广东省成人高等教育系列教材

主　编　李绍明　郭子君
副主编　蒋明星

经济数学

(1)

中山大学出版社

广东省成人高等教育系列教材

经济数学（1）

主　编　李绍明　郭子君
副主编　蒋明星

中山大学出版社
·广州·

图书在版编目（CIP）数据

经济数学·1/李绍明，郭子君主编；蒋明星副主编．—广州：中山大学出版社，2008.1
（广东省成人高等教育系列教材）
ISBN 978－306－03016－0

Ⅰ．经…　Ⅱ．①李…　②郭…　③蒋…　Ⅲ．经济数学—成人教育：高等教育—教材
Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 192350 号

出 版 人：叶侨健
责任编辑：李海东
封面设计：红　枫
责任校对：何　凡
责任技编：黄少伟
出版发行：中山大学出版社
电　　话：编辑部 020－84111996，84113349
　　　　　发行部 020－84111998，84111981，84111160
地　　址：广州市新港西路 135 号
邮　　编：510275　　传　真：020－84036565
网　　址：http：//www.zsup.com.cn　E-mail：zdcbs@mail.sysu.edu.cn
印 刷 者：中山大学印刷厂
经 销 者：广东学苑文化发展有限公司
　　　　　电话：（020）37217189，37217733
规　　格：787mm×1092mm　1/16　12.5 印张　312 千字
版次印次：2008 年 1 月第 1 版　2008 年 1 月第 1 次印刷
印　　数：1－13000 册　　定　价：18.00 元

广东省成人高等教育系列教材简介

随着广东省成人高等教育事业的蓬勃发展，成人高等教育教材存在着可选版本较少、内容陈旧等问题．借用普通高校教材又存在理论性较强、难度较大、脱离成人教育实际基础等问题．

为解决这一矛盾，在广东省成人教育协会支持下，在总结广东省各普通高校成人教育教学及实践经验的基础上，由广东省普通高校成人高等教育专业委员会组织有关高校专家编写了本系列教材．教材根据成人高等教育学生的实际入学基础编写，力求突出成人业余、实用的特点，以求达到理论与实践相结合，内容和形式更加符合成人学习的目的．

本系列教材是集体智慧的结晶，由广东省26所大学一线教师承担主要编写及审稿工作．

教材编写实行主编负责制，由中山大学出版社于2007年1月起陆续出版，修订版供2008年春季各院校选用，广东学苑文化发展有限公司支持前期资金投入及代理发行工作．

本系列教材编审委员会成员如下：

编 写 人 员

总主编： 王全迪（华南理工大学）

主　编： 李绍明（东莞理工学院）
　　　　郭子君（华南农业大学）

副主编： 蒋明星（华南农业大学）

编　者：（以姓氏笔画为序）
　　　　王全迪　卢建平　李绍明　杨立洪
　　　　郭子君　郭　艾　唐民英　蒋明星

前　言

在科学技术日新月异的今天，随着我国经济改革的不断深入和发展，经济数学方法的研究和应用日益受到广大经济理论教学的教师、研究人员和实际工作者的重视．这些对经济管理类专业大学数学课程的教学提出了更高的要求．同时，以教学内容、教学方法和课程体系为核心的教学改革正在蓬勃开展，高等学校数学教育教学体系的改革也得到了社会各界的广泛重视．根据广东省成人高校《经济数学》课程教学大纲，我们组织部分具有丰富教学经验的教师反复研讨，精心编写了这套《经济数学》教材．

本教材主要供成人高等学校经济管理类各专业的大学数学课程使用，也可作为自学考试、函授大学和职业技术学院的相关专业的大学数学课程教材，并可供经济工作者参考．

本教材分为两个分册．《经济数学（1）》共七章，内容包括一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微积分初步．《经济数学（2）》共七章，内容包括线性代数、概率论与数理统计两部分．线性代数部分涵盖了行列式、矩阵和线性方程组的基本内容，概率论与数理统计部分涵盖了随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征与极限定理的基本内容以及数理统计的基本理论．根据经济管理类各专业对数学理论与方法的实际需求和成人教育的特点，本教材突出基本概念、基本方法以及实际应用的内容，注重理论与实践相结合；对重点、难点作详细的叙述和分析，每章都讨论经济模型方面的应用例题．教材的每一节都配有练习，通过这些练习，学生可掌握该节的基本内容，有利于学生自学；每章后有综合习题，旨在加强学生的“三基”训练，并提高综合分析问题的能力．

