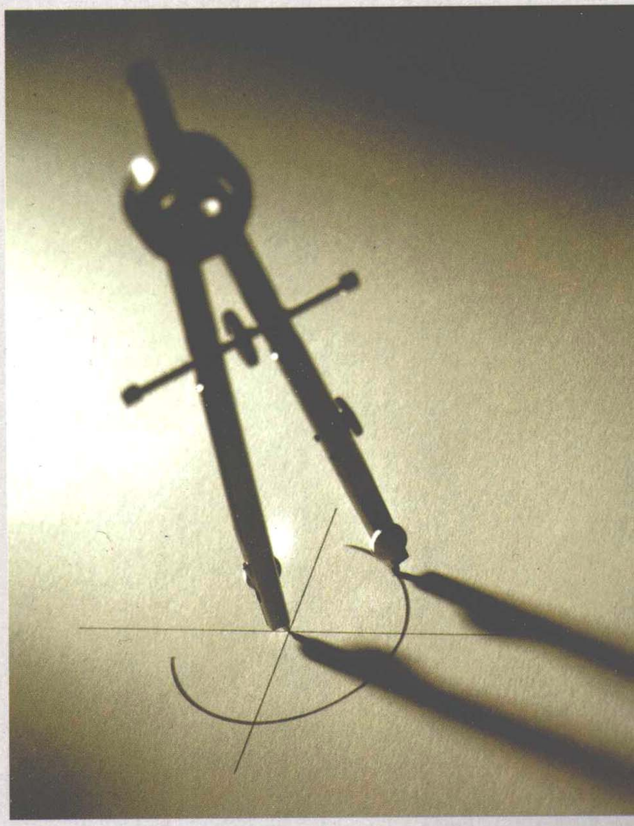
高等数学

◎主 编 杨天明

精讲精练

（高职版）



◇内容提要

◇重点难点

◇典型例题分析

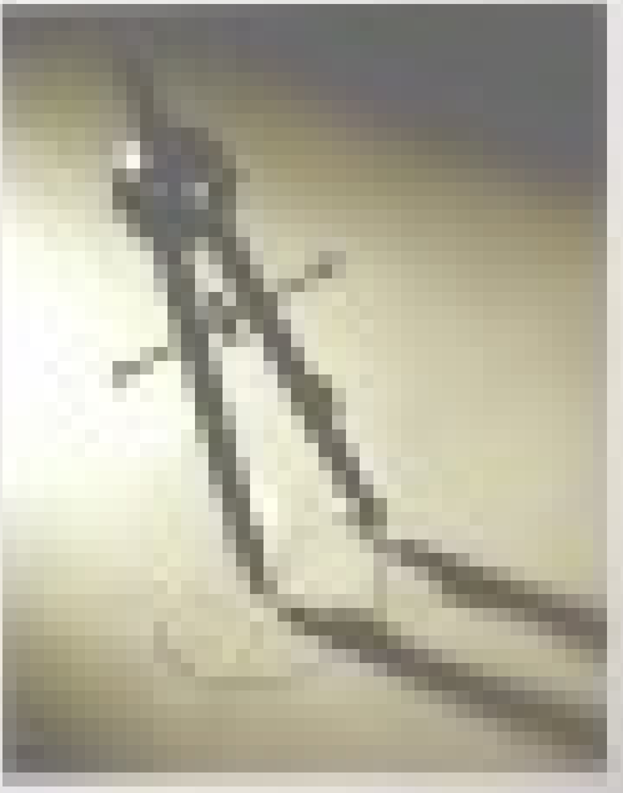
◇练习与自测

◇综合练习

南京大学出版社

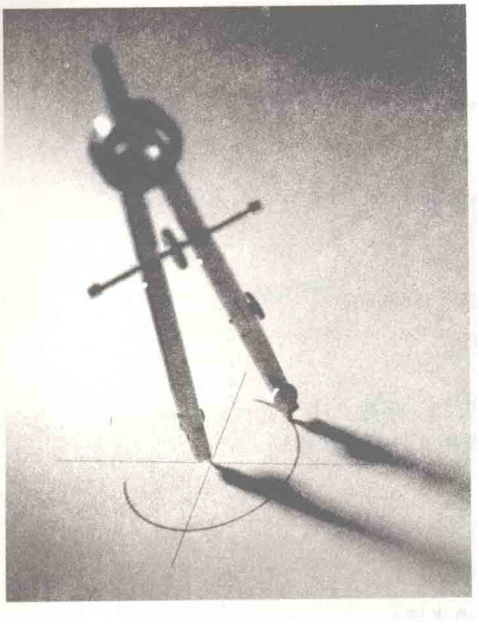
高等数学

精讲精练



高等数学

精讲精练



◎主　编　杨天明

◎副主编　梅　霞

◎参　编　（按姓氏笔画排序）

史和娣　陈志豪　陈　兵

唐孝法　曹卫锋　韩广发

蔡井伟

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学精讲精练/杨天明主编. —南京:南京大学出版社,2008.9
普通高等学校基础课辅导用书
ISBN 978-7-305-05559-1

Ⅰ. 高… Ⅱ. 杨… Ⅲ. 高等数学—高等学校:技术学校—教学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 148636 号

出 版 者 南京大学出版社
社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093
网 址 http://press.nju.edu.cn
出 版 人 左 健

丛 书 名 普通高等学校基础课辅导用书
书 名 高等数学精讲精练
主 编 杨天明
责任编辑 蔡文彬 编辑热线 025-83686531

照 排 南京南琳图文制作有限公司
印 刷 南京人民印刷厂
开 本 787×1092 1/16 印张 9.25 字数 231 千
版 次 2008 年 9 月第 1 版 2008 年 9 月第 1 次印刷
印 数 1—4000
ISBN 978-7-305-05559-1
定 价 18.00 元

发行热线 025-83594756
电子邮箱 sales@press.nju.edu.cn(销售部)
nupress1@public1.ptt.js.cn

编写说明

高等职业教育作为我国高等教育的一个重要组成部分，与普通高等教育相比有其自身特点。高等数学课程设置的目的是让学生获得更多有实用价值的数学知识和数学思想及方法，从而获得一种文化素养。

