高等学校数学系列教材

高等数学

Ⅱ

(下册)

GAODENG SHUXUE

马 俊 熊德之
樊友芬 娄联堂
姚 钲 孙宝林
主审：黄光谷

湖北科学技术出版社

高等数学

高等学校数学系列教材

Ⅱ

（下册）

GAODENG SHUXUE

马 俊 熊德之
樊友芬 娄联堂
姚 钲 孙宝林
主审：黄光谷

湖北科学技术出版社

高等学校数学系列教材

高等数学 Ⅱ（下册）

马 俊 熊德之 樊友芬
娄联堂 姚 钲 孙宝林

策 划：李慎谦　　封面设计：秦滋宜
责任编辑：李慎谦　　责任校对：邓 冰

出版发行：湖北科学技术出版社　　电话：86782508
地 址：武汉市武昌东亭路 2 号　　邮编：430077

印 刷：华中理工大学印刷厂　　邮编：430074

850mm×1168mm　32 开　10.5 印张　1 插页　259 千字
1998 年 8 月第 1 版　　1998 年 8 月第 1 次印刷

印数：0 001—6 000　　定价：12.40 元
ISBN7—5352—2135—1/G・560　　（全套定价：26.60 元）

序　言

我们即将进入21世纪，面临信息时代。计算机迅速发展、日益普及；数学的应用向一切领域渗透，科技及各行业日益数学化、数字化。我们必须进行教育改革以适应时代的发展。数学教育贯穿于从幼儿园教育到研究生教育的全过程，改革数学教育是教育改革的关键之一，其中改革数学教材又是关键的关键。

高等学校传统的数学教材有许多优点，对培养人才起了很大的作用。但是，由于传统的高校数学教材过于注重形式、抽象，着力定义、定理、证明、计算、推导，忽略与周围世界及各实际问题和其他学科的密切联系，内容老化，培养学生能力不够，不便于自学及通过数学教学开发智力，对绝大多数的非数学专业的学生来说是远远不能适应的。这套《高等学校数学系列教材》顺应了转变教学思想、更新教学内容、改进教学方法、改革创新教材的新形势，立足于多年教学实践、探索、改革，有深厚的群众基础、素材基础、经验基础和写作基础。他们边教学、边写作，精心设计、大胆创新、团结协作、克服了种种困难，终于完成了这项系统工程。

这套教材的每门课程教材分为三个梯级：教材、教学指导书、习题解答，它们互相配合呼应，形成一个大系统和整体，构成大三级循环。中三级循环为新课、习作课与复习课，小三级为每讲的内容、思考题与习题，有利于提高教学的质与量。

这套教材注意继承传统教材的优点，采用了主动式教学法，本着循序渐进、学而时习之的教学原则，注意调动学生学习的主观能动性，实行教与自学双向教学，力求处理好传授知识与培养能力的

关系，注意培养学生归纳、分析、综合、类比、判断、选择、联想、应用、建模、创新等各种数学方法和能力；让学生在分析问题、解决问题中掌握选择方法、检验结果、寻找原因、转换观点等一系列实在的本领，提高学生的素质和数学修养。

这套教材既注意了传授必要的基础知识，又注意介绍建模、数学软件等新概念、新方法和新知识，以适应当今科技迅猛发展的形势。这套教材构思好、声势大、编排新、使用专业多、适用面广、重印发行前景好，会产生巨大的社会效益和经济效益，将会在数学教育界引起很大的反响。

编写这套教材是改革数学教育的一种尝试，由于前无借鉴和时间仓促等原因，和任何新生事物一样，这套教材中也会存在一些不足之处，这将会随着试用、修改而日臻完善。我相信这套几百万字教材的出版，定能受到广大师生和教育工作者的欢迎和好评，它们将为高等学校数学教材的百花园中又增添一朵奇葩。

华中理工大学教授　林化夷

1997 年 11 月于武汉

目　录

第七章　向量代数与空间解析几何

空间解析几何是学习多元微积分的重要基础. 向量代数能使物理学、数学等领域内的许多问题的解法简捷而直观. 向量代数与解析几何的关系十分密切,一方面需要用解析几何的坐标法来进行向量的运算;另一方面向量代数又使解析几何有关问题的解法简明. 因此,把向量代数与空间解析几何并在一章来讨论.

