人大版 考研丛书

2001年经济类考研数学复习指南

主　编　严守权
撰稿人　严守权　张学贞　褚永增

中国人民大学出版社

2001年经济类考研
数学复习指南

主　编　严守权
撰稿人　严守权　张学贞　褚永增

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

2001年经济类考研数学复习指南/严守权主编.
北京:中国人民大学出版社,2000

ISBN 7-300-03109-9/G・579

Ⅰ.2...

Ⅱ.严...

Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料

Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第21631号

2001年经济类考研数学复习指南

主　编　严守权

撰稿人　严守权　张学贞　褚永增

出版发行:中国人民大学出版社
(北京海淀路157号　邮编100080)
发行部:62514146　门市部:62511369
总编室:62511242　出版部:62511239
E-mail:rendafx@public3.bta.net.cn
经　　销:新华书店
印　　刷:中国人民大学印刷厂

开本:787×1092毫米 1/16　印张:30.25
1999年4月第1版
2000年5月第2版　2000年5月第1次印刷
字数:695 000

定价:35.00元
(图书出现印装问题,本社负责调换)

前　　言

《经济学考研数学复习指南》是实行统考以来国内出版最早并具有一定影响的考研辅导书之一．为广大经济类考生提供一本最好的数学辅导书，一直是我们不断追求的目标．多年来，我们十分注意对考研大纲和命题的研究，跟踪变化趋势，力求准确把握定位；始终保持与广大考生的联系，反馈读者信息，不断改进我们的工作；积极参与研究生入学考试的辅导和阅卷工作的实践，及时总结经验，主动融入和吸纳新的体验和成果．我们先后对本书做了七次较大的修订再版，使内容更为充实，结构更为完善．值得欣慰的是，我们的努力得到了广大考生的认同和回报，《复习指南》已经成为受历届考生欢迎的考研必备参考书和许多考研辅导班的首选教材，借此，对于广大读者给予我们的厚爱，表示衷心的感谢．

本书的特色如下：

一是在全书的结构安排上尽可能地适应考生系统复习考研数学的需要，书中不仅原原本本地介绍了考研大纲划定的内容及题型和必备公式，还提供了近五年统考试题及其解析，使考生具体地了解考研命题的特点．书中通过精选大量具有代表性的例题和练习题，以帮助考生系统复习并掌握所需知识，提高解题能力．为了帮助考生对所做练习结果进行检验，我们对每道练习题提供了题解简答或详细的提示说明．

二是在内容上能准确体现出经济学硕士研究生数学入学考试的要求、重点、难点．本书十分注重对大纲划定的基本概念、基本定理和基本公式的理解和掌握，且作者认为这是考生必须具备的基础．以往考生往往花费很大精力去抠超出大纲的技巧性过强的偏题怪题，而忽视大纲的基本要求，以致遇到一些基本题时，似懂非懂，似会非会，该得分的未能得分，这是应该尽量避免的．同时，我们还十分注意对考试的难点、重点和考生较普遍存在的弱点进行讲解，并侧重于对基本概念、基本定理和基本公式的扩展和延伸，以及它们互相的交叉和综合应用，适度加大了相关题型的覆盖面和难度，其中标准化试题、综合性试题、经济应用题和论证题占有较大比重．

三是全书构想最终落脚于提高考生的应试能力，也就是贴近考试，强调实战训练．主要体现在：例题讲解时，强调的是解题的思路，而不是最终的结果；在行文表述符号引用时，力求规范严谨；加强了习题的选配，使之更具代表性、多样性．

为了给广大考生更多的综合训练和实战的机会，我们这次修改将原书中的模拟试题从六套增至十套，并附有详细解答，在此基础上加强了对考试试卷的综合分析．考虑更多考生的需要和本书篇幅限制，这部分内容单独成册，书名为《2001 年经济类考研入学模拟试题和题型分析》，欢迎大家选购．

根据往届考生提供的复习经验，要使本书在考研中发挥更大的作用，应将全书读两

遍，第一遍主要是了解和掌握考研数学的内容和一般方法；第二遍要在此基础上温故而知新，对书中例题和练习题举一反三，归纳出规律和思路，提高解题速度和准确性、规范性．以上经验可供广大考生参考．

由于数学考试大纲的基本内容与国家教委审定的财经类专业核心课程“经济数学基础”教学大纲基本相同，因此，本书不失为高等院校财经类专业本科生学习“经济数学基础”课的一本较好的参考书．本书部分内容与MBA工商管理硕士数学入学考试高等数学部分内容相似，也可作为该类考生复习参考书．

