大学数学学习辅导书

概率论与数理统计学习指导

张玉春　刘玉凤　姚俊　编著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

大学数学学习辅导书

概率论与数理统计学习指导

张玉春　刘玉凤　姚 俊　编著

国防工业出版社

·北京·

内容简介

本书是浙江大学盛骤等主编的概率论与数理统计教材的辅助用书。全书共分9章,内容包括概率论的基本概念;随机变量及其分布;多维随机变量及其分布;随机变量的数字特征;大数定律及中心极限定理;样本及抽样分布;参数估计;假设检验;方差分析及回归分析。各章按学习要求、内容提要、典型例题、练习题及答案进行组织。

本书可作为工科类、经管类本科学生学习概率论与数理统计课程的辅导用书和考研复习用书,同时也适合作为普通在校研究生及其他人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导/张玉春,刘玉凤,姚俊编著. —北京:国防工业出版社,2008.7

(大学数学学习辅导书)

ISBN 978-7-118-05716-4

Ⅰ.概...　Ⅱ.①张...②刘...③姚...　Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第064962号

※

国防工業出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号　邮政编码100044)

天利华印刷装订有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092　1/16　**印张** 11½　**字数** 263千字

2008年7月第1版第1次印刷　**印数** 1—4000册　**定价** 20.00元

国防书店:(010)68428422　　发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535　　发行业务:(010)68472764

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的数学学科，是高等学校工科类、经管类等专业重要的基础理论课。随着现代科学技术的发展，很多专业对随机数学的要求越来越高。为了帮助本科学生学好这门课程，我们根据高等工科院校概率论与数理统计教学大纲要求，编写了这本学习辅导教材。

本书《概率论与数理统计学习指导》的内容与现行教材同步，共分为9章，内容包括概率论的基本概念；随机变量及其分布；多维随机变量及其分布；随机变量的数字特征；大数定律及中心极限定理；样本及抽样分布；参数估计；假设检验；方差分析及回归分析。每章按学习要求、内容提要、典型例题、练习题及答案四部分编写。

内容提要对各章重点内容进行了概括，对基本概念、基本理论和基本公式归纳整理，条理化、口诀化；使读者感到易学、易记、易掌握。

典型例题对各章典型题型进行了分类，选择了具有代表性、启发性、针对性和综合性的范例。对解法的获得过程给予了直观、简便的分析，帮助读者掌握解题思路、获得解题方法、提高解题能力。

练习题注重选择概率论与数理统计各种标准题型，以填空题、选择题、解答题和证明题的形式给出，使读者进一步提高解决随机问题的综合能力。

本书的第1章至第3章由张玉春编写，第4章和第5章由姚俊编写，第6章至第9章由刘玉凤编写，张玉春负责统稿。

本书的编写和出版，得到了国防工业出版社及沈阳理工大学的大力支持和帮助，在此表示诚挚的感谢！编写本书时，引用了有关书籍的一些例子，在这里也向有关作者致谢！

书中不足之处，诚恳地希望广大读者批评指正。

编　者

2008年6月

目　录

第 1 章　概率论的基本概念

学习要求

1. 了解样本空间的概念，理解随机事件的概念，熟悉事件之间的关系与运算。

2. 正确理解概率的公理化定义，熟记概率的基本性质。

3. 理解条件概率的含义，并会利用乘法公式、全概率公式和贝叶斯(Bayes)公式进行概率计算。

4. 理解事件的互斥(互不相容)、对立和相互独立三者之间的关系，能够应用事件独立性进行概率计算。

重点

事件的表示与事件的独立性；概率的性质与概率的计算；加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式的应用。

难点

复杂事件的表示与分解；条件概率概念的理解与应用；独立性的理解、判定与应用；全概率公式、贝叶斯公式的应用。

1.1　内 容 提 要

1.1.1　概率论中最基本、最重要的三个概念

1. 随机事件

在一次试验中可能发生也可能不发生，而在大量的重复试验中具有统计规律性的试验结果，称为**随机事件**(简称事件)。用集合解释为，随机试验 E 的样本空间 S 的子集为 $\boldsymbol{E}$ 的随机事件，记为 $A,B,C,\cdots$，或 $A_i(i=1,2,\cdots)$。

