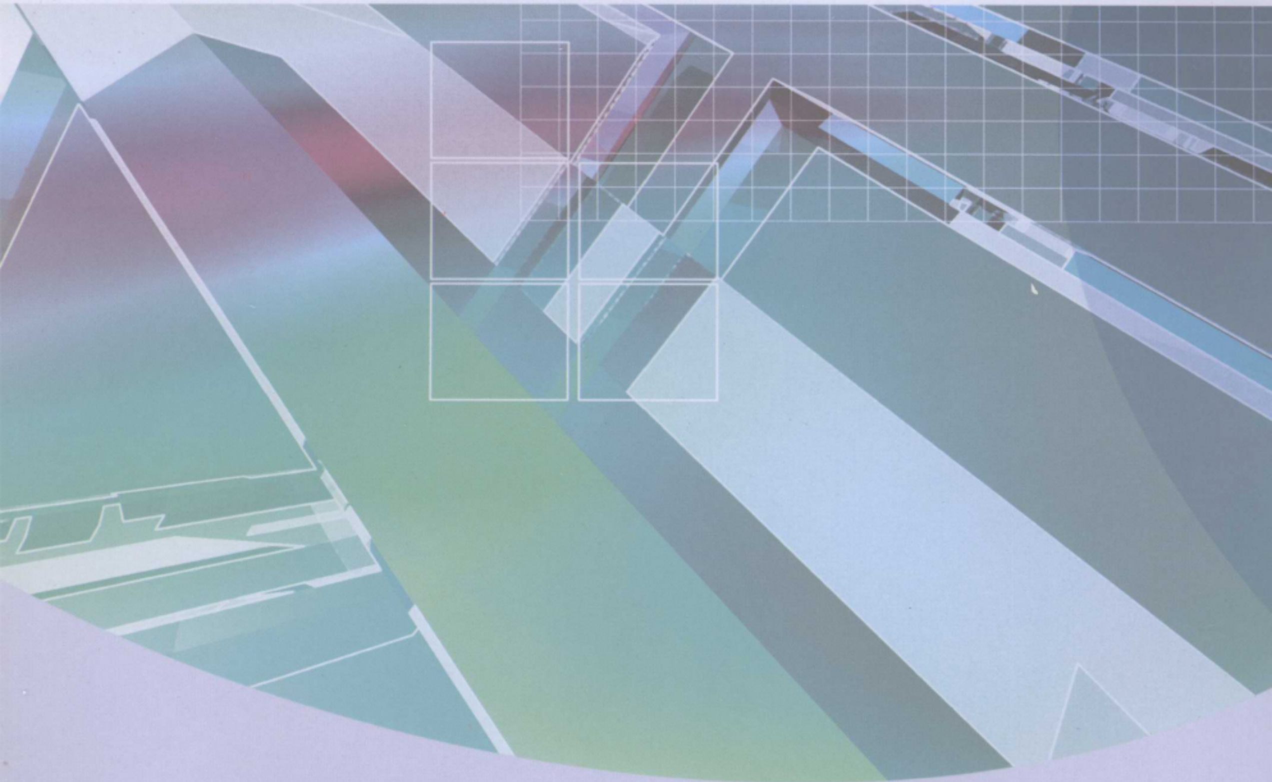
全国高职高专教育“十一五”规划教材

应用数学基础

邢春峰　李平　主编

高等教育出版社
Higher Education Press



刮开涂层将16位防伪密码发短信至106695881280
免费查询　辨别真伪　赢取大奖
获奖详情请查询中国扫黄打非网
http://www.shdf.gov.cn
防伪说明见书“郑重声明”页

明码　4104 4178 1379 0311
密码

ISBN 978-7-04-024347-5
9 787040 243475 >
定价 26.20 元

全国高职高专教育"十一五"规划教材

应用数学基础

邢春峰　李　平　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是全国高职高专教育"十一五"规划教材，内容包括：函数、极限与连续、微分学及其应用、积分学及其应用、微分方程、无穷级数、矩阵及其应用、概率论与数理统计初步、数学建模初步与应用范例。

本书的特点：一是以应用为目的，重视概念、几何意义及实际应用，有利于培养学生的数学应用意识和能力；二是内容阐述简明扼要，通俗易懂，同时注重渗透数学思想方法，便于教师讲授和学生自学；三是每章最后按学习内容的先后顺序及难易程度编排了(A)、(B)两组习题，且书后附有参考答案，便于任课教师根据学生的不同情况布置作业。四是每章最后增加了注重基本数学运算的实验，让学生借助于计算机，充分利用数学软件(如Mathematica)的数值功能和图形功能，很形象地演示一些概念和验证一些基本结论，使学生从感官上更形象地理解所学的数学知识，加深对数学基本概念的认识和理解。

