

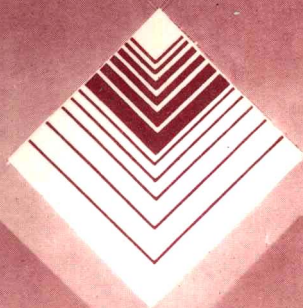
部編學術譯叢

原著 *Chris P. Tsoko*

機率導論及其應用

*Probability Distribution: An Introduction to
Probability Theory with Application*

趙良五・趙寶琦 合譯



國立編譯館 主編

五南圖書出版公司 印行

大 專 用 書

機率導論及其應用

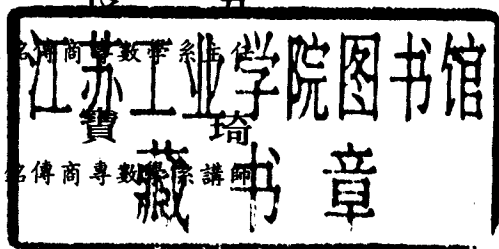
*Probability Distribution: An Introduction to
Probability Theory with Application*

趙 良 五

私立 名傳商專數學系主

趙 費 琦

私立 名傳商專數學系講師



國 立 編 譯 館 主 編
五 南 圖 書 出 版 公 司 印 行

機 率 導 論 及 其 應 用

中華民國71年10月初版

編譯者 趙 趙 良 寶 五 琦

著作權 國 立 編 譯 館
所有人

發行人 楊 榮 川

發行所 五南圖書出版公司
局 版 臺 業 字 第 0598 號
臺 北 市 銅 山 街 1~1 號
電 話 : 3916542 號
郵 政 劃 撥 : 106895 號
印 刷 所 明 文 印 刷 廠

基本定價： 6.67 元

(本書如有缺頁或倒裝，本公司負責換新)

前 言

本書係機率理論與分配之入門用書，可供已修過一年微積分之理工科系（或各科系）學生使用，亦可作為研究人員熟習機率分配之參考書。

機率論之主要內涵除瞭解機率定義外，即是研究隨機變數，故可說本書之精義即在決定隨機變數之分配。蓋此種分配觀念乃可導出隨機變數之定理法則，而為應各科系學生之需要，本書乃採用科學領域中之各種舉例與練習。

茲將本書之特點條列如下：

1. 為增進讀者充分理解，任何新觀念、定理、定義等均伴以實例說明。
2. 各新概念均以圖文並陳方式介紹。
3. 每章末對本章之重點均編有簡短之總結。
4. 每章末均有甚多之習題供讀者演練。

起首章旨在讓讀者複習數學，此部份有時未列入

微積分之正規課程中，教授者可針對學生之需要決定取捨。

第一章從歷史觀點定義機率，說明其發展過程，並強調古典定義係預估機率之一工具，而公理定義則為一種計算方法。隨機變數之定義介紹後，即轉入一維離散隨機變數與一維連續隨機變數。接着介紹各種分配之觀念，並闡述一維隨機變數之函數形之分配，接着又介紹 n 維離散與連續隨機變數，旨在探討機率密度、累積分配函數以及二者之多項特性，同時亦強調隨機變數之期望值、動差、動差生成函數及特性函數。最後則以應用觀點，研討特種隨機過程。包括離散參數之馬可夫鏈。利用狀況表示以及樹形圖來幫助理解。至於馬可夫鏈之用途，則以其在生物學、物理學、遺傳學、及機會競賽等之各種應用實例加以解說。

。

每章末亦附有相關題材之參考書目。各種實用圖表則編列於附錄中。

Chris P. Tsokos

機率導論及其應用

目 次

第 0 章 預備數學

0.0 導 言	1
0.1 和與積之記號	1
0.2 集合論	2
0.3 排列、組合及司徒令公式	8
0.4 二項式及多項式定理	10
0.5 亞可比行列式	13
0.6 r 函數	15
0.7 β 函數	18
0.8 矩 陣	21
習 題	30