第一讲　向量概念　空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

1. 空间点的直角坐标

过空间一定点 O,作三条互相垂直的数轴,它们都以 O 为原点,且一般具有相同的长度单位. 这三条轴分别叫做 x 轴、y 轴、z 轴,统称坐标轴. 通常把 x 轴和 y 轴放置在水平面上,z 轴则在铅垂线上,因此,x 轴、y 轴和 z 轴又分别称作横轴、纵轴、竖轴. 它们的正方向符合右手法则,即以右手握住 z 轴,当右手的四个手指从 x 轴正向转到 y 轴正向时,大拇指的指向就是 z 轴的正向(图 7-1). 这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系. 点 O 叫做坐标原点(或原点).

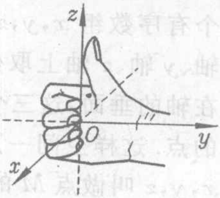


图 7-1

任意两条坐标轴可以确定一个平面,于是,可定出三个平面,

这三个平面统称为坐标面. x 轴和 y 轴所确定的平面叫做 xOy 面，类似地，另两个分别叫做 yOz 面及 zOx 面. 三个坐标面把空间分为八部分，每一部分叫做一个卦限. 在 xOy 面的上方，按照 xOy 平面上象限的顺序分别称为第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限；在 xOy 平面下方，与上面各卦限相对的依次叫做第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限(图 7-2).

现在，我们来建立空间点与有序数组之间的联系.

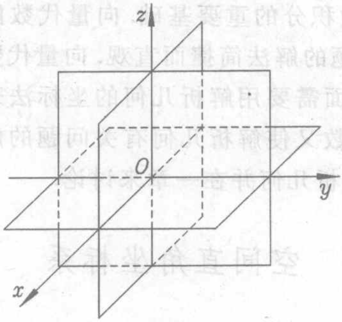


图 7-2

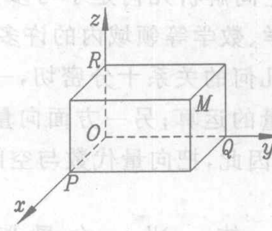


图 7-3

设 M 为空间一个已知点，过点 M 分别作 x 轴、y 轴和 z 轴的垂直平面，其垂足分别为 P,Q 和 R(图 7-3). 这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次为 x,y,z. 于是，空间一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 x,y,z. 反过来，已知一有序数组 x,y,z，可分别在 x 轴、y 轴、z 轴上取坐标为 x,y,z 的点 P,Q 和 R，过这三点作其所在轴的垂面，这三个平面的交点 M 就是数组 x,y,z 所确定的唯一的点. 这样空间一点 M 就与一有序数组 x,y,z 一一对应. 这组数 x,y,z 叫做点 M 的坐标. 坐标为 x,y,z 的点 M 通常记为 $M(x,y,z)$，原点为 $O(0,0,0)$.

2. 空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点. 现在用这两点的坐标来表达它们之间的距离 d.

过 M_1，M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面. 这六个平

面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 7-4). 据勾股定理易得

$$d^2 = |M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2 = |M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |M_1R|^2.$$

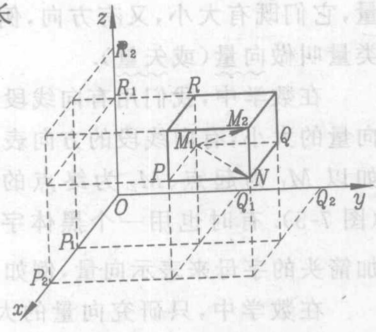


图 7-4

由于

$$|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|,$$
$$|M_1Q| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|,$$
$$|M_1R| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|,$$

$$\therefore d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

这就是两点间的距离公式.