曾经多年从事经济类考研数学命题工作的龚德恩教授自始至终指导和帮助这本书的出版，并仔细审阅了全部书稿；张南岳教授、王新民教授、莫颂清副教授帮助审阅了部分书稿；李赛时、刘力、蔡明、王建生老师参加了部分初稿的编写；中国人民大学出版社的有关同志为本书的出版做了大量工作，在此，我们表示衷心的感谢．

由于我们水平有限，若有疏漏和错误，欢迎读者批评指正．

编　者

2000年3月

目　录

第一篇　经济学硕士入学考试数学考试大纲的内容和要求

第二篇　统考试题分类解析

第一篇　经济学硕士入学考试数学考试大纲的内容和要求

第一章　微积分

一、函数、极限、连续

(一)内 容 提 要

1. 函数概念.

函数的几何特性:

有界性　设函数 $f(x)$在集合 D 上有定义,如果存在一个正常数 M,使得对任意 $x\in D$,恒有$|f(x)|<M$,则称函数 $f(x)$在 D 上有界,否则称 $f(x)$在 D 上无界.

单调性　设函数 $f(x)$在某区间 D 上有定义,如果对于任意的 $x_1,x_2\in D$,且 $x_1<x_2$,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$)成立,则称函数 $f(x)$在 D 上单调增加(或单调减少).单调增加与单调减少函数统称单调函数.

周期性　设函数 $f(x)$在集合 D 上有定义,如果存在正常数 T,使得对任意 $x\in D$,恒有 $f(x+T)=f(x)$成立,则称 $f(x)$为周期函数,满足上式的最小正数 T_0 称为 $f(x)$的周期.

奇偶性　设函数 $f(x)$在集合 D 上有定义,且 D 关于原点对称;若对任意 $x\in D$,恒有 $f(x)=f(-x)$(或 $f(x)=-f(-x)$),则称函数 $f(x)$为偶函数(或奇函数).

反函数、复合函数、隐函数、分段函数.

基本初等函数与初等函数:常数函数,幂函数,指数函数,对数函数,三角函数和反三角函数称为基本初等函数(定义域、主要性质和图形从略).由基本初等函数经有限次四则运算或有限次复合生成的函数称为初等函数.

简单的经济函数:在生产和经营活动中,成本、收入、利润关于产品的产量或销量 x 的函数关系分别称为总成本函数,记为$C(x)$;总收入函数,记为 $R(x)$;总利润函数,记为 $L(x)$.一般地说,$C(x)=$固定成本+可变成本;$R(x)=px$,其中 p 为产品的销售单价,x 为销量;$L(x)=R(x)-C(x)$.商品的市场需求量 Q_d 和市场供给量 Q_s 相对商品价格 p 的

函数关系，分别称为商品的需求函数 $f_d(p)$ 和供给函数 $f_s(p)$.

2. 极限概念.

设有数列 $\{u_n\}$ 和常数 A，如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，总有不等式 $|u_n-A|<\varepsilon$ 成立，则称常数 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$ 或 $u_n\to A$ $(n\to\infty)$.

设有函数 $f(x)$ 和常数 A，如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，总有不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0)$$

如果自变量 x 仅限从 x_0 右侧(或左侧)趋向 x_0 时，$f(x)\to A$，则称 A 为 $x\to x_0^+$(或 $x\to x_0^-$)时，函数 $f(x)$ 的右极限(或左极限). 记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$(或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$). 类似地可定义 $x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 时，$f(x)\to A$ 的极限概念.

函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}f(x)$ 存在且等于 A 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0^+(+\infty)}f(x)=\lim_{x\to x_0^-(-\infty)}f(x)=A$$

无穷小与无穷大　极限为零的变量称为无穷小量. 在自变量的某个变化趋势下，若函数 $f(x)$ 的绝对值无限地增大，则称 $f(x)$ 为无穷大量. 有限个无穷小量的和仍为无穷小量. 有限个无穷小量的积仍为无穷小量. 无穷小量与有界变量之积仍为无穷小量. 无穷小量除以极限不为零的变量，其商仍为无穷小量. 若 α,β 为同一变化趋势下的无穷小量，且 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\rho$，则当 $\rho=0$ 时，称 β 为比 α 高阶的无穷小量，当 $\rho=\infty$ 时，称 β 为比 α 低阶的无穷小量，当 $\rho=c\neq0$ 时，称 β 为与 α 同阶的无穷小量，特别地当 $\rho=1$ 时，称 β 为与 α 等价的无穷小量，记作 $\alpha\sim\beta$.