本教材适用于高职高专院校三年制各类专业，也可供专升本及相关人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学基础/邢春峰，李平主编．—北京：高等教育出版社，2008．6

ISBN 978-7-04-024347-5

Ⅰ．应… Ⅱ．①邢…②李… Ⅲ．应用数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ．O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 071758 号

策划编辑 邓雁城 **责任编辑** 张耀明 **封面设计** 于文燕 **责任绘图** 尹 莉
版式设计 王艳红 **责任校对** 胡晓琪 **责任印制** 陈伟光

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
总　　机 010-58581000

经　　销 蓝色畅想图书发行有限公司
印　　刷 北京市鑫霸印务有限公司

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
畅想教育 http://www.widedu.com

开　　本 787×1092 1/16
印　　张 19.25
字　　数 430 000

版　　次 2008年6月第1版
印　　次 2008年6月第1次印刷
定　　价 26.20元

物料号　24347-00

前　　言

本教材根据教育部《高职高专教育数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，借鉴国内外同类学校的教改成果，结合高职高专院校应用数学的教学特点、现状以及当前教学改革实际编写。内容精简扼要、条理清楚、深入浅出、通俗易懂，例题、习题难易适度。

教材主要内容包括：函数、极限与连续、微分学及其应用、积分学及其应用、微分方程、无穷级数、矩阵及其应用、概率论与数理统计初步、数学建模初步与应用范例。从结构安排上采用了分模块、分层次的方式，以一元函数微积分（函数、极限与连续、微分学及其应用、积分学及其应用）为基础模块，在此基础上，面向不同专业需求，设置了无穷级数与微分方程、矩阵及其应用、概率论与数理统计初步等应用模块，教师可根据不同专业需求进行选用。

编者遵循"以应用为目的，以必需、够用为度"的教学原则，强调数学概念、原理与实际问题的联系，注意结合具体应用实例引入数学的概念和原理，以问题为引线，进行数学思想、概念、原理及其实际意义等方面的介绍，用大量实例反映数学的应用，并逐步引入数学建模思想。所选案例不但优选了微积分在几何、物理方面的应用，还挖掘了微积分在其他学科领域（如计算机、经济管理等）中的应用。对于加强数学的应用性，培养学生应用数学思想和方法认识、分析和解决实际问题的意识、兴趣、能力，进行了有益尝试。

与此同时，本教材在编写过程中，结合高等职业教育学生形象思维强的特点，在内容呈现与讲授过程中，强调直观描述和几何解释，适度淡化理论证明或推导；同时，每章最后增加了注重基本数学运算的实验，让学生借助于计算机，充分利用数学软件（如 Mathematica）的数值功能和图形功能，很形象地演示一些概念和验证一些基本结论，使学生从感官上更形象地理解所学的数学知识，加深对数学基本概念的认识和理解。在编写过程中，努力使本教材成为学生易学、教师易教的实用性较强的教材。希望通过本课程的学习，不仅使学生学到数学知识，而且更有利于他们开阔眼界，养成正确的思维方式，提高学生综合素质。

本书由邢春峰、李平担任主编。参加本书编写的还有下列老师：袁安锋，张立新，戈西元，崔菊连，李林杉。最后由邢春峰、李平统稿。

在教材整个编写过程中，得到了"应用数学与计算"国家级精品课程负责人王信峰老师的指导和帮助；同时北京联合大学教务处和基础部领导也给予了很大关怀和支持，在此一并表示衷心感谢。

限于编者水平，且对高职高专教育数学课程和教学内容的改革还需深入，本教材如有不当之处，恳请同行教师和读者不吝赐教，批评指正。

编　者

2008 年 4 月

写给高职学生的话

解决一个重大问题自然是伟大的发现，其实任何一个问题的解决都会有所发现。你解决的问题也许很平凡，但如果解决问题的过程，挑战了你的好奇心，激发了你的创造力，特别地，如果你是以自己的方式去解决问题，那么你就会经历一个紧张的过程，最终品尝到发现的喜悦。

——乔治·波利亚(GEORGE POLYA)

(转引自James Stewart著、白峰杉译《Calculus：Early Transcendentals(5^{th} ed)微积分》，高等教育出版社2004年7月第一版)