在一次试验中，事件 A 发生当且仅当集合 $\boldsymbol{A}$ 中的一个样本点出现。

2. 概率

概率的公理化定义　设 E 是随机试验，S 是它的样本空间，对于 E 的每一事件 A，赋予一个实数 $P(A)$，满足：

(1) 非负性　$P(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性　$P(S)=1$；

(3) 可列可加性　若 $A_1,A_2,\cdots$是两两互不相容的事件，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率。

概率的基本性质

(1) $P(\varnothing)=0;P(A)\leqslant 1;$

(2) 有限可加性:若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件,则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i) = \sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

(3) 减法公式:$P(A-B)=P(A)-P(AB)$;

特别,逆事件概率 $P(\bar{A})=1-P(A)$,当 $A\subset B$ 时,有

$$P(A-B) = P(A) - P(B)$$

(4) 单调性:若 $A\subset B$,则有

$$P(A) \leqslant P(B)$$

(5) 加法公式: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(CA) + P(ABC)$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i) = \sum_{i=1}^{n}P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j) + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

条件概率定义 设 A,B 是两个事件,且 $P(A)>0$,称

$$P(B\mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率。

条件概率也是概率,它满足概率公理化定义的三条公理,因此概率的基本性质条件概率也都具有。如加法公式为

$$P(B_1 \cup B_2 \mid A) = P(B_1 \mid A) + P(B_2 \mid A) - P(B_1B_2 \mid A)$$

3. 事件的独立性

事件独立性定义 设 A,B 是两个事件,若有

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称事件 A,B 相互独立,简称 A,B 独立。

设 A,B,C 是三个事件,若有

$$P(AB) = P(A)P(B)$$
$$P(BC) = P(B)P(C)$$
$$P(CA) = P(C)P(A)$$
$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

则称事件 A,B,C 相互独立。

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n(n\geqslant 2)$ 个事件,若有

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j),1\leqslant i<j\leqslant n$$
$$P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k),1\leqslant i<j<k\leqslant n$$
$$\cdots$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立。

独立的性质

(1) 若 $P(A)>0$,且 A,B 相互独立,则 $P(B|A)=P(B)$,反之亦然。

(2) 若 A、B 相互独立,则 A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 B,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立。

1.1.2 事件之间的关系与运算

1. 事件之间的五种关系

关 系	符 号	概 率 论	集 合 论
包含关系	$A\subset B$	若 A 发生,则 B 发生	A 是 B 的子集
相等关系	$A=B$	事件 A 与 B 相等	A 与 B 相等
互斥关系	$AB=\varnothing$	事件 A 与 B 不能同时发生(或互不相容)	A 与 B 无公共元素
对立关系	$\overline{A}$	事件 A 的对立事件(或逆事件)	A 的补集
独立关系		$P(AB)=P(A)P(B)$	

2. 事件之间的三大运算

运 算	符 号	概 率 论	集 合 论
和事件	$A\cup B$ $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$	事件 A 与 B 至少有一个发生 事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生	A 与 B 的并集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并集
积事件	AB $A_1A_2\cdots A_n$	事件 A 与 B 同时发生 事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生	A 与 B 的交集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交集
差事件	$A-B$	事件 A 发生,但 B 不发生	A 与 B 的差集

3. 事件的运算律

(1) 交换律:$A\cup B=B\cup A,AB=BA$。

(2) 结合律:$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,A(BC)=(AB)C$。

(3) 分配律:$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC),(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$。

(4) 德·摩根律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B},\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

4. 常用的关系和运算

(1) $\varnothing\subset A\subset S,A\subset A\cup B,AB\subset A,A-B\subset A$。

(2) 若 $A\subset B$,则 $A\cup B=B,AB=A,A-B=\varnothing,\overline{A}\supset\overline{B}$。