第 1 章 機 率

1.0 導 言	35
1.1 機率之定義	36
1.2 機率公理之定義	38
1.3 條件機率	46
1.4 邊際機率	51
1.5 貝氏定理	58

2 目 次

1.6 獨立事件·····	61
1.7 組合機率·····	64
1.8 總 結·····	71
習 題·····	73
問 題·····	79

第 2 章 離散隨機變數及機率分配

2.0 導言：隨機變數之概念·····	83
2.1 離散機率密度函數·····	86
2.2 累積分配函數·····	92
2.3 離散機率分配·····	96
2.4 總 結·····	116
習 題·····	117
問 題·····	120

第 3 章 連續隨機變數及機率分配

3.0 導 言·····	125
3.1 連續隨機變數及機率密度函數·····	125
3.2 連續隨機變數之累積分配函數·····	131
3.3 連續機率分配·····	135
3.4 可靠性上之應用·····	165
3.5 總 結·····	173
習 題·····	174
問 題·····	179

第 4 章 隨機變數之函數

4.0 導 言	187
4.1 離散隨機變數之連續函數分配	187
4.2 連續隨機變數之連續函數分配	193
4.3 導出分配之其他類型	207
4.4 總 結	209
習 題	210
問 題	213

第 5 章 期望值、動差、動差生成與特性函數

5.0 導 言	215
5.1 數理期望	215
5.2 期望之性質	220
5.3 動 差	227
5.4 動差生成函數	235
5.5 特性函數	243
5.6 總 結	250
習 題	252
問 題	256

第 6 章 二隨機變數

6.0 導 言	259
6.1 聯合機率密度函數	259
6.2 雙變數累積分配函數	267

4 目 次

6.3	邊際機率分配	275
6.4	條件機率密度及累積分配函數	281
6.5	獨立隨機變數	289
6.6	二隨機變數之函數	293
6.7	期望值，動差及特性函數	309
6.8	條件期望	336
6.9	雙變數常態分配	344
6.10	總 結	358
習 題		364
問 題		371

第 7 章 隨機變數之序列

7.0	導 言	377
7.1	多變數機率密度函數	377
7.2	多變數累積分配函數	383
7.3	邊際機率分配	385
7.4	條件機率密度及累積分配函數	388
7.5	獨立隨機變數之序列	391
7.6	隨機變數之函數	393
7.7	期望值，動差及特性函數	399
7.8	條件期望	408
7.9	總 結	411
問 題		413

第8章 極限定理

8.0 導言	421
8.1 哲畢維不等式	421
8.2 白努利之大數理論	424
8.3 強與弱大數法則	427
8.4 中央極限定理	439
8.5 棣馬佛——拉卜拉士定理	446
8.6 常態近似帕松分配	454
8.7 常態近似 γ 分配	457
8.8 總結	461
習題	462

第9章 有限馬可夫鏈

9.0 導言	469
9.1 馬可夫鏈之基本概念	470
9.2 N 步轉換機率	482
9.3 P^n 之計算	488
9.4 狀況之分類	508
習題	526

附錄

一、附表	533
二、奇數號次習題解答	577

第 0 章

預備數學

0-0 導 言

本章將討論基本之數學概念，這對於已經學過數學導論之讀者可作為複習，對於缺乏數學訓練之讀者則可滿足起碼之需要。同時亦將介紹一些不含於微積分導論課程中之論題，包括亞可比 (Jacobian) 行列式之概念， γ (Gamma) 和 β (Beta) 函數，一些有用之恆等式，級數及矩陣理論。在熟悉這些概念後，將較易瞭解後續各章之內容。這些概念及相關之重要性質除予以定義及敘述外，並將以應用例題加以說明。

對於學習機率論所必需之概念，可從本章作一簡要複習。若希望作更深入之探討，建議參考其他專門書籍。

0-1 和與積之記號

我們以 y_i 之符號代表 $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, n 個中第 i 個值。這 n 個值之和， $y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n$ ，以 $\sum_{i=1}^n y_i$ 或 $\sum_{i=1}^n y_i$ 表示之。大寫之希臘字母“ Σ ”即表欲求一序列中所有元素之和，字母“ i ”為求和之指標， y_i 則稱為被加數。