一、为什么还要学习数学？

对国内为数不少的高职学生而言，数学一度是失败和不愉快学习经历的代名词，让人无奈、无助、沮丧和逃避。为什么高职阶段还要学习数学？什么是应用数学？学习了应用数学有什么用？这种问题自然成为高职学生拿到这本教材和知道还要学习这门课程时的第一个念头。

结合多年来高职数学教学研究和实践的经验，我们认为，你可以从如下几方面来认识学习应用数学对高职学生的意义：

数学是一门重要的公民素质教育课程，能帮助你在生活中运用基本的高等数学思想、方法和技巧理解和解决实际问题。它是一种重要的文化符号，是培养你的逻辑和抽象思维能力的重要渠道，而这两种能力在你的生活和工作中至关重要；

对高职阶段的特定专业(群)而言，很多专业技术课程需要数学课程为其提供必要的数学基础概念、思想与方法。事实上，数学为学生学习后续专业课程提供了必不可少的帮助和支持；

对你未来可能从事的特定职业(群)而言，数学是一种必不可少的应用工具。你学会选用恰当的数学思想和方法，比如统计，去解决未来的工作任务中可能遇到的相关实际问题，从而提高对工作规律的深层理解和把握，有效提高工作效率。

总之，数学有其不可替代的作用，也有其对高等职业教育培养目标的特殊贡献。具体来讲，它着重培养你对与数学的应用有关的能力，如数值计算能力、数学建模能力、数据处理能力以及应用数学去研究和解决相关专业问题的能力、创造性应用数学去解决实际问题的能力等。

二、为什么要学习“应用”数学？

数学是一个古老而深奥的学科，有精细的符号和规则系统，有严谨完备的学科体系。但是，有一个危险也应当提起注意，那就是，学校的教师和学生在经意和不经意间，正逐步将这一学科仅仅教授成一些规则和步骤，从而忽略了数学本身的实际价值。有一个观念应当被重视而且推

广，即应用是数学之魂。我们可以从两方面理解应用对于数学的要义：

一是应用是数学的生命之源。数学的发展依赖于实际中所提出的问题和自身体系完善的需要，如数学中最重要的核心内容——微积分，具有将复杂问题归纳为简单规则和步骤的非凡能力，它的很多概念，就是早在300多年前，受天文学方面问题的启发，由牛顿和莱布尼茨阐发的。

二是数学的应用范围急剧扩展。1959年著名数学家华罗庚教授在《人民日报》发表文章《大哉数学之为用》，形象地描述了数学的各种应用："宇宙之大、粒子之微、火箭之速、化工之巧、地球之变、生物之谜、日用之繁等各个方面，无处不有数学的重要贡献。"特别是在计算机计算技术高速发展的今天，数学的应用范围急剧扩大，如果说二战前，数学主要用于天文、物理，那么，现在数学已经深入到工程、医学、化学、生物以及经济、管理等一切学科领域中。

但是在数学急剧发展的过程中，为了描述事物的共性规律，抽象出纯数学的概念，它逐步去掉了事物的个性特征和问题情境。数学越来越离开实际，越来越抽象，原本非常有用的数学变得"没用"，使学习者感觉枯燥无味。现在提倡学习《应用数学》就是要还原和再现数学的实际应用背景，以实例为出发点，提出问题建立数学概念，运用数学思想和数学方法加以解决，给出直观解释，帮助学习者理解基本数学概念，培养良好的数学素质，掌握数学的思想和方法，还原数学的应用特性，自觉地应用数学理论解决实际问题。通过学习应用数学，你将知道数学可以如何运用于实际，提高对数学的学习兴趣，培养定量化分析解决实际问题的思维意识。

三、几点有用的建议

对使用本教材学习的同学提出如下建议：

不要害怕数学。数学实际就在我们的生活中，自然地理解、接受和使用数学，你会发现数学很有用也很有趣。

要学会自学教材。有些同学总是习惯于听课后先做作业，碰到困难才读课本，这样学习可能会"事倍功半"。应认真研读课本，特别应了解概念和原理的确切含义，看例题时不要急于看答案，应尽量自己解题。只有这样才会获得更多启示。

要学会做学习小结。每一节或一章学完后，应能结合相关参考文献深入理解，从更深入、广泛的角度论述相关知识，"把书读厚"；此后，应学会用精炼的语言来提炼和概述内容，从较高角度理解问题，再"把书读薄"。