特殊地,点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $(0,0,0)$ 的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 1 在 z 轴上求与点 $A(1,-4,2)$ 和点 $B(5,3,-7)$ 等距离的点.

解 因所求的点 M 在 z 轴上,所以可设该点为 $M(0,0,z)$. 依题意有

$$|MA| = |MB|,$$

即

$$\sqrt{(0-1)^2 + (0+4)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{(5-0)^2 + (3-0)^2 + (-7-z)^2},$$

两边平方,解得

$$z = -31/9,$$

故所求的点为 $M(0,0,-31/9)$.

二、向量的基本概念

在研究力学、物理学及其他应用科学时,经常会遇到这样一类

量，它们既有大小，又有方向，例如力、力矩、速度、加速度等，这一类量叫做向量（或矢量）.

在数学中，我们用有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 例如以 M_1 为起点、M_2 为终点的向量，记作$\overrightarrow{M_1M_2}$（图 7-5）. 有时也用一个黑体字母或用一个上面加箭头的字母来表示向量，例如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 或 $\vec{a}$，$\vec{b}$等.

图 7-5

在数学中，只研究向量的大小和方向，而不考虑它的始点位置，这种向量称为自由向量. 在这里，凡大小相等方向相同的向量，就认为是相等的. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 相等. 记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

向量的大小叫做向量的模，向量 $\boldsymbol{a}$ 的模，记为$|\boldsymbol{a}|$. 模等于 1 的向量叫做单位向量. 模为零的向量叫做零向量，记作 $\boldsymbol{0}$. 零向量的方向可看作是任意的. 在直角坐标系中，从原点 O 向点 M 引的向量$\overrightarrow{OM}$叫做点 M 对于点 O 的向径，常用黑体字 $\boldsymbol{r}$ 表示.

三、向量的线性运算

向量的加、减法与数乘向量的运算叫做向量的线性运算.

1. 向量的加法

仿照力学中关于力的合成法则，我们规定两个向量的加法运算如下：

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，以$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$为边作一平行四边形 $OACB$，其对角线向量$\overrightarrow{OC}$，记为 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$. 称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和. 记作

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

这种方法称为向量相加的平行四边形法.

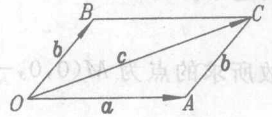


图 7-6

由于平行四边形的对边平行且相等，所以从图 7-6 可以看出，还可以这样

来作出两个向量的和：作向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，以$\overrightarrow{OA}$的终点 A 为起点作$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，连接$\overrightarrow{OC}$，就得到

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$$

这一方法叫向量加法的三角形法则.

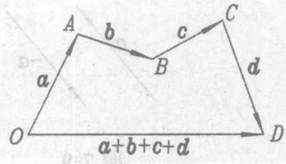


图 7-7

三角形法则可以推广到求任意有限个向量的和. 只需将前一个向量的终点作为后一个向量的始点，相继作出向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，然后从第一个向量的始点向最后一个向量的终点引一向量，此向量即为这 n 个向量的和. 如图 7-7，$\overrightarrow{OD}$就是四个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 的和，即

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\\&=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}.\end{aligned}$$

由图 7-8(a)、(b)可得知，向量的加法符合下列运算规律：

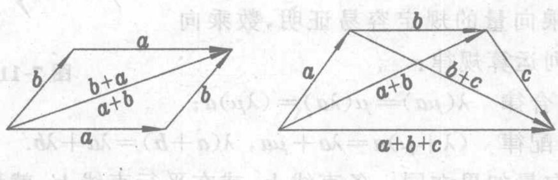


图 7-8

(1)交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2)结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

2. 向量的减法

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作$-\boldsymbol{a}$(图 7-9). 由此，我们规定两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差：

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}),$$

特别地　$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

由三角形法则可以看出：要从 $\boldsymbol{a}$ 减去 $\boldsymbol{b}$，只要把 $-\boldsymbol{b}$ 加到向量 $\boldsymbol{a}$ 上去即可(图 7-10).