为了便于学生学习，我们还编写了与教材配套的《经济数学辅导》．它包括各章的基本要求、重点和难点，并根据编者多年的教学经验，编入了各章的主要解题方法和典型例题，并对教材中的习题编写了习题解答．

本教材是应成人教育教学的需要而组织编写的，在编写过程中得到华南理工大学继续教育学院、华南农业大学继续教育学院、深圳大学和东莞理工学院、广州大学、广东商学院的大力支持，在此一并表示由衷感谢．

由于编者水平有限，加之时间仓促，教材中一定还存在缺点和问题．敬请专家和读者不吝指正．

编　者

2007 年 12 月 10 日

目　　录

第1章　函　　数

在自然科学、工程技术以及经济生活中，函数是被广泛应用的数学概念之一，其重要意义远远超出了数学范围．在经济数学中函数处于基础的核心地位．函数不仅是构成中学数学的主体，也是经济数学的研究对象．在运用数学模型研究实际问题时，函数扮演着重要角色．本章将复习函数的有关知识，讨论函数的性质，分析初等函数的结构．

1.1　函数概念

1.1.1　常量与变量

在研究自然现象或技术过程中，会遇到各种各样的量，依据这些量在变化过程中的取值情况，可以将它们分为两类：一类是在变化过程中，只取一个定值的量，我们称它为**常量**；另一类是在变化过程中，可以取不同数值的量，我们称它为**变量**．

例如，客机在两站之间的飞行过程中，飞机距地面的高度、距两站之间的距离以及汽油的存储量等都是变量，乘客的人数、行李包裹的重量等都是常量．又如，在圆的半径增加过程中，圆的周长、圆的面积都是变量，而圆的周长与直径之比却是常数（即圆周率 π）．常量也可以看做一种特殊的变量，即在某个变化过程中，只取一个数值．

经济数学建立在实数的基础上，本书所说的数都是实数，除特别声明外，超出了实数范围认为是没有意义的．我们经常用字母

$$x,\ y,\ z,\ t,\ \cdots \quad 与 \quad a,\ b,\ c,\ d,\ \cdots$$

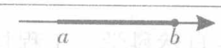
分别表示变量与常量．

关于集合的初步知识读者在中学数学已经学习，本书不再重述．

实数的全体组成的集合称为**实数集**，表为 R. 为了叙述简便，本书所说的“数集”都是指实数集 R 的子集．

区间是实数集 R 的特殊子集．现将各种区间的定义、名称、符号及其图像列表如下（其中 a 与 b 为两个数，并且 $a<b$）（表 1.1）．

表 1.1　各区间的定义、名称、符号及其图像

定　义	名　称	符　号	图　像
$\{x \mid a<x<b\}$	开区间	$(a,\ b)$	
$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$	闭区间	$[a,\ b]$	
$\{x \mid a<x\leqslant b\}$	半开区间	$(a,\ b]$	
$\{x \mid a\leqslant x<b\}$	半开区间	$[a,\ b)$	
$\{x \mid a<x\}$	无限区间	$(a,\ +\infty)$	
$\{x \mid a\leqslant x\}$	无限区间	$[a,\ +\infty)$	
$\{x \mid x<b\}$	无限区间	$(-\infty,\ b)$	
$\{x \mid x\leqslant b\}$	无限区间	$(-\infty,\ b]$	

我们常说“区间”是什么样的区间，由表示区间的符号确定．例如，区间$[a,b]$表示闭区间，区间$(-\infty,\ b)$表示无限区间．另外，还有几种特殊情况：

区间$(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}=\mathrm{R}$，即实数集．

开区间$(a-\delta,a+\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$，其中$\delta$是某个正数，称$a$为$\delta$的**邻域**，记为$U(a,\delta)$或$U(a)$.