学习数学不要忘记借助计算机数学软件的强大功能，把繁琐的计算过程交给机器，至于你自己，好好体会数学的运用心得，多做些应用的案例，多发现数学的威力吧！

编者

2008年4月

写给同行教师的话

近年来，伴随我国高等职业教育的发展，各高校数学教师在高职高专数学课程的改革和教材开发方面，进行了一系列有益的研究与探索。如初期根据著名的高职基础理论课程“够用为度”原则，为适应压缩的课程学时，不少教材进行了教学内容的调整修改。比较典型的是在原来本科教材基础上，删去较难的部分，删去理论推导和证明，降低理论性要求等。这一调整原则在初期对促进高职数学课程改革起过重要促进作用。但现在看来，这种删减式的教材调整在体系设计上基本固守了数学的学科逻辑体系，对专业、职业和生活中应用数学的实际需求关注不够，对大众化阶段高职数学的教学对象认识不到位，更谈不上满足高职人才培养需求了。

一、教材设计思路与特色

为探索解决上述问题的有效方案，本教材在开发过程中，努力体现出如下特色和创新点：

（一）及时吸纳高职数学课程开发和教改成果

在编写过程中，立足我们多年来建设国家级和北京市级高职高专精品课程“应用数学与计算”的探索，及时吸纳国内外同类院校应用数学课程的教改成果，在《应用数学与计算（修订版）》（电子工业出版社）和《大学数学简明教程》（高等教育出版社）教材开发和使用经验基础上，借鉴国内外同类教材，结合高职应用数学教学改革实践编写而成。

（二）以培养学生数学应用意识和能力为主线，重新整合教材内容

在教材开发过程中，特别强调了“面向应用”的设计理念：

一方面，在教材内容选择上，继续发扬国家级和北京市级精品课程“应用数学与计算”融合高等数学、线性代数、积分变换、概率统计、计算方法主要内容的优势，打破原有的数学科目课程壁垒，以数学应用意识和能力培养为主线，进行数学教学内容体系的整合重构，削减繁琐的定理证明、推导和计算过程，着重介绍对学生后续专业学习、日常生活和今后工作中最有用的数学思想、方法和技巧，加强应用数学解决实际问题的内容，形成一个相互融通的高职应用数学内容体系，内容精要且实用性强，重在培养学生运用数学思想、方法和技巧理解和解决实际问题的意识和初步能力；

另一方面，在教材内容组织方式上，打破原有的“介绍概念/原理—举例说明—学生练习”的传统数学教材框架，注意将抽象的数学内容还原到真实应用情境中，强调数学概念、原理与实际问题的联系，采用“应用实例引入—问题情境分析—数学概念和原理剖析—案例拓展应用”的新教材结构，以数学应用意识和能力培养为主线，从数学应用问题切入，在实际问题应用情景中介绍数学思想、概念、原理及其实际意义，用大量实例反映数学应用，并逐步引入数学建模思想。所

选案例不但优选数学在几何、物理方面的应用，还挖掘了数学在后续专业领域及其他领域中的应用案例、国内外数学建模竞赛综合应用案例等，着力突显教学内容的应用性，培养学生运用数学思想、方法和技巧解决实际问题的意识和初步能力。

（三）重视对学习者的分析，加强学生学习策略指导，加强教材的适用性

教材针对高职学生形象思维强的特点，在内容呈现与讲授过程中，强调通过大量图示直观描述和几何解释，适度淡化理论证明或推导；注意将计算机技术引入教学，专题和穿插介绍国内外优秀数学软件及其在具体数学问题中的应用，帮助学生有效掌握数学思想和方法，减少学生对复杂计算过程的畏难情绪，提高学习数学的兴趣和信心，培养学生应用数学思想和方法认识、分析和解决实际问题的意识、兴趣、能力，努力使教材成为应用性特色明显、学生易学、教师易教的精品教材。