为了让学生更好更积极主动地学习，我们编写了与教材相配套的《高等数学精讲精练》。本书按每章的内容提要、重点难点、典型例题分析、练习题、自测题等五部分编排。根据高职高专高等数学的教学目标及学生的实际，本书立足学生基础训练，增强同步性，指导学生有效地获取知识，培养学生自学能力与应用能力。

本书共分五章。第一章由曹卫锋编写，第二章由唐孝法编写，第三章由蔡井伟编写，第四章由史和娣编写，第五章由陈志豪编写，综合练习由韩广发编写。其中第一章、第二章、第三章及综合练习由杨天明审核，第四章及第五章由梅霞审核。本书由杨天明统一策划，总纂定稿。

本书难易适度，重点突出，叙述清晰，推理正确。主要作为高等职业技术院校各专业使用，也可供其他相关人员学习参考。本书的出版得到了江苏农林职业技术学院基础部、教务处以及南京大学出版社的大力支持，在此谨表示衷心的感谢。

限于编者的水平，加之时间仓促，书中难免有不当之处，敬请专家、同仁以及广大读者批评指正。

编　者

2008 年 8 月

目　录

第一章　函数、极限与连续

内容提要

1. 理解函数的概念,掌握求函数定义域的方法,掌握基本初等函数及其图像和性质,理解复合函数与初等函数的概念,掌握函数的性质,会画分段函数的图像,会建立简单的函数表达式.

2. 理解极限的概念,掌握左极限、右极限的概念,熟练掌握极限四则运算法则,掌握两个重要极限,了解无穷小与无穷大的概念及无穷小的比较.

3. 理解函数连续的概念,掌握初等函数的连续性及闭区间上连续函数的性质.

4. 掌握函数间断点的概念以及间断点的分类.

5. 掌握求极限的方法.

重点、难点

1. 函数表达式的推演.
2. 求极限的类型.
3. 连续函数的介值定理.
4. 函数连续性的讨论.
5. 间断点的识别及分类.

典型例题分析

【例 1-1】 下列四组函数是否恒等?

(1) $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$与 $y=x+2$;　(2) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$与 $y=\ln(1+x)-\ln(1-x)$;

(3) $y=2\ln|x|$与 $y=\ln x^2$;　(4) $y=\sqrt{x(x-3)}$与 $y=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-3}$.

解:(1) $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$与 $y=x+2$,定义域不相同,虽然对应法则相同,还是不恒等.