(3) $A-B=A\overline{B}=A-AB=A\cup B-B$。

它们都以不同的形式叙述了同一事实:A 发生,但 B 不发生。

(4) $A\cup B=A\cup\overline{A}B,A\cup B\cup C=A\cup\overline{A}B\cup\overline{A}\,\overline{B}C$。

把 $A\cup B$ 分解成互不相容的事件之和,可以为概率计算带来方便。

1.1.3 计算概率的公式和概型

1. 计算概率的五大公式

(1) **加法公式:**

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(CA)+P(ABC)$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

(2) **减法公式**：

$$P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=P(A\cup B)-P(B)$$

(3) **乘法公式**：若 $P(A)>0$，则

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)$$

若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

(4) **全概率公式**：若 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是样本空间 S 的一个划分，且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$$

(5) **贝叶斯(Bayes)公式**：在全概率公式的条件下，如果 $P(A)>0$，则

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B_j)},i=1,2,\cdots,n$$

2．概率的四大概型

(1) **古典概型**

随机试验满足：样本空间 S 只包含有限个样本点；试验中每个样本点发生的可能性相同，这种随机试验称为古典概型。在古典概型中事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 包含的样本点数}}{S\text{ 中样本点总数}}$$

(2) **伯努利概型**

在 n 重伯努利试验中，事件 A 的概率 $P(A)=p\ (0<p<1)$，则事件 A 发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^kp^kq^{n-k},q=1-p,k=0,1,\cdots,n$$

(3) **超几何概型**

一盒中有 N 个球，其中有 M 个红球，现从中抽取 n 个球，则在这 n 个球中有 m 个红球的概率为

$$H(n,M,N)=\frac{C_M^mC_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},m=0,1,\cdots,\min(n,M)$$

(4) **几何概型**

随机试验满足：样本空间 S 为一个度量的几何区域（如线段、平面区域、空间区域）；设几何区域内每一点发生的可能性是相同的，这种随机试验称为几何概型。在几何概型

中事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}=\frac{A\text{ 的几何度量}}{S\text{ 的几何度量}}$$

1.2 典 型 例 题

1.2.1 抽象事件的关系与概率

计算抽象事件概率的思路是利用事件间的关系与运算，根据概率的三个公理及基本性质列方程，解出所要求的概率(量)。如加法公式

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

中出现了四个概率(量)，知道其中的三个，就可以求出另外一个；若又已知事件 A,B 独立，那么知道其中的二个，就可以求出另外一个。

例 1.1 已知 $P(\bar{A}\cup\bar{B})=0.8, P(\bar{A}\cup B)=0.75, P(B)=0.3$，求 $P(AB), P(A), P(\overline{AB}), P(A-B), P(B-A), P(A\cup\bar{B})$。

解： 由 $P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{AB})$ （德·摩根律）

$=1-P(AB)$（逆事件概率公式）

得

$$P(AB)=1-P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-0.8=0.2$$

由

$$\begin{aligned}P(\bar{A}\cup B)&=P(\overline{A\bar{B}})\quad\text{（德·摩根律）}\\&=1-P(A\bar{B})\quad\text{（逆事件概率公式）}\\&=1-P(A-B)=1-P(A)+P(AB)\quad\text{（减法公式）}\end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned}P(A)&=1+P(AB)-P(\bar{A}\cup B)=1+0.2-0.75=0.45\\P(\bar{A}\,\bar{B})&=P(\overline{A\cup B})\quad\text{（德·摩根律）}\\&=1-P(A\cup B)\quad\text{（逆事件概率公式）}\\&=1-P(A)-P(B)+P(AB)\quad\text{（加法公式）}\\&=1-0.45-0.3+0.2=0.45\\P(A-B)&=P(A)-P(AB)=0.45-0.2=0.25\\P(B-A)&=P(B)-P(AB)=0.3-0.2=0.1\\P(A\cup\bar{B})&=P(\overline{\bar{A}B})=1-P(\bar{A}B)=1-P(B-A)=1-0.1=0.9\end{aligned}$$

