经济应用数学基础

概率论与数理统计

JINGJI YINGYONG SHUXUE JICHU

主　编：夏建业
副主编：冯镜祥

JINGJI YINGYONG SHUXUE JICHU
JINGJI YINGYONG SHUXUE JICHU

兰州大学出版社

经济应用数学基础

概率论与数理统计

主　编：夏建业
副主编：冯镜祥

兰州大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/夏建业主编．—兰州：兰州大学出版社，2003.12

ISBN 7－311－02314－9

Ⅰ．概…　Ⅱ．夏…　Ⅲ．①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ．021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 121426 号

概率论与数理统计

主　编　夏建业

副主编　冯镜祥

兰州大学出版社出版发行

兰州市天水南路 222 号　电话：8912613　邮编：730000

E-mail：press@onbook．com．cn

http：//www．onbook．com．cn

兰州大学出版社激光照排中心排版

兰州奥林印刷有限责任公司印刷

开本：　850×1168　1/32　　印张：11.625

2003 年 12 月第 1 版　　2006 年 1 月第 2 次印刷

字数：290 千字

ISBN7－311－02314－9　　定价：25.00 元

前　言

《经济数学基础》是高等学校财经与管理类专业的核心基础课，《概率论与数理统计》是其中一个主要组成部分。本书是依据 1989 年原国家教委审定的“高等学校财经类专业核心课程《概率论与数理统计》教学大纲”为基础编写而成的。本书可作为财经与管理类各专业本科生的教材，也可作为财经与管理类各专业专科生的教材（前 5 章），还可作为同类院校师生的教学参考书。

《概率论与数理统计》是研究随机现象统计规律性的一门数学学科，它是近代数学的重要分支，它的应用遍及经济与管理各个部门，以及科学技术、工农业生产等领域，因此，它是培养高级财经与管理人才必需的核心课程之一。

针对财经与管理专业的特点，本书在概率论部分叙述中，我们力求讲清重要概念，淡化理论证明，特别对较难的定理省略了它们的证明；在数理统计部分，强调统计思想，省略数学推导；在例题与习题方面，我们尽可能结合财经与管理专业而编写。为了调动学生学习的积极性与主动性，帮助他们更好地理解有关概念与方法，本书每章还编写了填空题与选择题。

本书由夏建业任主编，冯镜祥任副主编。参加本书编写工作

的有夏建业、冯镜祥、何泳贤，其中第 1、第 3、第 5 章由冯镜祥编写，第 2、第 8、第 9 章由何泳贤编写，第 4、第 6、第 7 章由夏建业编写。

由于经验不足，水平有限，书中难免有不足之处，诚恳读者批评指正。

编 者

2003 年 9 月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

§1.1　随机事件

在自然界里，在生产实践和科学实验中，人们观察到的现象大致可以归结为两类。一类是必然现象，另一类是随机现象。例如，太阳总是从东方升起；水总是往低处流等等，这类现象就是必然现象。它们的特点是结果在一定的条件下总是肯定的。再例如，抛掷一枚均匀的硬币，结果可能是正面朝上，也有可能是反面朝上，虽然，我们知道抛掷的结果有两个，但是，在每次抛掷前却无法肯定抛掷的结果是什么；进行一场足球比赛，结果可能是胜，也可能是平，还可能是负，这三个结果在比赛前是无法预料的，这类现象就是随机现象。它们的特点是可能结果不止一个，在每次观察之前无法预知确切的结果，即呈现出不确定性。

一、随机试验

在概率论中，我们对随机现象进行的实验或观察称为随机试验，简称试验，用字母 E 表示。下面是一些随机试验的例子。

试验 E_1：掷一颗质量均匀的骰子，观察骰子落下后出现的点数。

试验 E_2：抛一枚硬币，观察正面、反面出现的情况。

试验 E_3：在 1,2,…,9 九个数字中任意选取一个，考察数字的情况。

试验 E_4：观察一天中通过某路口的车辆数量。

试验 E_5：在一批电子元件中任意抽取一只，测试它的寿命。

分析这些随机试验的例子，可以概括出随机试验都有如下三个特性：

(1) 试验可以在相同的条件下进行多次；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并能在试验前明确所有的可能结果；

(3) 每次试验前不能确定哪个结果会出现。

二、随机事件和样本空间

在一随机试验中，我们把试验中所出现的最简单的可能结果称为基本事件（或样本点），记为 ω。例如，在随机试验 E_1 中，"1 点"、"2 点"、…、"6 点" 都是基本事件；在试验 E_2 中，"正面" 和 "反面" 也是基本事件；又如，在试验 E_3 中，有九种最简单的结果，它们分别是："1"、"2" … "9"，这些就是该试验的基本事件。