■ 例 0-1-1

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \sum_{i=1}^r ay_i &= ay_1 + ay_2 + \dots + ay_r \\ &= a(y_1 + y_2 + \dots + y_r) \end{aligned}$$

2 機率導論及其應用

$$= a \sum_{i=1}^k y_i.$$

$$(b) \sum_{j=1}^k x_j y_j^{j-1} = x_1 + x_2 y_2^1 + \cdots + x_k y_k^{k-1}.$$

$$(c) \sum_{j=1}^n (x_j - a)^2 = (x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + \cdots + (x_n - a)^2.$$

$$(d) \sum_{i=2}^6 (-2)^{i-1} x_{i-1}^i = -2x_1^2 + 4x_2^3 - 8x_3^4 + 16x_4^5 - 32x_5^6.$$

因此，各項之和是根據指標之上下限及其間所有整數值而得之。

若欲求 $y_i, i = 1, 2, \dots, n$ ，之積，則記作：

$$y_1 y_2 y_3 \cdots y_n = \prod_{i=1}^n y_i,$$

式中大寫希臘字母“ Π ”為求一數列中所有元素之積之符號。

■ 例 0-1-2

$$(a) \prod_{i=1}^r \left(a + \frac{i}{b}\right) = \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(a + \frac{2}{b}\right) \left(a + \frac{3}{b}\right) \cdots \left(a + \frac{r}{b}\right).$$

$$(b) \prod_{j=1}^k \left[c + \left(-\frac{1}{2}\right)^{j-1}\right] = c \left(c - \frac{1}{2}\right) \left(c + \frac{1}{4}\right) \cdots \left[c + \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right].$$

0-2 集合論

此節將討論一些集合論之基本概念，這對機率作現代之介紹是很重要的。

集合就是不同事物之聚集。例如，大家所熟悉之 N 集合，係由所有正整數 $1, 2, 3, \dots$ 所構成之集合。屬於集合中之每一事物稱為此集合之元素，令 A_1 為一已知集合，若 a 為 A_1 中之一個元素，則記作：

$$a \in A_1.$$

若 a 不為集合 A_1 中之一個元素，則記作：

$$a \notin A_1.$$

表明一個集合可列出所有元素，或寫出集合中所有元素之共同特性。例如，要表明集合 A_1 為所有小於 12 之正整數，可記作：

$$A_1 = \begin{cases} \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\} \\ \{ \text{所有小於 12 之正整數} \} \\ \{x: x < 12, x \text{ 爲一正整數} \}. \end{cases}$$

若 A_2 之每一個元素亦是 A_1 之元素，則集合 A_2 為集合 A_1 之子集 (subset)，記作：

$$A_2 \subseteq A_1.$$

稱“ A_1 包含 A_2 ”或“ A_2 包含於 A_1 ”。例如，若：

$$A_2 = \{x: x \leq 5, x \text{ 爲一正整數} \},$$

則顯然 A_2 為 A_1 之一個子集。同時，每一集合都是它本身之一個子集。兩集合 A_1 和 A_3 相等，則記作：

$$A_1 = A_3.$$

若且唯若 $A_1 \subseteq A_3$ 且 $A_3 \subseteq A_1$ 。若集合 A_2 之每一元素亦為集合 A_1 之元素，但 A_1 至少包含一個不屬於 A_2 之元素，則此集合 A_2 為集合 A_1 之一個正規子集 (proper subset)，記作：

$$A_2 \subset A_1.$$

若

$$A_1 = \{x: x = 1, 2, 3, 4, 5\}$$

且

$$A_2 = \{x: x = 1, 2, 3\},$$

則 A_2 為 A_1 之一個正規子集。不包含元素之集合，稱為空集 (empty, or null set)，記作 ϕ 。空集為每一集合之子集。

O-2-1 集合運算

令 A_1 和 A_2 為二集合，此二集合之聯集 (union)，記作：

$$A_1 \cup A_2,$$

爲包含 A_1 與 A_2 兩者之元素之集合。亦即：

$$A_1 \cup A_2 = \{x : x \in A_1 \text{ 或 } x \in A_2\}.$$

符號 $A_1 \cup A_2$ 稱爲“ A_1 和 A_2 之聯集”。

■ 例 0-2-1 若 $A_1 = \{x : 0 \leq x \leq 3\}$ ，且 $A_2 = \{x : -2 \leq x \leq 2\}$ 則