例 1.2 已知 $P(A_n)=\frac{n}{3^n}(n=1,2,\cdots)$，且 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件，求 $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)$。

解：

$$\begin{aligned}P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)&=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)\quad\text{（可列可加性）}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} \qquad \left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}\right)$$

$$= \frac{3}{4}$$

例 1.3 已知 $P(B)=0.6, P(A-B)=0.2$,求 $P(\bar{A}\,\bar{B})$。

解: $P(A-B)=P(A\cup B)-P(B)$ (减法公式)

所以

$$P(A \cup B) = P(A-B) + P(B) = 0.2 + 0.6 = 0.8$$

因此 $$P(\bar{A}\,\bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) \quad \text{(德·摩根律)}$$

$$= 1 - P(A \cup B) \quad \text{(逆事件概率公式)}$$

$$= 1 - 0.8 = 0.2$$

注: 关键是求出 $P(A\cup B)$,利用了事件的关系:$A-B=A\cup B-B$。

例 1.4 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{16}$,A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等,求 $P(A)$。

解: 由题设可知

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(\bar{A}\,\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = \frac{1}{16}$$

$$P(A-B) = P(B-A)$$

因此

$$P(A) = P(A-B) + P(AB) = P(B-A) + P(AB) = P(B)$$

所以

$$P(\bar{A}) = P(\bar{B})$$

故有

$$P^2(\bar{A}) = \frac{1}{16} \quad 即\ P(\bar{A}) = \frac{1}{4}$$

于是

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{3}{4}$$

注: 准确理解事件运算、事件相互独立的概念与性质是至关重要的。

例 1.5 已知 $P(A)=\frac{2}{3}, P(B|A)=\frac{2}{5}, P(B|\bar{A})=\frac{1}{4}$,求 $P(A|B)$。

解: $$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15} \quad \text{(乘法公式)}$$

同理

$$P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B \mid \bar{A}) = \left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{4} = \frac{1}{12} \quad \text{(乘法公式)}$$

因此

$$P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)=\frac{4}{15}+\frac{1}{12}=\frac{7}{20} \quad (\text{有限可加性})$$

故有

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{4}{15}\Big/\frac{7}{20}=\frac{16}{21} \quad (\text{条件概率定义})$$

例 1.6 已知 $P(\bar{B}|A)=0.5, P(B|\bar{A})=0.6, P(AB)=0.2$，求 $P(A), P(B)$。

解:

$$\text{由 } P(\bar{B}|A)=\frac{P(A\bar{B})}{P(A)} \quad (\text{条件概率定义})$$

$$=\frac{P(A)-P(AB)}{P(A)} \quad (\text{减法公式})$$

得

$$0.5=\frac{P(A)-0.2}{P(A)}$$

解得

$$P(A)=0.4$$

又由

$$P(B \mid \bar{A})=\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} \quad (\text{条件概率定义})$$

$$=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)} \quad (\text{减法公式,逆事件概率公式})$$

得

$$0.6=\frac{P(B)-0.2}{1-0.4}$$

解得

$$P(B)=0.56$$

1.2.2 概念辨析

独立与互斥是完全不同的概念。两个事件相互独立,实质上是一个事件是否发生对另一个事件发生的概率没有影响。当事件 A 与 B 相互独立时,事件 AB 完全可能同时发生。

例 1.7 设 $P(A)>0, P(B)>0$。证明:

(1) 若 A 与 B 互不相容,则 A 与 B 不独立;

(2) 若 A 与 B 相互独立,则 A 与 B 不互斥。

证明: (1) 若 A 与 B 互不相容,则

$$P(AB)=0$$

由

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=0$$

有

$$P(B \mid A) \neq P(B)$$

即 A 与 B 不独立。

(2) 若 A 与 B 相互独立,则 $P(AB)=P(A)P(B)>0$,即 A 与 B 不互斥。

注: 在一般情况下独立与互斥是相互矛盾的,两者同时存在的特例是 A 或 B 为不可能事件,即若 $AB\neq\varnothing$,则 A 与 B 有可能独立。