然而，我们在试验中还会观察到多种不同的结果。如试验 E_3 中，"取得一个是奇数"、"该数能被 3 整除" 和 "取得一个小于 5 的数" 等等，这些结果是由一个或者多个基本事件组成的，一般将它们称为随机事件，简称为事件，用 A，B，C 等字母表示。例如，以 A 表示事件 "取得一个是奇数"，它是由 "1"、"3"、"5"、"7"、"9" 五个基本事件组成的，即

$$A=\text{“取得一个是奇数”}=\{1,3,5,7,9\}$$

以 B 表示事件“该数能被 3 整除”，它是由“3”、“6”、“9”三个基本事件组成的，即

$$B=\text{“该数能被 3 整除”}=\{3,6,9\}$$

显然，随机事件是以基本事件为元素的集合，一个随机事件 A 的发生，是指 A 中有一个基本事件，而且仅有一个基本事件发生。反过来说，如果 A 中有一个基本事件发生了，那么事件 A 就发生了。

一个事件是否为基本事件是相对于试验的目的而言的。例如，中日围棋对抗赛，两队各派五名棋手出场，如果只看胜负，那么试验有两个基本事件；但如果要看比分，则有“5 比 0”、“4 比 1”、“3 比 2”、“2 比 3”、“1 比 4”、“0 比 5”六个基本事件了。

在试验中必然会发生的事件叫做必然事件；不可能发生的事件叫做不可能事件。例如，在试验 E_3 中，“取得一个是正数”是必然事件；“取得一个是分数”是不可能事件。由于对一个试验来说，必有一个且仅有一个基本事件发生，所以说必然事件是由试验的所有基本事件组成的集合，我们称它为该随机试验的样本空间，记为 Ω。而不可能事件则是不包含任何基本事件的集合，即是空集，记为 ϕ。必然事件和不可能事件本来没有不确定性，也就是说它们不是随机事件，但为了今后讨论方便起见，我们把它们当作一种特殊的随机事件。如果将上述试验 E_i 的样本空间分别记为$\Omega_i(i=1,2,\cdots,5)$，则它们分别是

$$\Omega_1=\{1,2,3,4,5,6\}$$

$$\Omega_2=\{\text{正面},\text{反面}\}$$

$$\Omega_3=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$\Omega_4=\{0,1,2,3,\cdots\}$$

$$\Omega_5=\{x\mid x\ \text{表示电子元件的寿命}\}$$

显然，每一个随机试验都对应一个样本空间。

三、事件之间的关系与事件的运算

在一个随机试验中，如果说样本空间是以基本事件为元素的全集，那么随机事件就是这个全集上的一个子集。也就是说随机事件与集合是可以等同起来的，这样，集合的关系与运算也适用于随机事件。下面介绍事件之间的关系与事件的运算。

设随机试验 E 的样本空间为 Ω，A、B 是 E 中的事件。

1. 事件的包含

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $B \supset A$，或 $A \subset B$。

这种关系的含义如同图 1－1 中集合的包含关系一样。

2. 事件的相等

若事件 B 包含着事件 A，事件 A 也包含事件 B，即 $B \supset A$，$A \supset B$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A = B$。

$A = B$ 意味着 A 与 B 包含的基本事件完全一样，也就是 A 与 B 会同时发生或同时不发生。例如，在一批产品中任取三件，则事件“至少取到两个废品”与事件“最多取到一个合格品”就是相同的事件。

3. 事件的和

若事件 A 与事件 B 至少有一个发生，则称这一事件为事件 A 与事件 B 的和，记为 $A + B$。

事件 A 与事件 B 的和等同于集合 A 与集合 B 的并集，如图 1－2。

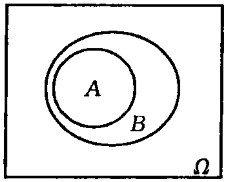

图 1-1

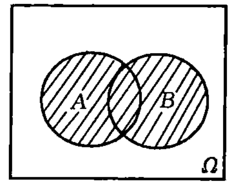

图 1-2

4. 事件的积

若事件 A 与事件 B 同时发生，则称这一事件为事件 A 与事件 B 的积，记为 AB。

事件 A 与事件 B 的积等同于集合 A 与集合 B 的交集，如图 1-3。

5. 事件的互斥

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\phi$，则称事件 A 与事件 B 互斥（或互不相容）。