(2) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$的定义域为 $D=\{x|-1<x<1\}$,且 $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$;

而 $y=\ln(1+x)-\ln(1-x)$的定义域也为 $D=\{x|-1<x<1\}$,说明两个函数定义域与对应法则都一样,所以恒等.

(3) $y=\ln x^2=\ln|x|^2=2\ln|x|$,易知两者恒等.

(4) $y=\sqrt{x(x-3)}$的定义域为 $x>3$ 或 $x<0$,$y=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-3}$的定义域为 $x>3$,两者不一致,故不恒等.

【例 1-2】 设函数 $y=f(x)$的定义域是$[0,1]$,求 $y=f(x^2)$的定义域.

解:因为 $0\leqslant x^2\leqslant 1$,即$-1\leqslant x\leqslant 1$,所以 $y=f(x^2)$的定义域为$[-1,1]$.

【例 1-3】 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, |x|\leqslant 1;\\0, |x|>1,\end{cases}$求函数 $f[f(x)]$.

解:当$|x|\leqslant 1$ 时,$f(x)=1$,所以 $f[f(x)]=f(1)=1$;

当$|x|>1$ 时,$f(x)=0$,所以 $f[f(x)]=f(0)=1$,

所以 $f[f(x)]=1$.

【例 1-4】 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $f(x-1)$,$f[f(x)]$.

解:把 $g(x)=x-1$ 代入 $f(x)$中的 x,得

$$f(x-1)=\frac{x-1}{\sqrt{1+(x-1)^2}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}};$$

把 $g(x)=f(x)$代入 $f(x)$中的 x,得

$$f[f(x)]=\frac{f(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}}=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

【例 1-5】 将复合函数 $y=\ln(\sin\sqrt{1+x^2})$分解成简单函数.

解:(逆向思维法)“$x\to\varphi(x)=v\to h(v)=u\to g(u)=y$”,即

函数 $y=\ln(\sin\sqrt{1+x^2})$由 $y=\ln u$,$u=\sin v$,$v=\sqrt{t}$,$t=1+x^2$ 复合而成.

【例 1-6】 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}\right]$.

解:因为$\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$,

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

【例 1-7】 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\leqslant 1;\\2+10^{\frac{1}{1-x}}, & x>1,\end{cases}$求$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

解:利用左、右极限与极限的关系,求分段函数分段点的极限.

因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2+10^{\frac{1}{1-x}})=2$,

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)=2$,

所以 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$.

【例 1-8】 求极限$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

解：$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)}$

$$=\lim_{x\to4}\frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{4}{3}.$$

【例 1 - 9】 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-\alpha x-\beta\right)=0$，试确定 α,β.

解：因为$\dfrac{x^2+1}{x+1}-\alpha x-\beta=\dfrac{(1-\alpha)x^2-(\alpha+\beta)x+1-\beta}{x+1}$，

由题设知 $1-\alpha=0,\alpha+\beta=0$，

即有 $\alpha=1,\beta=-1$.

【例 1 - 10】 当 $x\to0$ 时，$\sqrt{1+x}-1$ 与下述函数进行比较，哪些是高阶无穷小？哪些是低阶无穷小？哪些是同阶无穷小？哪些是等价无穷小？

(1) x；　(2) $\dfrac{x}{2}$；　(3) x^2；　(4) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x}+1}$.

解：(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\dfrac{1}{2}$；

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2(1+x-1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+1}=1$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x-1}{x^2(\sqrt{1+x}+1)}=\infty$，或$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x}-1}=0$；

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{x}{\sqrt{1+x}+1}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x-1}{x}=1$.

由此可见，x^2 是比$\sqrt{1+x}-1$ 高阶的无穷小量，$\sqrt{1+x}-1$ 与 x、$\dfrac{x}{2}$及$\dfrac{x}{\sqrt{1+x}+1}$是同阶无穷小量，与其中$\dfrac{x}{2}$及$\dfrac{x}{\sqrt{1+x}+1}$还是等价无穷小量.

【例 1 - 11】 求极限$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}$.

解：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}\cdot(x+1)\right]=2$.

【例 1 - 12】 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$.