我们已知，数的图像是数轴上的点；反之，数轴上的点的坐标又是数．因为实数集R与数轴上的所有点是一一对应的，所以数与点不加区别．我们常将“数a”说成“点a”，反之亦然．

1.1.2　函数概念

在一个自然现象或技术过程中，常常有几个量同时变化，它们的变化并非彼此无关，而是相互联系着．这是物质世界的一个普遍规律．下面列举3个例子来说明两个变量之间的相互联系．

例1　真空中自由落体，物体下落的时间t与下落的距离s相互联系着．如果物体距地面的高度为h，对任意时间

$$t\in\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$$

都对应一个距离．已知t与s之间的对应关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中g为重力加速度，是常数．

例2　球的半径r与该球的体积V相互联系．对任意半径$r\in(0,+\infty)$都对应一个球的体积．已知r与V之间的对应关系是

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

例 3 任意 $x\in[-1,1]$ 都对应一个数 $y=\sqrt{1-x^2}$，即 x 与 y 之间的对应关系是

$$y=\sqrt{1-x^2}.$$

上述例子从数学角度看，都有两个集合和一个对应关系，对其中一个数集的任意数，按照对应关系都对应实数集 R 中的唯一一个数．于是，有如下的函数概念．

定义 1.1 有非空数集 A 与实数集 R，如果对数集 A 中的任意数 x，按照对应关系 f 都对应实数集 R 中的唯一一个数 y，称对应关系 f 是定义在数集 A 上的函数，表为

$$f:A\to \mathrm{R}.$$

数 x 对应的数 y 称为 x 的**函数值**，表为 $y=f(x)$．x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 A 称为函数 f 的**定义域**．函数值的集合称为函数 f 的**值域**，表为 $f(A)$，即

$$f(A)=\{y\mid y=f(x),x\in A\}\subset \mathrm{R}.$$

根据函数的定义，不难看到，上述例子皆是函数的实例．例如，圆面积 S 和半径 r 之间的关系 $S=\pi r^2$ 给出了一个定义域为 $(0,+\infty)$ 的函数 $S=f(r)$．

对于函数的概念，我们一定要注意到：

（1）符号 $y=f(x)$ 只表示 y 是 x 的函数，并不是 y 等于 f 和 x 的乘积．如果同时考察几个函数时，为区别起见，可以分别表示为 $f(x),g(x),\varphi(x),\cdots$．

（2）函数有两个要素：函数的对应关系和定义域．我们说给出了一个函数，就是同时给出了它的对应关系和定义域．我们说两个函数相等，就是指两个函数的定义域和对应关系完全相同．给出一个函数，关键在于给出对应关系和定义域，至于用什么字母表示自变量和函数是不重要的，如 $y=\tan x$ 和 $S=\tan t$ 都称为正切函数．

（3）有时，某些函数的自变量和因变量都是指某个确定的具体量，如前面提到的圆面积公式 $S=\pi r^2$ 所表示的函数．这时它的定义域应根据其实际意义，即圆半径 r 只能是正数这一点来决定．一般情况下，如果不考虑函数的具体意义，这时，它的定义域可以从对应关系本身来决定．如式子 $y=\sqrt{1-x^2}$ 给出的函数，其定义域是能计算 $\sqrt{1-x^2}$ 的一切 x 值，即闭区间 $[-1,1]$．在这种情况下，给出了对应关系也就给出了定义域，从而给出了整个函数．

（4）$f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$ 表示函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的对应值，称为函数在点 x_0 处的值．在定义域内，所有函数值的全体，就是函数的值域．

1.1.3 函数的表示法

我们通常采用分析法（或称公式法）、图示法及表格法三种方法表示函数．

（1）分析法．两个变量之间的函数关系通过公式或分析式子给出：要对自变量施行哪些数学运算（如加、减、乘、除、乘方、开方、取对数、求正弦、求余弦等），以及按怎样的次序来进行这些运算，才能得出函数的对应值．我们说这些函数是用分析法表示的．例如，

$$y = ax^2 + bx + c,$$

$$y = \frac{1}{1 - x^2},$$

$$y = \sqrt{1 + \sin 2x}$$

等都是用分析法表示的函数．

由于用分析法表示的函数形式比较简单、完整，便于从数学上对函数作定量的分析和运算，是我们今后主要采用的方法．但在实际问题中，有些函数有时很难、甚至不可能用公式来表示．