二、几点感悟和建议

结合多年教学实践，有几点感悟跟选用本教材授课的同行教师共享：

学生是否理解和会用数学的思想方法解决问题，比他们是否掌握数学的知识点更为重要；

问题驱动式教学需要我们教师更深刻体会数学“应用”的要义，经常关注和琢磨专业、生活和职业中的数学应用实例是有益而值得的；

能否有效激发学生自主学习的兴趣和动力，也是我们开展数学教学的重要目标；

对“读图时代”的学生来说，丰富多样的多媒体辅助教学要比“黑板＋粉笔”更受欢迎，但“拉洋片”式的 PPT 同样会有效催眠的；

应用数学不仅仅要在课堂上，组织学生开展和参加各种数学实验或竞赛活动，同样是高职数学教学的重要组成部分。

编者

2008 年 4 月

目 录

第 1 章 函数、极限与连续 …………………… 1

1.1 函数 …………………… 1

1.1.1 汽车租赁问题——认识函数 …… 2

1.1.2 函数的概念与性质 …………… 2

1.1.3 复合函数与初等函数 ………… 6

1.1.4 函数关系的建立 ……………… 11

1.2 极限 …………………… 13

1.2.1 一个数字游戏带来的问题——认识极限 …………… 13

1.2.2 极限的概念 …………………… 14

1.2.3 极限的简单运算 ……………… 18

1.2.4 两个重要的极限 ……………… 20

1.2.5 极限在电路电阻问题中的应用 …… 23

1.3 无穷小与无穷大 …………………… 24

1.3.1 电容器放电问题——认识无穷小 24

1.3.2 无穷小的性质与比较 ………… 25

1.3.3 无穷大 ………………………… 26

1.3.4 销售问题 ……………………… 27

1.4 函数的连续性 …………………… 28

1.4.1 函数连续的概念 ……………… 28

1.4.2 函数的间断点 ………………… 30

1.4.3 闭区间上连续函数的性质 …… 31

试试看:用 Mathematica 数学软件做函数图像、求极限 …………………… 32

习题 1 …………………… 34

第 2 章 微分学及其应用 …………………… 41

2.1 导数的概念 …………………… 41

2.1.1 变速直线运动的瞬时速度问题——认识导数 …………… 41

2.1.2 导数的概念 …………………… 44

2.1.3 电流强度问题、边际问题和生长速度问题 …………… 46

2.1.4 导数的几何意义与物理意义 …… 47

2.2 导数的运算法则 …………………… 48

2.2.1 函数的和、差、积、商的求导法则 …… 48

2.2.2 复合函数的求导法则 ………… 50

2.2.3 导数在实际问题中的应用 …… 51

2.2.4 高阶导数 ……………………… 52

2.3 函数的微分 …………………… 53

2.3.1 受热的金属片——认识微分 …… 53

2.3.2 微分的概念 …………………… 54

2.3.3 微分的几何意义 ……………… 56

2.3.4 热胀冷缩问题 ………………… 56

2.4 导数的应用 …………………… 57

2.4.1 一元可导函数的单调性与极值 …… 57

2.4.2 曲线的凹凸性与拐点 ………… 60

2.4.3 一元可导函数的最值及其应用 …… 61

2.4.4 洛必达法则 …………………… 64

试试看:用 Mathematica 数学软件求导数与微分 …………………… 67

习题 2 …………………… 68

第 3 章 积分学及其应用 …………………… 76

3.1 定积分的概念 …………………… 76

3.1.1 曲边梯形的面积——认识定积分 … 76

3.1.2 定积分的概念与性质 ………… 79

3.1.3 水塔中的水量问题 …………… 82

3.2 微积分基本公式 …………………… 83

3.2.1 积分上限函数 ………………… 83

3.2.2　牛顿-莱布尼茨公式 …… 84
3.2.3　原函数与不定积分 …… 85
3.2.4　滑冰场的结冰问题 …… 86
3.3　积分法 …… 87
3.3.1　不定积分的基本积分公式 …… 87
3.3.2　直接积分法 …… 88
3.3.3　凑微分法 …… 90
3.3.4　换元积分法 …… 94
3.3.5　分部积分法 …… 95
3.3.6　能源的消耗问题 …… 97
3.4　反常积分 …… 98
3.4.1　无穷区间上的反常积分 …… 98
3.4.2　终身供应润滑油问题 …… 100
3.5　定积分的应用 …… 101
3.5.1　平面图形的面积 …… 101
3.5.2　旋转体的体积 …… 103
3.5.3　投资问题 …… 105
3.5.4　人口统计模型 …… 106
试试看:用 Mathematica 数学软件计算积分 …… 108
习题 3 …… 110
第 4 章　微分方程 …… 119
4.1　微分方程的基本概念 …… 119
4.1.1　刹车制动问题——认识微分方程 …… 119
4.1.2　微分方程的基本概念 …… 121
4.2　一阶微分方程 …… 122
4.2.1　可分离变量的微分方程 …… 122
4.2.2　齐次型微分方程 …… 124
4.2.3　一阶线性微分方程 …… 126
4.3　微分方程的应用 …… 129
4.3.1　放射性元素的衰变问题 …… 129
4.3.2　减肥问题 …… 130
4.3.3　高空跳伞者为何无损 …… 131
试试看:用 Mathematica 数学软件求解微分方程 …… 132
习题 4 …… 133
第 5 章　无穷级数 …… 136
5.1　常数项级数 …… 136
5.1.1　分割问题——认识常数项级数 …… 136
5.1.2　常数项级数的概念 …… 137
5.1.3　常数项级数在药物治疗问题中的应用 …… 140
5.1.4　常数项级数的基本性质 …… 141
5.2　常数项级数收敛的判别法 …… 142
5.2.1　正项级数及其判别方法 …… 143
5.2.2　交错级数及其判别法 …… 145
5.2.3　一般数项级数及其收敛性 …… 146
5.3　幂级数 …… 148
5.3.1　幂级数及其收敛域 …… 148
5.3.2　幂级数的运算性质 …… 150
5.3.3　函数展开成幂级数 …… 152
5.3.4　无理数 e 与 π 近似计算 …… 154
试试看:用 Mathematica 数学软件求级数的和 …… 156
习题 5 …… 157
第 6 章　矩阵及其应用 …… 161
6.1　矩阵的概念及运算 …… 161
6.1.1　田忌赛马——认识矩阵 …… 162
6.1.2　矩阵的概念及其常见应用 …… 163
6.1.3　矩阵的运算 …… 166
6.1.4　人口流动问题——矩阵运算的综合应用 …… 171
6.2　矩阵的初等变换 …… 173
6.2.1　矩阵的初等行变换 …… 173
6.2.2　矩阵的秩 …… 175
6.2.3　方阵的逆 …… 176
6.3　矩阵的应用 …… 179
6.3.1　解线性方程组 …… 179
6.3.2　工资问题 …… 183
6.3.3　交通流量问题 …… 184