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]^{\sqrt{x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left\{\left[1+\frac{1}{(-\sqrt{x})}\right]^{(-\sqrt{x})}\right\}^{-1}$$

$$=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-1}=1.$$

【例 1-13】 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin x, & x<0;\\ k, & x=0;\\ x\sin\dfrac{1}{x}+1, & x>0,\end{cases}$ 求常数 k 的值,使函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续.

分析:分别计算 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右极限,并使 $f(0)=k=f(0^+)=f(0^-)$.

解:因为

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x\sin\frac{1}{x}+1\right)=1.$$

这里用到无穷小与有界变量的积为无穷小量的性质,所以 $\lim\limits_{x\to0^+}x\sin\dfrac{1}{x}=0$,则

$$f(0)=k=f(0^+)=f(0^-)=1.$$

【例 1-14】 设函数 $f(x)=\begin{cases}3x+4, & x\leqslant0;\\ x^2+2, & 0<x<1;\\ 3, & x=1;\\ -\dfrac{3}{x-2}, & x>1,\end{cases}$ 求:

(1) 函数 $f(x)$ 的定义域;(2) $f(x)$ 的间断点并说明其类型;(3) 函数 $f(x)$ 的连续区间.

解:(1) 因为 $x>1$ 时,$f(x)=-\dfrac{3}{x-2}$,显然 $x=2$ 时 $f(x)$ 无定义,所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

(2) 只需研究函数在分断点 $x=0$ 及 $x=1$ 以及无定义点 $x=2$ 处是否连续即可.

因为 $\lim\limits_{x\to0^-}3x+4=4$,$\lim\limits_{x\to0^+}x^2+2=2$,所以 $x=0$ 为跳跃间断点;

由于 $\lim\limits_{x\to1^-}x^2+2=3$,$\lim\limits_{x\to1^+}\left(-\dfrac{3}{x-2}\right)=3$,$f(1)=3$,所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续;

由于函数在 $x=2$ 无定义,且 $\lim\limits_{x\to2}\left(-\dfrac{3}{x-2}\right)=\infty$,所以 $x=2$ 为第二类间断点.

(3) 综上结果,函数 $f(x)$ 的连续区间为 $(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$.

【例 1-15】 证明方程 $x=a\sin x+b(a>0,b>0)$ 至少有一个不超过 $a+b$ 的正根.

证明:令 $f(x)=x-a\sin x-b$,则 $f(x)$ 在 $[0,a+b]$ 上连续,又因为 $f(0)=-b<0$,$f(a+b)=a+b-a\sin(a+b)-b=a\cdot[1-\sin(a+b)]\geqslant0$,由闭区间上连续函数的性质,得方程 $x=a\sin x+b(a>0,b>0)$ 至少有一个不超过 $a+b$ 的正根.

练习题

§1.1 练习题

一、选择题

1. 下列 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是相同函数的为 ( )

A. $f(x)=x,g(x)=(\sqrt{x})^2$ B. $f(x)=\sqrt{x^2},g(x)=|x|$

C. $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$　　D. $f(x)=\ln\sqrt{x}, g(x)=\frac{1}{2}\lg|x|$

2. 函数 $y=e^x+1$ 与函数 $y=\ln(x-1)$ 的图形　(　)

A. 关于原点对称　　B. 关于 x 轴对称

C. 关于 y 轴对称　　D. 关于直线 $y=x$ 对称

3. 函数 $f(x)=x^3\sin x$ 是　(　)

A. 奇函数　　B. 偶函数

C. 有界函数　　D. 周期函数

4. 设 $f(\sin x)=3-\cos 2x$，则 $f(\cos x)$ 的值为　(　)

A. $3-\sin 2x$　　B. $3+\sin 2x$

C. $3-\cos 2x$　　D. $3+\cos 2x$

二、填空题

1. 函数 $y=\frac{4}{3x}\ln(x+2)$ 的定义域为__________.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x, x\leqslant 0;\\ \sqrt{x}, \quad x>0,\end{cases}$ 则 $f(0)=$________.

3. 当 x 取值区间为________时，可把 $u=\lg x$ 代入 $y=\sqrt{1-u^2}$ 构成复合函数.

4. 设 $y=1+u^2, u=e^v, v=\arcsin x$，则 y 表示成 x 的函数是____________.

5. 设 $f(2x+1)=e^x$，则 $f^{-1}(e^2)=$________.

三、解答题

1. 已知 $f(x)$ 的定义域是[1,2]，求 $f\left(\frac{1}{x+1}\right)$ 的定义域.