$$A_1 \cup A_2 = \{x : -2 \leq x \leq 3\}.$$

兩集合 A_1 和 A_2 之交集 (intersection) 爲包含 A_1 和 A_2 共同元素之集合。 A_1 和 A_2 之交集記作：

$$A_1 \cap A_2 \text{ 或 } A_1 A_2,$$

亦即

$$A_1 \cap A_2 = A_1 A_2 = \{x : x \in A_1 \text{ 且 } x \in A_2\}.$$

符號 $A_1 \cap A_2$ ，稱爲“ A_1 和 A_2 之交集”。

■ 例 0-2-2

若

$$A_1 = \{x : x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

且

$$A_2 = \{x : x = 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

則

$$A_1 \cap A_2 = \{x : x = 4, 5, 6, 7\}.$$

若集合 A_1 和 A_2 沒有共同元素，亦即， $A_1 \cap A_2 = \phi$ ，則集合 A_1 和 A_2 稱爲不相交 (disjoint) 或互斥集 (mutually exclusive sets)。

全集 (universal set)， U ，爲所考慮之元素之整體；亦即所需最小可能之集合，以致其他每一個可能考慮到之集合都將是 U 之

一個子集。集合 $A_1 \subset U$ 之餘集合 (complement) 爲由所有在 U 中而不在 A_1 中之元素所成之集合, 記作 $\overline{A_1}$ 。兩集合 A_1 和 A_2 之差集 (difference) 記作 $A_1 - A_2$, 或 $A_2 - A_1$, 其 $A_1 - A_2 = A_1 \cap \overline{A_2}$, 而 $A_2 - A_1 = A_2 \cap \overline{A_1}$ 。 A_1 之餘集亦可表爲:

$$\overline{A_1} = \{x : x \notin A_1 \text{ 但 } x \in U\}.$$

■ 例 0-2-3 若 $U = \{x : 0 \leq x \leq 25\}$

且 $A_1 = \{x : 5 \leq x \leq 10\}$,

則

$$\overline{A_1} = \{x : 0 \leq x < 5 \text{ 或 } 10 < x \leq 25\}.$$

全集 U 之子集 A_1 之餘集可記作:

$$\overline{A_1} = U - A_1.$$

范氏圖 (Venn diagrams) 用以說明集合之運算是非常有用的。在圖 0-2-1 (a) 中, 陰影部份代表運算 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, 而 U 爲全集。圖(b), (d), (e), (f) 中陰影部份分別代表 $A_1 \cap A_2$, $\overline{A_1 \cap A_2}$, $A_1 - (A_1 \cap A_2)$, 及 $\overline{A_1 - (A_1 \cap A_2)}$, 而(c)中表示出 $A_2 \subset A_1$ 。

有關集合代數性之一些基本而重要性質將陳述於下。令 U 爲全集, A_1 , A_2 和 A_3 爲 U 之子集, ϕ 爲空集。

定理 0-2-1 若 A_1 , A_2 和 A_3 爲全集 U 之子集, 則有以下之規律:

(1) 冪等律 (Idempotent law):

$$A_1 \cup A_1 = A_1, \quad A_1 \cap A_1 = A_1;$$

(2) 交換律 (Commutative law):

$$A_1 \cup A_2 = A_2 \cup A_1, \quad A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_1;$$

(3) 結合律 (Associative law):

$$(A_1 \cup A_2) \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3), \\ (A_1 \cap A_2) \cap A_3 = A_1 \cap (A_2 \cap A_3);$$