$\lim f(x)=A$ 的充分必要条件是，函数 $f(x)$ 可表示为常数 A 与无穷小量 α 之和.

如果极限 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在，则有运算法则：

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$$

$$\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}\quad(\lim g(x)\neq0)$$

两个重要的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{\varphi(x)\to0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=\mathrm{e}$

3. 函数的连续性.

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，称 x_0 为 $f(x)$ 的连续点；如果函数 $f(x)$ 在某区间内每一点都连续，则称 $f(x)$

在该区间内连续.如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处,或者无定义,或者无极限,或者极限不等于函数值 $f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在点 x_0 处间断,称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

初等函数在其定义区间内连续.

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则

(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最大值和最小值(最值定理);

(2) $f(a)\neq f(b)$ 时,对介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任一实数 c,必存在一点 $\xi\in[a,b]$,使得 $f(\xi)=c$(介值定理).

(二)考 试 要 点

1. 掌握函数概念的两个要素:定义域与对应法则. 要注意自始至终在定义域内处理函数微分、积分等各类问题,熟练处理复合结构的函数关系之间的转换和推导.

2. 掌握函数有界性、单调性、对称性和周期性的概念,尤其要注意对函数单调性的判别和讨论,会利用函数对称的几何背景推断对称区间的函数性质,处理好在对称区间上对称函数的各类积分问题.

3. 重点掌握初等函数、分段函数、变上限函数和经济函数(主要是成本函数、收益函数、利润函数、需求函数)相关性质、结构特征和相关问题的处理方法.

4. 了解函数极限存在条件下的惟一性、有界性和保号性. 掌握极限收敛、无穷大和无穷小的概念,注意无穷大与无界函数的区别. 会用无穷小的性质求极限.

5. 掌握无穷小、无穷大的阶概念,能够运用无穷小量之间的等价关系,处理未定式极限的定值问题和极限收敛的判别.

6. 掌握函数连续的概念和连续性判别,注意几种特殊的间断类型,即可去间断和无穷间断类型,会处理相关问题.

7. 掌握闭区间上连续函数有界性定理、最值定理和介值定理(主要是零值定理).

(三)例 题 解 析

1. 填空.

(1)已知 $f(e^x-1)=x^2+1$,则 $f(x)$ 的定义域为______.

(2)与函数曲线 $y=\sin[\arcsin(x+1)]$ 关于直线 $y=x$ 对称的函数曲线方程为______.

(3)已知 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin3x}{x^3}+\dfrac{a}{x^2}+b\right)=1$,则 $a=$______,$b=$______.

(4)已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\tan x}-1}{\ln(1+x)}=100$,则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=$______.

(5) 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x(1-e^{t^2})\mathrm{d}t}{x^k}=c\neq0$,则 $k=$______,$c=$______.

(6)设 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{xt+1}{xt+2}\right)^t$,则函数 $f(x)$ 有间断点______,曲线 $y=f(x)$ 有渐近线

______.

(7)设 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$,则曲线 $y=f(x)$的渐近线为______,连续区间为______.

答:(1)$(-1,+\infty)$　(2)$y=\sin[\arcsin(x-1)]$　(3)$a=-3,b=\dfrac{11}{2}$　(4)200　(5)$k=3;c=-\dfrac{1}{3}$　(6)$x=0;y=1,x=0$　(7)$y=\dfrac{1}{1-e},x=0;(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.

解析:(1)求函数 $f(x)$的定义域时,一般应先求出 $f(x)$的解析式.为此,令 $u=e^x-1$,或 $x=\ln(1+u)$,可得 $f(x)=\ln^2(x+1)+1$,故 $f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$.

(2)与 $y=\sin[\arcsin(x+1)]$关于直线 $y=x$ 对称的函数为该函数的反函数,反解可得 $y=\sin[\arcsin(x-1)]$,本题注意不能写作 $y=x-1$,两者代表两个不同的函数.

(3)由$\lim\limits_{x\to0}x^2\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin3x}{x^3}+\dfrac{a}{x^2}+b\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin3x}{x}+a+bx^2\right)=0$ 得 $a+3=0$ 即 $a=-3$,进一步有 $b=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x-\sin3x}{x^3}+1=\dfrac{11}{2}$.

(4)因为 $x\to0$ 时,$\ln(1+x)\sim x,(1+f(x)\tan x)^{\frac{1}{2}}-1\sim\dfrac{1}{2}f(x)\cdot\tan x$,所以由已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}f(x)\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2}f(x)=100$.即得 $x\to0$ 时,$f(x)\to200$.