6.3.4 矩阵在密码编制中的应用 ………… 185
试试看:用 Mathematica 数学软件计算矩阵问题 ………… 186
习题 6 ………… 189
第 7 章 概率论与数理统计初步 …… 195
7.1 随机事件与概率 ………… 195
7.1.1 彩票的中奖率——认识概率 ……… 195
7.1.2 随机试验与随机事件 ………… 196
7.1.3 随机事件的概率 ………… 197
7.1.4 概率的运算法则 ………… 200
7.2 随机变量及其分布 ………… 204
7.2.1 随机变量的概念 ………… 204
7.2.2 离散型随机变量的概率分布 ……… 205
7.2.3 连续型随机变量及其概率密度 …… 207
7.2.4 随机变量的数字特征 ………… 211
7.3 抽样及抽样分布 ………… 215
7.3.1 盖洛普的崛起——认识统计 ……… 216
7.3.2 抽样与随机样本 ………… 216
7.3.3 常用统计量及其概率分布 ………… 217
7.4 常用统计方法 ………… 221
7.4.1 参数估计 ………… 221
7.4.2 假设检验 ………… 223
试试看:用 Mathematica 数学软件进行数据统计分析 ………… 224
习题 7 ………… 227
第 8 章 数学建模初步及应用范例 ………… 235
8.1 数学建模入门 ………… 235
8.1.1 梯子的长度问题——认识数学模型 ………… 235
8.1.2 数学模型的有关概念 ………… 237
8.1.3 数学建模的方法与步骤 ………… 237
8.2 数学建模应用范例 ………… 239
8.2.1 兔子会濒临灭绝吗 ………… 239
8.2.2 传染病问题 ………… 242
8.2.3 动物的繁殖问题 ………… 245
8.2.4 报童的抉择 ………… 246
习题 8 ………… 248
附录 1 初等数学基本公式 ………… 252
附录 2 几种分布的数值表 ………… 256
附录 3 Mathematica 系统使用入门 ………… 262
参考答案 ………… 274
参考文献 ………… 294

第 1 章

函数、极限与连续

函数是近代数学的基本概念之一.微积分是以函数为主要研究对象的一门数学课程.极限是贯穿"微积分"始终的一个重要概念,它是这门课程的基本推理工具.连续则是函数的一个重要性态,连续函数是微积分研究的主要对象.本章将介绍函数、极限与连续的基本知识,为以后的学习奠定必要的基础.

1.1 函　数

教学要求

理解函数的概念,会求函数的定义域;会求分段函数的定义域及函数值,会作出简单的分段函数的图像;熟练掌握基本初等函数的性质及其图像;会分析复合函数的复合过程;会建立简单实际问题的函数关系式.

知识点

1. 函数的概念与性质
2. 分段函数
3. 基本初等函数
4. 复合函数与初等函数

1.1.1　汽车租赁问题——认识函数

在考察某种自然现象或社会现象时，往往会遇到几个变量.这些变量并不是孤立地变化的，而是存在着某种相互依赖关系，为了说明这种关系，给出下面几个例子.