（2）图示法．如果把自变量 x 和因变量 y 分别当做直角坐标平面上点的横坐标和纵坐标，则函数的图形一般来说是坐标平面上的曲线（图 1.1）．用坐标平面的曲线表示函数的方法称为**图示法**．

图示法的优点在于直观、明显，能从图形上直接看到变量之间的依赖关系和变化趋势．缺点是不容易描得精确，有时不便于作理论研究．

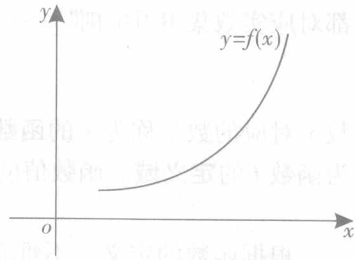


图 1.1

（3）表格法．如常见的对数表、三角函数表等都是把自变量中的一系列值与其对应的函数值列成表，这种表示函数的方法称为**表格法**．

表格法的优点在于能从表中直接查出某些函数值，避免了很多繁琐运算，使用方便．缺点是表中所列的值常常不够完全，有些值也可能不够精确．

为此，在实际应用中，必须从实际出发，选取适当的表示法，或互相配合、综合使用上述三种方法．

1.1.4　分段函数

在科学技术及经济领域中，还经常遇到那些在不同范围内用不同式子分段表示的函数，称为**分段函数**．

例 4　某工厂生产某产品每日最多生产 200 吨，固定成本为 150 元．生产量在 0~100 吨范围内，每多生产 1 吨，成本增加 5 元；产量在 100 吨以上，每多生产 1 吨，成本只增加 3 元．那么成本 C(元)是日产量的函数：

$$C = f(x) = \begin{cases} 150 + 5x & (0 \leqslant x \leqslant 100) \\ 650 + 3(x - 100) & (100 < x \leqslant 200) \end{cases}$$

这个函数就是一个分段函数．对于分段函数，求某点的函数值，首先应判定该点所在的范围，然后选取函数在这范围内的表达式去计算．如日产量 50 吨的成本应由第一式去计算，得

$$C\big|_{x=50} = 150 + 5 \times 50 = 400(\text{元}).$$

而日产量为 110 吨的成本，应由第二式计算，得

$$C\big|_{x=110} = 650 + 3 \times (110 - 100) = 680(\text{元}).$$

函数的定义域为$[0,100]\cup(100,200]=[0,200]$.

例 5 已知$f(x)=\begin{cases}x & (x\geqslant 0)\\ x^2 & (x<0)\end{cases}$，求$f(x+2)$.

解 $f(x+2)=\begin{cases}x+2 & (x+2\geqslant 0)\\ (x+2)^2 & (x+2<0)\end{cases}$，

即
$$f(x+2)=\begin{cases}x+2 & (x\geqslant -2)\\ x^2+4x+4 & (x<-2)\end{cases}.$$

1.1.5 函数的基本性态

1. 有界性

定义 1.2 函数$f(x)$在数集A上有定义，如果存在$M>0$，对任意$x\in A$，使得不等式
$$|f(x)|\leqslant M$$
恒成立，称函数$f(x)$在数集A上**有界**. 否则，就称函数$f(x)$在数集A上**无界**.

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$两个函数在其定义域$(-\infty,+\infty)$内，都有
$$|\sin x|\leqslant 1,\quad |\cos x|\leqslant 1,$$
所以$y=\sin x$和$y=\cos x$在其定义域$(-\infty,+\infty)$内都是有界的.