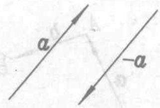


图 7-9

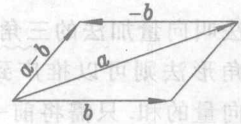


图 7-10

3. 数乘向量

设 λ 是一个数，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 规定为这样一个向量，它的模

$$|\lambda \boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|.$$

当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 一致；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反(图 7-11)；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 是零向量，即 $\lambda\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$.

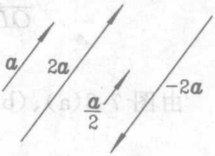


图 7-11

由数乘向量的规定容易证明，数乘向量符合下列运算规律：

(1)结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2)分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$, $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

两个向量如果在同一条直线上，或在平行直线上，就称这两个向量共线或平行.

根据数乘向量的规定，可以得到如下结论：

(1)两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，其中 λ 是常数；

(2)设 $\boldsymbol{a}^0$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量，那么

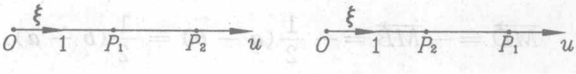
$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0.$$

这里仅证(2). 事实上，因为 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$，所以 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，又

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a},$$

记
$$a^0 = \frac{a}{|a|},$$
则 $|a^0|=1$，且 a^0 与 a 同方向，故 a^0 是 a 的单位向量，于是
$$a = |a|a^0.$$

例 2 设 P_1, P_2 为 u 轴上坐标为 u_1、u_2 的任意两点，又 ξ 为与 u 轴正向一致的单位向量(图 7-12). 验证：$\overrightarrow{P_1P_2}=(u_2-u_1)\xi$.



(a) (b)

图 7-12

证明 当 $u_2-u_1>0$ 时，$\overrightarrow{P_1P_2}$与 ξ 的方向相同(图 7-12(a)).

由于
$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = u_2 - u_1,$$
∴
$$\overrightarrow{P_1P_2} = (u_2 - u_1)\xi.$$

当 $u_2-u_1=0$ 时，
$$\overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{0},\ (u_2 - u_1)\xi = \mathbf{0},$$
∴
$$\overrightarrow{P_1P_2} = (u_2 - u_1)\xi.$$

当 $u_2-u_1<0$ 时，$\overrightarrow{P_1P_2}$与 ξ 的方向相反(图 7—12(b)).

由于 $|\overrightarrow{P_1P_2}|=u_1-u_2$，

∴
$$\overrightarrow{P_1P_2} = -(u_1 - u_2)\xi = (u_2 - u_1)\xi.$$

例 3 设 M 是平行四边形 $ABCD$ 的对角线交点(图 7-13)，且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$.

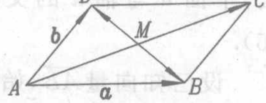


图 7-13

解 由于平行四边形的对角线互相平分，所以
$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 2\overrightarrow{MC},$$

$\overrightarrow{AM} = \vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

$\overrightarrow{DB} = \vec{b}-\vec{a}$ ∴ $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$

$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$, $\overrightarrow{MD} = -\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$

即 $$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b});$$

而 $$\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MC}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b});$$

又 $$2\overrightarrow{MB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},$$

于是 $$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b});$$

$$\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MB}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}).$$

四、向量在轴上的投影

1. 空间两向量的夹角

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，任取空间一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，规定不超过 π 的 $\angle AOB$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角（图 7-14），记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$. 如果设 $\varphi=\angle AOB$，则 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\varphi$，且 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$.

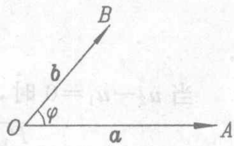


图 7-14

我们还规定一个向量与一条轴的夹角，就是这向量与同轴的正方向一致的一个向量的夹角. 类似地，可以规定空间两条轴的夹角.

2. 投影定义

设已知空间一点 A 及一轴 u，过点 A 作轴 u 的垂直平面 α，那么，平面 α 与轴 u 的交点 A' 就叫做点 A 在轴 u 上的投影（图 7-15）.