例1(汽车租赁)　某汽车租赁公司出租某种汽车的收费标准为每天的基本租金240元加每公里收费10元.租赁一辆该汽车一天，行驶 x 公里时的租车费(元)由

$$y=240+10x$$

给出.在上式中，x 的取值范围为数集 $D=\{x|x\geqslant 0\}$，对每一个 $x\in D$，按上式都有唯一确定的 y 与之对应.

例2(心电图)　心电图(EKG)可以显示病人的心率模式.它是由心电图仪直接根据病人的心率情况绘制的.如图1-1所示，它是某被测者的心电图，由图形可以看出，它的图像上每一点都代表着相应时间对应的电流活动值.从而，这里的图形又表示了变量与变量间的对应关系.

图1-1

例3(生产成本)　某工厂每天生产某种产品的件数为 x，机械设备等固定成本为1 600元，生产每件产品所花费的人工费和使用原材料费用等单位产品可变成本为6元，那么每日产量 x 与每天的生产总成本 C 之间的对应关系由下式

$$C=1600+6x$$

给出.假定该厂日产量最多为350件，那么当产量 x 在数集 $\{0,1,2,\cdots,350\}$ 上任意取定一个数值时，按上式 C 就有一个确定的数值与它对应.

上述三个例子都给出了变量与变量间的对应关系，它们有一个共同特征：其中一个变量的任何取值(按照某种对应方式)，都有另一变量的一个相应值与它对应，这种对应关系就是函数.

1.1.2 函数的概念与性质

1. 函数的概念

定义1　设 x,y 是两个变量，若对非空数集 D 中每一个值 x，按照一定的对应法则 f，总有确定的数值 y 和它对应，则称变量 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$.称 x 为**自变量**，y 为**因变量**，数集 D 为**定义域**，f 是**函数符号**，它表示 y 与 x 的对应法则.函数符号也可由其他字母来表示，如 g,F,G 等.

当自变量取定 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的数值称为函数在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.当 x 取遍 D 中的每一个值时，对应的函数值组成的集合称为**函数的值域**，记作 R.

由函数的定义可知，定义域和对应法则是函数定义的两个要素，如果两个函数具有相同的定义域和对应法则，那么它们就是同一个函数.

例 4 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$； (2) $y=\sqrt{1-x}+\log_2(x+1)$.

解 (1) 要使 $y=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$ 有意义，则分母

$$x^2-5x+6\neq 0,$$

解得 $x\neq 2$ 且 $x\neq 3$，所以函数的定义域为 $(-\infty,2)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$.

(2) 要使 $y=\sqrt{1-x}+\log_2(x+1)$ 有意义，则有

$$\begin{cases}1-x\geqslant 0,\\ x+1>0,\end{cases}$$

解得 $-1<x\leqslant 1$，所以函数的定义域为 $(-1,1]$.

例 5 已知函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$，求 $f(0),f(1),f(-x),f(x^2+1)$.

解 $f(0)=\dfrac{0-1}{0+1}=-1$； $f(1)=\dfrac{1-1}{1+1}=0$；

$f(-x)=\dfrac{-x-1}{-x+1}=\dfrac{x+1}{x-1}$； $f(x^2+1)=\dfrac{x^2+1-1}{x^2+1+1}=\dfrac{x^2}{x^2+2}$.

例 6 下列各对函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$； (2) $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}, g(x)=\sin x$.

解 (1) 不相同. 因为 $f(x)$ 的定义域为 $D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域为 $D_g=(0,+\infty)$，显然两个函数的定义域不同，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同.

(2) 不相同. 虽然两个函数的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，但其对应法则不同，$f(x)$ 的值域为 $R_f=[0,1]$，而 $g(x)$ 的值域为 $R_g=[-1,1]$.

2. 函数的性质

(1) 单调性

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义，对于区间 I 内的任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是**单调增加的**；对于区间 I 内的任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是**单调减少的**.

例如，函数 $y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内是单调增加的，在区间 $(-\infty,0]$ 内是单调减少的.

(2) 奇偶性

定义 3 设函数 $y=f(x)$ 在关于原点对称的区间 I 内有定义，若对于任意的 $x\in I$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**偶函数**；若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的图形关于原点对称.

例如，函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是偶函数；函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是奇函数.

(3) 周期性

定义 4 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义，如果存在一个不为零的实数 T，对于任意的 $x\in I$，有 $(x+T)\in I$，且恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 是**周期函数**. 实数 T 称为**周期**. 通常我们所说的周期函数的周期指的是函数的最小正周期.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；$y=\tan x$，$y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

(4) 有界性

定义 5 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义，如果存在一个正数 M，对于任意的 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 上**有界**. 否则**无界**.