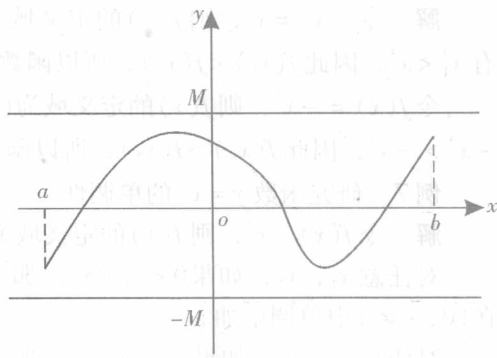


图 1.2

函数$y=\tan x$，$y=\cot x$则是无界的.

同样地，$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$在其定义域$(0,+\infty)$内也是无界的.

函数$f(x)$在$[a,b]$上有界的几何意义是：函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的图像位于以二直线$y=-M$，$y=M$为边界的带形区域之内（图 1.2）.

2. 单调性

定义 1.3 函数$f(x)$在数集A上有定义，对A上任意两点x_1和x_2，当$x_1<x_2$时，如果有
$$f(x_1)<f(x_2)\ (\text{或}f(x_1)>f(x_2)),$$
则称函数$f(x)$在数集A上**单调增加**（或**单调减少**）.

函数$f(x)$在数集A上单调减少、单调增加统称为函数$f(x)$在数集A上**单调**. 如果A是区间，此区间称为函数$f(x)$的**单调区间**.

单调增加函数的图形是沿x轴的正向上升的曲线，单调减少函数的图形是沿x轴的正

向下降的曲线（图 1.3）.

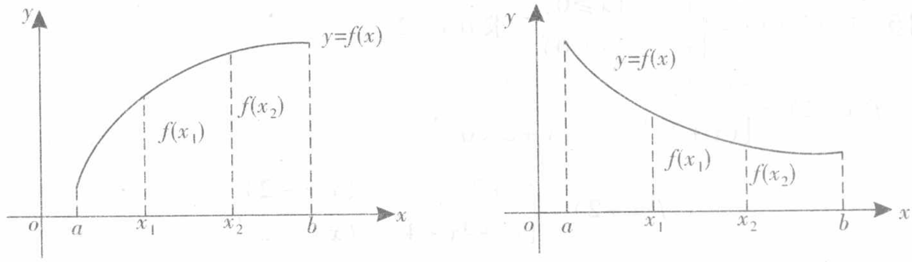


图 1.3

例 6 研究函数 $y=x^3$ 及 $y=-x^3$ 的单调性.

解 令 $f(x)=x^3$，则 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 任取 x_1,x_2，如果 $x_1<x_2$，那么有 $x_1^3<x_2^3$，因此 $f(x_1)<f(x_2)$，所以函数 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加.

令 $f(x)=-x^3$，则 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 任取 x_1，x_2，如果 $x_1<x_2$，那么有 $-x_1^3>-x_2^3$，因此 $f(x_1)>f(x_2)$，所以函数 $f(x)=-x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少.

例 7 研究函数 $y=x^2$ 的单调性.

解 令 $f(x)=x^2$，则 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

对任意 x_1，x_2，如果 $0<x_1<x_2$，那么有 $x_1^2<x_2^2$，因此 $f(x_1)<f(x_2)$，所以函数 $y=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

对任意 x_1，x_2，如果 $x_1<x_2\leqslant 0$，那么有 $x_1^2>x_2^2$，因此 $f(x_1)>f(x_2)$，所以函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 内单调减少.

3. 奇偶性

定义 1.4 函数 $f(x)$ 在数集 A 上有定义，如果对任意一点 $x\in A$，有 $-x\in A$，且

$$f(-x)=-f(x)\ (\text{或}\ f(-x)=f(x)),$$

成立，则称 $f(x)$ 在数集 A 上为**奇函数**（或**偶函数**）.

如果点 (x_0,y_0) 在奇函数 $y=f(x)$ 的图像上，即 $y_0=f(x_0)$，则

$$f(-x_0)=-f(x_0)=-y_0,$$

即 $(-x_0,-y_0)$ 也在奇函数 $y=f(x)$ 的图像上，于是，奇函数的图像（图 1.4）关于原点对称.

同理可知，偶函数的图像（图 1.5）关于 y 轴对称.