例 1.8 设事件 A,B,C 两两独立,则 A,B,C 相互独立的充要条件是(　　)。

(A) A 与 BC 独立　　(B) AB 与 $A\cup C$ 独立

(C) AB 与 AC 独立　　(D) $A\cup B$ 与 $A\cup C$ 独立

分析: A,B,C 两两独立$\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B),P(AC)=P(A)P(C);P(BC)=P(B)P(C)$。而 A,B,C 相互独立$\Leftrightarrow A,B,C$ 两两独立且 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$。在题设条件下 A,B,C 相互独立的条件即为 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$,而 A 与 BC 独立的含义为 $P(A(BC))=P(A)P(BC)$。由于 B 与 C 独立,即 $P(BC)=P(B)P(C)$,故可得 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$。故选 A。

注: 本题是“两两独立”与“相互独立”的辨析。

例 1.9 设 A、B、C 为相互独立的随机事件,且 $0<P(C)<1$,则事件(　　)不独立。

(A) $\overline{A\cup B}$与 C　　(B) AC 与 $\overline{C}$

(C) $\overline{A}B$ 与 C　　(D) $\overline{AB}$与 $\overline{C}$

分析: 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,将它们任意分成 $k(k\leqslant n)$ 组,各组没有相同的事件,每组内部进行任意的运算(和、积、差)后得到的新的 k 个事件也是相互独立的。本题中 AC 与 $\overline{C}$ 有共同的事件 C,而其余的选项中没有共同的事件。故选 B。

1.2.3 复杂事件概率计算

将一个复杂事件分解为若干个简单事件,然后再利用加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式计算复杂事件的概率,这往往是计算概率的一种重要手段与方法。

例 1.10 三个人独立地去破译一份密码,他们能译出的概率分别为 $\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$。问此密码能被译出的概率是多少?

分析: 只要有一人译出,密码就能被译出,因此利用和事件的运算并考虑到独立性可求出这个复杂事件的概率。

解: 设 A_i=“第 i 人能译出密码”($i=1,2,3$),B=“密码能被译出”。由题意可知

$$P(A_1)=\frac{1}{5},P(A_2)=\frac{1}{3},P(A_3)=\frac{1}{4}$$

A_1,A_2,A_3 相互独立(直观意义),且 $B=A_1\cup A_2\cup A_3$(关键所在)。

所以

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)\quad \text{(逆事件概率公式,德·摩根律)}\\&=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)\quad \text{(独立性)}\end{aligned}$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{5}$$

例 1.11 设第一只盒子中装有 15 个球,其中 4 只白球,5 只红球,6 只黑球;第二只盒子中装有 10 个球,其中 4 只白球,2 只红球,4 只黑球。独立地分别在两只盒子中各取一个球,发现至少有一个黑球,求有一个黑球一个白球的概率。

分析:题意所述是在至少有一个黑球条件下的概率问题,因此应为条件概率,使用条件概率定义求这个复杂事件概率。

解: 设 A =“至少有一个黑球”,B =“一个黑球一个白球”。则

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{9}{15} \times \frac{6}{10} = \frac{16}{25}$$

$$P(B) = \frac{4}{15} \times \frac{4}{10} + \frac{6}{15} \times \frac{4}{10} = \frac{4}{15}$$

因此

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{5}{12}$$

例 1.12 某人打电话,忘记了对方电话号码的最后一个数码,因而对最后一个数码就随机地拨,假设拨完某地区规定电话位数算完成一次拨号,且假设对方电话不占线,求:

(1) 到第 k 次才拨通对方电话的概率;

(2) 不超过 k 次拨通对方电话的概率。

分析: 这是积事件概率、互不相容事件和的概率问题,利用乘法公式和概率的有限可加性。求这个复杂事件概率。

解: (1) 设 A_k =“第 k 次拨通电话”,$k = 1, 2, \cdots, 10$。则

$$P(A_1) = \frac{1}{10}$$

$$P(\bar{A}_1 A_2) = P(\bar{A}_1)P(A_2 \mid \bar{A}_1) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{10}, \cdots$$

$$P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1}A_k) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 \mid \bar{A}_1)\cdots P(A_k \mid \bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1})$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{10 - k + 1} = \frac{1}{10}$$