(5)先看阶后定值.由于 $1-e^{t^2}\sim-t^2$,而 $-\int_0^x t^2dt=-\dfrac{1}{3}x^3$,因此,$\int_0^x(1-e^{t^2})dt\sim-\dfrac{1}{3}x^3$,从而知 $k=3,c=-\dfrac{1}{3}$.

(6)当 $x\neq0$ 时,$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[\dfrac{1+\frac{1}{xt}}{1+\frac{2}{xt}}\right]^t=e^{-\frac{1}{x}}$

当 $x=0$ 时,$f(0)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^t=0$

所以 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$

由 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=+\infty,\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$,知曲线 $y=f(x)$有渐近线 $y=1,x=0$.

(7)由于初等函数的定义域即为连续区间,于是由 $x-1\neq0$ 及 $1-e^{\frac{x}{x-1}}\neq0$ 知函数 $f(x)$的连续区间为$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.又由$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\dfrac{1}{1-e}$知有渐近线 $y=\dfrac{1}{1-e},x=0$.

2. 选择题(每小题给出的四个选项中,只有一项正确).

(1)设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geqslant0\\ 2x & x<0\end{cases},g(x)=\begin{cases}x & x\geqslant0\\ -2x & x<0\end{cases}$,则 $x\leqslant0$ 时,$f[g(x)]=$(　　).

(A)$2x$　(B)x^2　(C)$4x^2$　(D)$-4x^2$

(2)对于任何 $x\in(1,a)$，设 $f(x)=\log_a x$，则(　　)正确.

(A)$f(f(x))<f(x^2)<[f(x)]^2$　　(B)$f(f(x)]<[f(x)]^2<f(x^2)$

(C)$f(x^2)<f(f(x))<[f(x)]^2$　　(D)$[f(x)]^2<f(f(x)]<f(x^2)$

(3)设 $f(x)$处处可导，则(　　).

(A)当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$

(B)当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

(C)当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$

(D)当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

(4)设$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d[(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1]}=2$，其中 $a^2+c^2\neq0$，则有(　　).

(A)$a+4c-2d=0$，b 为任意实数

(B)$a+4c=0$，b，d 为任意实数

(C)$b-2d=0$，a，c 为任意实数

(D)$2a+b+8c-d=0$

(5)设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$(　　).

(A)存在且一定等于 0　　(B)存在但不一定为 0

(C)一定不存在　　(D)不一定存在

(6)函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}} & x\neq0\\ 1 & x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 处(　　).

(A)左连续　　(B)右连续

(C)左、右皆不连续　　(D)连续

(7)已知函数 $f(x)=x^3+(2m-3)x+m^2-m$ 有三个相异的零点，分别介于$(-\infty,0)$，$(0,1)$，$(1,+\infty)$之间，则(　　).

(A)$-2<m<0$　　(B)$0<m<1$

(C)$1<m$　　(D)$-2<m<1$

答：(1)C　(2)B　(3)D　(4)B　(5)D　(6)B　(7)A

解析：(1)处理分段函数的一般方法是，先处理各分段开区间，然后再单独讨论分段点. 在本题中，当 $x<0$ 时，$g(x)=-2x>0$，故对应于 $f(x)=x^2$，有 $f[g(x)]=[g(x)]^2=4x^2$，又 $g(0)=0$，$f[g(0)]=0^2=0$，综上所述，当 $x\leqslant0$ 时，$f[g(x)]=4x^2$.

(2)由已知 $0<f(x)<1<x^2$，则有 $f(x^2)=2f(x)>f^2(x)>0$ 及 $f(f(x))<0$，故取(B).

(3)由反例：$x\to-\infty$时，$x^3\to-\infty$，但$(x^3)'=3x^2\to+\infty$；$x\to-\infty$时，$(x^2)'=2x\to-\infty$，但 $x^2\to+\infty$；及 $x\to+\infty$时，$x\to+\infty$时，$x\to+\infty$，但$(x)'=1\to1$. 可知(A)，(B)，(C)均不成立，由排除法可得(D)正确. 事实上，由 $x\to+\infty$时，$f'(x)\to+\infty$知，总存在一个 $x_0>0$，使 $x>x_0$ 时，有 $f'(x)>M$. 于是当 $x\to+\infty$时，总有$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)x$

$>f(x_0)+Mx\to+\infty$.