2. 设 $f(\sin x)=\sqrt{1-4x^2}$，求函数 $f(x)$ 的定义域.

3. 已知 $f(x)=\frac{x}{1-x}$,求 $f[f(x)]$,$f\{f[f(x)]\}$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x>1;\\ x+1, & x\leqslant 1,\end{cases}$ 求 $f(0)$,$f(2)$,$f(x-1)$.

5. 指出下列函数的复合过程：

(1) $y=e^{(2x+1)^2}$

(2) $y=\arcsin\sqrt{1-2x}$

(3) $y=\cos\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$

(4) $y=\ln[\tan(x^2+1)^2]$

四、选做题

1. 设 $f(x+1)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 2x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 求 $f(x)$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $\varphi(x)=f(x)-f(x-1)$.

§1.2 练习题

一、选择题

1. 当 $n\to\infty$ 时，下列数列极限存在的是　(　　)

A. $(-1)^n\cdot n$　　B. $\dfrac{n}{n+1}$　　C. 2^n　　D. $\sin\dfrac{1}{n}$

2. 下列函数 $f(x)$ 中，当 $x\to 0$ 时极限存在的是　(　　)

A. $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & (x\leqslant 0)\\ 2^x & (x>0)\end{cases}$　　B. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

C. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2+x} & (x\leqslant 0)\\ x+\dfrac{1}{2} & (x>0)\end{cases}$　　D. $f(x)=\begin{cases}1 & (x\leqslant 0)\\ -1 & (x>0)\end{cases}$

3. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，则一定成立的是　(　　)

A. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\infty$　　B. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=0$

C. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)+g(x)}=0$　　D. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$

4. 当 $n\to\infty$ 时，下列变量为无穷小量的是　(　　)

A. $\dfrac{1}{n}$　　B. $\dfrac{(-1)^n+1}{2}$

C. 2^n　　D. $n[(-1)^n+1]$

5. 当 $x\to 2$ 时，下列变量为无穷大量的是 （ ）

A. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & (x\neq 2)\\ 0 & (x=2)\end{cases}$　　B. $f(x)=2^{\frac{1}{x-2}}$

C. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-2} & (x\neq 2)\\ 0 & (x=2)\end{cases}$　　D. $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

二、填空题

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=$________；

$\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=$________.

2. 凡无穷小量皆以________为极限；在同一过程中，若 $f(x)$ 为无穷大，则________为无穷小.

3. 已知 $f(x+1)=x^2+x+1$，则 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=$________.

4. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ ________ $f(x)=A+\alpha$（其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$）.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}3x+a, & x<1;\\ x^2-1, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 如果 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 存在，则 $a=$________.

三、解答题

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}3x+2, & x\leqslant 0;\\ x^2+1, & 0<x\leqslant 1;\\ \dfrac{2}{x}, & x>1,\end{cases}$ 讨论 $x\to 0, x\to 1, x\to 2$ 时 $f(x)$ 的极限.

3. 设 $f(x)=\dfrac{ax^3-(b-1)x^2+2}{x^2+1}$，当 $x\to\infty$时，求：(1) a,b 为何值时，$f(x)$为无穷小量；(2) a,b 为何值时，$f(x)$为无穷大量？

4. 讨论$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2}}{x}$是否存在？

四、选做题

求极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$($n$ 为正整数).

§1.3 练习题

一、判断题(下列运算是否正确，正确的打"√"，错误的打"×")

1. $\lim\limits_{x\to 3^-}(x+1)=4$　(　　)

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x}-x)=\infty-\infty=0$　(　　)

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3}{3x^4+5}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3+3)}{\lim\limits_{x\to\infty}(3x^4+5)}=\dfrac{\infty}{\infty}=1$　(　　)

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2}=0$　(　　)

二、填空题

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3}{x-3}=$________；

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=$________；

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)=$________;

4. 已知极限$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x+k}{x-2}=3$，则 $k=$________.

三、解答题

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1-3x}{1-x^2}\right)$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{2x}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+\sin x}{2x^2-\cos x}$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3x-1)^{10}(2-x)^5}{(2x+1)^{15}}$

2. 若$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$存在，且 $f(x)=x^3+\frac{2x^2+1}{x+1}+2\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，求 $f(x)$.