6 機率導論及其應用

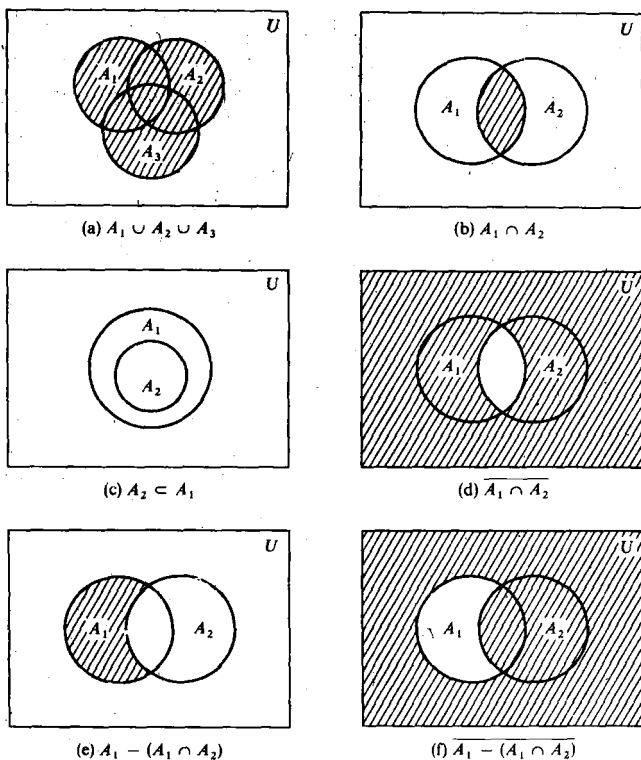


圖 0-2-1

(4)分配律 (Distributive law):

$$\begin{aligned} A_1 \cup (A_2 \cap A_3) &= (A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3), \\ A_1 \cap (A_2 \cup A_3) &= (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3); \end{aligned}$$

(5)恆等律 (Identity law):

$$(a) \quad A_1 \cup U = U, \quad A_1 \cap U = A_1;$$

$$(b) \quad A_1 \cup \emptyset = A_1, \quad A_1 \cap \emptyset = \emptyset;$$

(6)餘集律 (Complement law):

$$A_1 \cup \bar{A}_1 = U, \quad A_1 \cap \bar{A}_1 = \emptyset;$$

(7)迪摩根律 (De Morgan's law):

$$\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}, \quad \overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}.$$

若對每一元素 $a \in A$ ，有一個且僅有一元素 $b \in B$ 與之對應，且對 B 中每一元素在 A 中亦恰有一對應元素，則集合 A 和 B 稱爲一對一對應 (one-to-one correspondence)。

集合可分爲有限及無限。有限集合意指其元素恰爲 n 個，此 n 爲不爲負之整數。凡不爲有限之集合即爲無限。

■例 0-2-4 若 $A_1 = \{x : x = a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 且 $A_2 = \{x : x = 1, 2, 3, 4\}$ ，則 A_1 和 A_2 爲等勢集 (equivalent sets)；亦即， A_1 的元素與 A_2 的元素成一對一對應。

■例 0-2-5 若 A_1 爲包含所有小於或等於 100 之正整數之集合，即，若，

$$A_1 = \{x : x = 1, 2, 3, \dots, 100\},$$

則 A_1 爲一有限集合。

■例 0-2-6 若 A_2 爲包含所有正奇數之集合，即，若，

$$A_2 = \{x : x = 1, 3, 5, \dots\},$$

則 A_2 爲一無限集合。

一集合若其元素可與所有正整數集合之元素成一對一對應，則此集合爲一可數無限集合 (countably infinite set)。一集合爲有限或可數無限皆稱爲可數 (countable, denumerable, or enumerable)。

■例 0-2-7 定義如例 0-2-6 之集合，即，

$$A_2 = \{x : x = 1, 3, 5, \dots\},$$

因其元素可與所有正整數成一對一對應，故爲一可數無限集合。

■例 0-2-8 若 $A_1 = \{x : 0 \leq x \leq 5, x \text{ 爲一實數}\}$ ，則集合 A_1 不爲可數集合，因在實數綫上任一區間都含有無限多個元素。然而，確實的證明超過本書之範圍。

集合 A 與 B 之積或笛卡兒 (Cartesian) 積，記作 $A \times B$ ，其包含所有序偶 (a, b) ，亦即，

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$