(2) 设 B_k =“不超过 k 次拨通电话”,则

$$B_k = A_1 \cup \bar{A}_1 A_2 \cup \cdots \cup \bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1}A_k$$

$$P(B_k) = P(A_1) + P(\bar{A}_1A_2) + \cdots + P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1}A_k)$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10} = \frac{k}{10}$$

注: 与该地区几位号码无关。

例 1.13 为防止意外事故,在矿井内同时安装两种警报系统 A 与 B,每种系统单独使用时,其有效概率 A 为 0.92,B 为 0.93;在 A 失灵的条件下,B 有效的概率为 0.85。求:

(1) 发生事故时,这两种警报系统至少有一个有效的概率;

(2) 在 B 失灵的条件下，A 有效的概率。

分析： 关键是条件概率的使用。

解： 记 A =“系统 A 有效”，B =“系统 B 有效”，则

$$P(A)=0.92, P(B)=0.93, P(B\mid\bar{A})=0.85$$

(1) $P(A\cup B)=1-P(\bar{A}\,\bar{B})=1-P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A})$

$=1-[1-P(A)][1-P(B|\bar{A})]$

$=1-(1-0.92)(1-0.85)=0.988$

(2) 方法一：

$$P(A\mid\bar{B})=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{1-P(\bar{A}\cup B)}{P(\bar{B})}=\frac{1-P(\bar{A})-P(B)+P(\bar{A}B)}{P(\bar{B})}$$

$$=1-\frac{P(\bar{A})-P(\bar{A})P(B\mid\bar{A})}{P(\bar{B})}=1-\frac{0.08(1-0.85)}{0.07}=0.829$$

方法二：

$$P(A\mid\bar{B})=1-P(\bar{A}\mid\bar{B})=1-\frac{P(\bar{A}\,\bar{B})}{P(\bar{B})}$$

$$=1-\frac{P(\bar{A})P(\bar{B}\mid\bar{A})}{P(\bar{B})}=1-\frac{P(\bar{A})[1-P(B\mid\bar{A})]}{P(\bar{B})}=0.829$$

注： B 失灵的条件下，A 有效的概率为 $P(A|\bar{B})$，而不是 $P(A-B)$，这一点要注意。

例 1.14 甲、乙、丙向同一敌机射击，设甲、乙、丙击中敌机的概率分别是 0.4，0.5，0.7，若只有一人击中，飞机坠毁的概率为 0.2；若两人击中，飞机坠毁的概率为 0.6；若三人都击中，飞机坠毁的概率为 1。求飞机坠毁的概率。

分析： 应用全概率公式求这个复杂事件概率。

解： 设 A_k =“第 k 个人击中飞机”$(k=1,2,3)$，B_k =“恰有 k 个人击中飞机”$(k=0,1,2,3)$，C =“飞机坠毁”，则

$$P(C\mid B_0)=0(\text{直观意义}), P(C\mid B_1)=0.2, P(C\mid B_2)=0.6, P(C\mid B_3)=1$$

$$P(A_1)=0.4, P(A_2)=0.5, P(A_3)=0.7$$

且 A_1,A_2,A_3 相互独立。

所以

$P(B_0)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)=0.09$

$P(B_1)=P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$

$=P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)=0.36$

$P(B_2)=P(A_1A_2\bar{A}_3\cup A_1\bar{A}_2A_3\cup\bar{A}_1A_2A_3)$

$=P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)+P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)+P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3)=0.41$

$P(B_3)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0.14$

由全概率公式，有

$$P(C)=\sum_{k=0}^{3}P(B_k)P(C\mid B_k)$$

$$=0.09\times0+0.36\times0.2+0.41\times0.6+0.14\times1=0.458$$