A、B 互斥意味着 A 与 B 包含的基本事件完全不同，如图 1-4。显然，样本空间上的任意两个基本事件都是互斥的。

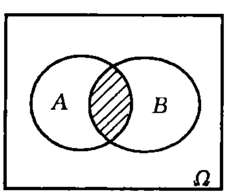

图 1-3

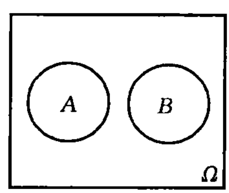

图 1-4

6. 事件的差

若事件 A 发生而事件 B 不发生，则称这一事件为事件 A 与事件 B 的差，记为 $A-B$。事件的差如图 1－5 所示。

7. 对立事件

若事件 A 与事件 B 中必然有一个发生，且仅有一个发生，即事件 A 与事件 B 满足条件

$$A+B=\Omega,\ AB=\phi$$

则称事件 B 为事件 A 的对立事件，记为 $B=\overline{A}$。这时，事件 A 也是事件 B 的对立事件，即 $\overline{B}=A$，因此可称它们相互对立。事件的对立关系如图 1－6 所示。

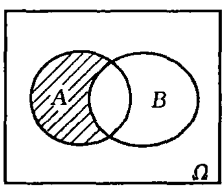

图 1－5

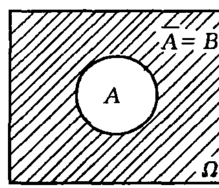

图 1－6

8. 完备事件组

设 A_1，A_2，…，A_n 为 E 的一组事件，若满足

(1) $A_iA_k=\phi\quad(i\neq k,\quad i,k=1,2,\cdots,n)$

(2) $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$

则称 A_1，A_2，…，A_n 构成一个完备事件组。完备事件组的关系如图 1－7 所示，它其实是样本空间的一个分划。

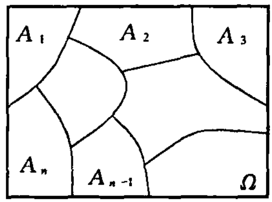

图 1－7

例如，从一个班中随机选出三名学生，已知该班至少有三名女生，设 A_i 表示“选到 i 名女生”的事件($i=0,1,2,3$)，易知 A_0，A_1，A_2，A_3 构成一个完备事件组。

由于事件间的关系及其运算与集合间的关系及运算是完全一致的，因此它们有着相同的运算法则，事件的运算遵循以下法则。

(1) 结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$，$(AB)C=A(BC)$；

(2) 交换律：$A+B=B+A$，$AB=BA$；

(3) 分配律：$A(B+C)=AB+AC$，

$A+BC=(A+B)(A+C)$；

(4) 德摩根律：$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$，$\overline{A}+\overline{B}=\overline{AB}$。

这些法则都可以推广到多个事件间的运算，例如：

$$\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n}=\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n \tag{1.1}$$

$$\overline{A_1A_2\cdots A_n}=\overline{A}_1+\overline{A}_2+\cdots+\overline{A}_n \tag{1.2}$$

这两个事件运算法则的解释分别是，多个事件至少发生一个的对立事件是每个事件都不发生；多个事件都发生的对立事件是多个事件至少一个不发生。

例 1　从一批产品中每次取出一个（不放回）进行检验，以

A_i 表示第 i 次取到合格品的事件($i=1,2,3$)。试用事件的运算符号表示下列事件:

(1) 三次都取到合格品;

(2) 三次中至少有一次取到合格品;

(3) 三次中恰有两次取到合格品;

(4) 三次中至少有两次取到合格品。

解 (1) 三次都取到合格品,即事件A_i($i=1,2,3$)都发生,于是该事件表示为 $A_1A_2A_3$;

(2) 三次中至少有一次取到合格品,即事件A_i($i=1,2,3$)中至少发生一个,于是该事件表示为 $A_1+A_2+A_3$;

(3) 三次中恰有两次取到合格品,即是A_i($i=1,2,3$)中恰好发生两次,因此该事件可表示为 $A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$;

(4) 三次中至少有两次取到合格品,即是 A_i ($i=1, 2, 3$)中至少发生两次,因此该事件可表示为 $A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3$。

例 2 一名射手连续向目标射击三次,事件 A_i 表示该射手第 i 次射击时击中目标($i=1,2,3$)。试用文字叙述下列事件:

(1) $\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3$;

(2) $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$;

(3) $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$;

(4) $\overline{A}_1\overline{A}_2+\overline{A}_1\overline{A}_3+\overline{A}_2\overline{A}_3$。

解 因为事件 A_i 表示第 i 次击中目标($i=1,2,3$),所以 $\overline{A}_i$ 表示第 i 次没有击中目标($i=1,2,3$)。则

(1) $\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3$ 表示三次射击中至少有一次没有击中目标;

(2) $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ 表示三次射击中三次都没有击中目标;

(3) $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$ 表示三次射击中恰好有一次击中目标;