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界. 因为对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $|\sin x|\leqslant 1$，因此 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界函数；函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内有界，但在 $(0,2)$ 内是无界的.

3. 反函数、分段函数

(1) 反函数

在研究两个变量之间的依赖关系时，根据具体问题的实际情况，需要选定其中一个为自变量，那么另一个就是因变量(或函数).

例如，在商品销售中，已知某商品的价格(即单价)为 p. 如果要想用该商品的销售量 x 来计算该商品的销售总收入 y，那么 x 是自变量，y 是因变量，其函数关系为

$$y=px.$$

反过来，如果想以这种商品的销售总收入来计算其销售量，就必须把 y 作为自变量，x 作为因变量，并由函数 $y=px$ 解出 x 关于 y 的函数关系

$$x=\frac{y}{p}.$$

这时称 $x=\dfrac{y}{p}$ 为 $y=px$ 的反函数，$y=px$ 为直接函数.

定义 6 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 R_f，如果对任意一个 $y\in R_f$，D_f 内只有一个数 x 与 y 对应，使得 $y=f(x)$，这时把 y 看作自变量，x 看作因变量，就得到一个新的函数，称为直接函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$.

习惯上，把函数 $y=f(x)$ 的反函数写作 $y=f^{-1}(x)$. 反函数的定义域记为 $D_{f^{-1}}$，值域记为 $R_{f^{-1}}$. 显然 $D_{f^{-1}}=R_f$，$R_{f^{-1}}=D_f$.

注意 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

例 7 求函数 $y=2x-1$ 的反函数.

解 由直接函数 $y=2x-1$ 解出 $x=\dfrac{y+1}{2}$，得到所求反函数 $y=\dfrac{x+1}{2}$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) 分段函数

例 8　我国于 1993 年 10 月 31 日发布的《中华人民共和国个人所得税法》规定(下表中仅仅保留了原表中前四级的税率)：

级数	全月应纳税所得额	税率(%)
1	不超过 500 元的	5
2	超过 500 元至 2 000 元的部分	10
3	超过 2 000 元至 5 000 元的部分	15
4	超过 5 000 元至 20 000 元的部分	20

其中应纳税所得额为月工资减去 1 600 元. 容易想像，每一种工资额都应有唯一一个个人所得税交纳额，也就是说，按表中对应规则，工资与个人所得税间具有函数关系. 试在月工资不超过 20 000 元的范围内，给出月收入与所得税金额之间的函数关系. 又若某人的工资为 2 530 元，试计算其所应交纳的个人所得税额.

解　设某人月收入为 x 元，应交纳所得税 y 元，则由题意得

当 $0\leqslant x\leqslant 1\,600$ 时，$y=0$；

当 $1\,600<x\leqslant 2\,100$ 时，$y=(x-1\,600)\times 5\%$；

当 $2\,100<x\leqslant 3\,600$ 时，$y=(x-2\,100)\times 10\%+25$；

当 $3\,600<x\leqslant 6\,600$ 时，$y=(x-3\,600)\times 15\%+25+150$；

当 $6\,600<x\leqslant 20\,000$ 时，$y=(x-6\,600)\times 20\%+25+150+450$.

所求函数表达式为

$$y=\begin{cases} 0, & 0\leqslant x\leqslant 1\,600, \\ 0.05(x-1\,600), & 1\,600<x\leqslant 2\,100, \\ 0.1(x-2\,100)+25, & 2\,100<x\leqslant 3\,600, \\ 0.15(x-3\,600)+175, & 3\,600<x\leqslant 6\,600, \\ 0.2(x-6\,600)+625, & 6\,600<x\leqslant 20\,000. \end{cases}$$

某人工资为 2 530 元，即当 $x=2\,530$ 时，相应 y 值应使用表达式：$y=0.1(x-2\,100)+25$ 求值，从而

$$f(2\,530)=0.1(2\,530-2\,100)+25=68,$$

即这人每月应交纳个人所得税 68 元.

在上例中我们见到的函数关系，其函数定义不是用一个表达式完成的，而是把整个定义域分成若干个区间段，与一个区间段内的 x 对应的函数值 y 用一个表达式给出，这种函数我们称之为**分段函数**. 分段函数的图形在每一个分段上与相应表达式函数的图形相同.

例 9　已知分段函数 $f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 1+x, & x>1. \end{cases}$