, y)\mid x^2+y^2\leqslant 25\}$

$A=\{(x, y)\mid x^2+y^2=25\}$

则：$A\subseteq I$。

如图 1—6

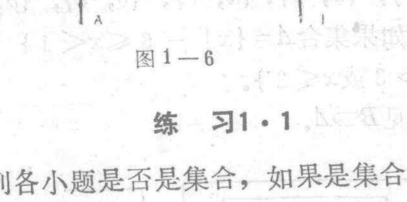


图 1—6

练 习1·1

1. 判断下列各小题是否是集合，如果是集合，就用适当的方法将它表示出来：

① 按阳历计算一年中有31天的月份；

② 全体小于零的数；

③ $x+1=3$ 的根；

④ $x^2-2x+8=0$ 的解；

⑤ 靠近3．9的数；

⑨ 直线$3x-2y+1=0$上全体的点．

2．写出$A=\{0,-2,8\}$的一切子集．并说明哪些是真子集．

3．判断下列各式是否正确，并说明理由：

① $5\subset\{x\mid x\leqslant 6\}$；

② $5\in\{x\mid x\leqslant 6\}$；

③ $\{5\}\subset\{x\mid x\leqslant 6\}$；

④ $\phi\in\{x\mid x\leqslant 6\}$；

⑤ $\phi\subset\{x\mid x\leqslant 6\}$；

⑥ $\phi=\{0\}$；

⑦ $0\in\phi$；

⑧ $0\,\overline{\in}\,\phi$．

4．用适当的符号（$\in$，$\overline{\in}$，$=$，$\subset$，$\supset$）填空：

① a____$\{a\}$； ② a____$\{a, b\}$；

③ d____$\{a, b, c\}$； ④ $\{a\}$____$\{a, c\}$；

⑤ $\{a, b, c\}$____$\{c, a, b\}$；

⑥ $\{3, 5\}$____$\{1, 3, 7, 5\}$；

⑦ $\{-2, 8, -3, 6\}$____$\{-3, 8\}$；

⑧ ϕ____$\{0.5, \frac{1}{3}, -7\}$．

5．若$A=\{x\mid -5<x\leqslant 2\}$

$B=\{x\mid x\geqslant -6.8\}$

试说明集合A与B之间的关系．

设$X=\{$位于-3与3之中间的整数$\}$

$Y=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

则X与Y两集合间是什么关系。

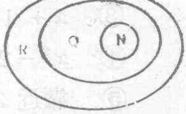


图1—6

7. 据图1—6，说出集合R、Q、N之间的关系。

§1·2 集合的运算

一 并集

定义1·1 由两个集合A与B的一切元素组成的集合，称为A与B的并集，记为$A\cup B$。如图1—7中阴影部分。

即：$A\cup B=\{x\mid x\in A$**或**$x\in B\}$。

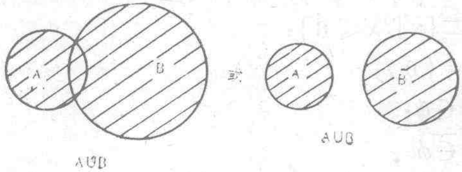


图1—7

集合的并有下列性质：

① $A\subset A\cup B$；　　$B\subset A\cup B$；

② $A\cup\phi=A$；　　$A\cup I=I$；

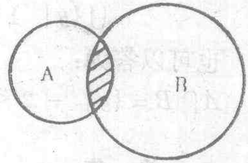
$A\cup A=A$。

二 交集

定义1·2 由两个集合A与B的一切公共元素为元素组成的集合，称为A与B的交集，记为$A\cap B$，如图1—8中阴影部分。

即$A\cap B=\{x\mid x\in A$且$x\in B\}$

集合的交有下列性质：



A ∩B

图 1—8

① $A\cap B\subset A$；

$A\cap B\subset B$；

② $A\cap\phi=\phi$；$A\cap I=A$；

$A\cap A=A$。

【例 1】 设A为某单位会英语的人的集合，B为某单位会日语的人的集合。

则：$A\cup B$表示会英语或会日语人的集合；

$A\cap B$表示既会英语又会日语人的集合。

【例 2】 设$A=\{a, b, c, d\}$；

$B=\{b, d, e, f, g\}$。

则：$A\cup B=\{a, b, c, d, e, f, g\}$。

$A\cap B=\{b, d\}$。

【例 3】 如果X表示全体奇数的集合，Y表示全体偶数的集合。

那么，$X\cap Y=\phi$。

一般地，当$A\cap B=\phi$时，称A与B是分离的。

【例 4】 设$A=\{y\mid -2<y\leqslant 4\}$

$B=\{y\mid y\geqslant 1$或$y\leqslant 0\}$。

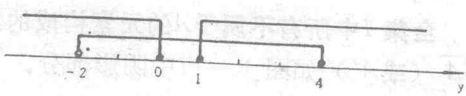


图 1—9

如图 1—9、$A\cup B=R$；

$A\cap B=\{y\mid -2<y\leqslant 0\}$