设已知向量$\overrightarrow{AB}$，始点 A 和终点 B 在轴 u 上的投影分别为点 A_1 和点 B_1（图 7-16），那么，轴 u 上的有向线段$\overrightarrow{A_1B_1}$的值 $A_1B_1=\pm|A_1B_1|$，叫做向量$\overrightarrow{AB}$在轴 u 上的投影（$\overrightarrow{A_1B_1}$与 u 同向取正号，异向取负号），记作

$$\mathrm{Prj}_u\,\overrightarrow{AB}=A_1B_1$$

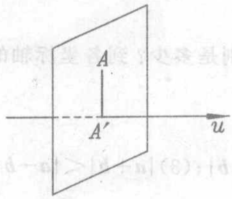


图 7-15

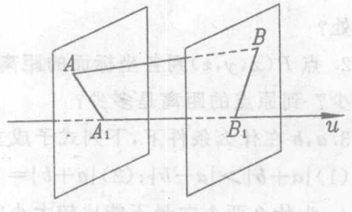


图 7-16

轴 u 叫做投影轴.

3. 投影定理

定理 1 向量$\overrightarrow{AB}$在轴 u 上的投影等于向量的模乘以轴与向量夹角 φ 的余弦：

$$\mathrm{Prj}_u\,\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

证明 如图 7-17，过向量$\overrightarrow{AB}$的起点 A 引一条与轴 u 正向一致的轴 u'，那么，轴 u 与向量$\overrightarrow{AB}$的夹角等于轴 u' 和$\overrightarrow{AB}$的夹角 φ，而且有

$$\mathrm{Prj}_u\,\overrightarrow{AB} = \mathrm{Prj}_{u'}\,\overrightarrow{AB}$$

但 $\qquad \mathrm{Prj}_{u'}\,\overrightarrow{AB} = AB''$

$$= |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi,$$

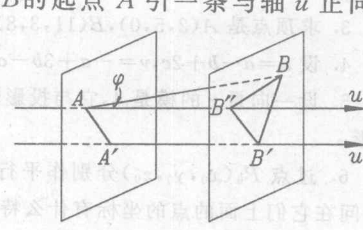


图 7-17

所以

$$\mathrm{Prj}_u\,\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

定理 2 有限个向量的和在轴上的投影，等于各个向量在该轴上投影的和，即

$$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n) = \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1 + \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_n.$$

利用向量的加法规则和投影概念，可以证明这个定理，本书从略.

思考题 7-1

1. 点(x,y,z)的三个坐标中，有一个是 0，此点在何处？有两个是 0，此点

在何处？

2. 点 $P(x,y,z)$ 到各坐标面的距离分别是多少？到各坐标轴的距离分别是多少？到原点的距离是多少？

3. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 在什么条件下，下列式子成立：

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；(3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

4. 为什么两个向量不能比较大小？

习 题 7-1

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限？

$A(1,-2,3)$；　　$B(2,3,-4)$；

$C(2,-3,-4)$；　　$D(-2,-3,1)$.

2. 求点 (a,b,c) 关于：(1)各坐标面；(2)各坐标轴；(3)坐标原点的对称点的坐标.

3. 求顶点是 $A(2,5,0)$，$B(11,3,8)$，$C(5,1,11)$ 的三角形各边的长.

4. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

5. 设一向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4，它与投影轴的夹角是 $60°$，求这向量在该轴上的投影.

6. 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面，问在它们上面的点的坐标有什么特点？

7. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上，其底面的中心在坐标原点，底面的顶点在 x 轴和 y 轴上，求立方体各顶点的坐标.

8. 在 yOz 面上，求与三个已知点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

9. 试证以 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

10. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量法证明它是平行四边形.

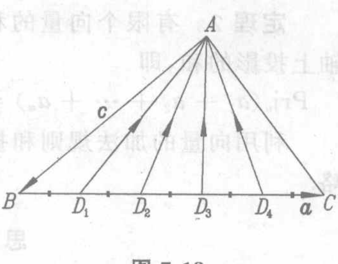


图 7-18

11. 把△ABC 的 BC 边五等分，设分