(4)由于 $\tan x\sim x, 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2, \ln(1-2x)\sim-2x, (1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}x^2$ 知原极限最终取决于 $a\tan x$ 与 $c\ln(1-2x)$ 比值的变化趋势，即有原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{a\tan x}{c\ln(1-2x)}=\frac{a}{-2c}=2$，也即 $a+4c=0$，故取(B).

(5)由已知，$0\leqslant f(x)-\varphi(x)\leqslant g(x)-\varphi(x)$，又当 $x\to\infty$ 时，$g(x)-\varphi(x)\to0$，所以有 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-\varphi(x)]=0$，但由此推不出 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，故取(D).

(6)由 $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}e^{-\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to0^-}e^{-\frac{1}{x}}=\infty$，知 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1$，也即 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq f(0)$，故为右连续，取(B).

(7)由连续函数零值定理，应有不等式 $\begin{cases}f(0)=m^2-m>0\\f(1)=1+2m-3+m^2-m<0\end{cases}$，求解不等式得 $-2<m<0$，故取(A).

3. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{(1+2+\cdots+n)-1})$

解：(1)原极限整理为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x-\sin x}$ 由 $e^{x-\sin x}-1\sim x-\sin x, e^{\sin x}\to e^{\sin 0}$，所以

原极限 $=1$

(2)“$\infty-\infty$”型极限，进行合并整理，可化为重要极限形式，即有

$$原极限=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x+2}{x+1}\cdot\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{x+1}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\ln(1\cdot e\cdot\frac{1}{e})=0$$

(3)“$\infty-\infty$”型极限，先变换化为“$\frac{\infty}{\infty}$”型，即有

$$原极限=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+2+\cdots+n}+\sqrt{1+2+\cdots+n-1}}=0$$

以上例子说明，求极限时，首先要分析极限的类型特征，并作必要整理. 一般地说，若函数 $f(x)$ 是初等函数，且 x_0 在定义域内，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 若极限式中含有有界变量，则应该考虑设法利用无穷小量与有界变量乘积仍为无穷小量的性质. 若极限为未定式，一般要化为“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型，设法消去零因子或无穷大因子，再利用极限运算法则或两个重要极限或用等价无穷小代换等方法定值，下一节将介绍用罗必塔法则对未定式定值，往往更为简便.

4. 检查下列运算是否正确，若不正确，写出正确运算过程.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=0\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=0$

(2) $\lim\limits_{x\to1}(\frac{4x}{1-x^2}-\frac{1+x}{1-x})=\lim\limits_{x\to1}\frac{4x}{1-x^2}-\lim\limits_{x\to1}\frac{1+x}{1-x}=\infty-\infty=0$

$$(3)\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+3}{x^2-3x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+3)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+2)}=\frac{11}{0}=\infty$$

(4)因为$\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{x+1}{x-2}$

所以$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-2}=-2$

(5)$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\csc x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}\frac{x}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{x}{\sin x}}=e$

(6)因为 $\sin x\sim x$,所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$

答:(1)错. $x\to\infty$时,$\arctan x$ 极限不存在,不能用运算法则. 正确解法是,由于$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$,且当 $x\to\infty$时,$\dfrac{1}{x}$为无穷小量,故原极限$=0$.

(2)错. $x\to 1$ 时,和式$\dfrac{4x}{1-x^2}$,$\dfrac{1+x}{1-x}$的极限均不存在,不能运用极限运算法则,而且两个无穷大量之差也不一定为无穷小. 正确的解法是,先通分,化为“$\dfrac{0}{0}$”型再定值. 即

$$原极限=\lim_{x\to 1}\frac{-(1-x)^2}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{-(1-x)}{1+x}=0$$

(3)错. 极限式分母为零,不能运用极限运算法则. 若要用法则,正确解法是,首先由

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{2x^2+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+3)}=\frac{0}{11}=0$$

得出　　原极限$=\infty$

(4)错. 一般情况下,等式$\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{x+1}{x-2}$不成立. 正确的解法是,根据极限概念,$x\to 1$ 时,$x\neq 1$,因此,在极限号下分子分母可消去$(x-1)$因子,即有

$$原极限=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2}=-2$$

(5)错. 极限过程所有变量应同步变化,不能将其中某个部分先变,正确解法同(6),即由

$$\lim_{x\to 0}\csc x\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$$

得出　　原极限$=e^1=e$

(6)错. 在计算和差形式的极限时,不能用等价无穷小代换,正确的解法是,用罗必塔法则定值或在使用一次罗必塔法则后,分子用等价无穷小代换定值. 即

$$原极限\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\xlongequal{1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

以上讨论的是在求极限过程中经常犯的错误. 说明在利用已知求极限的方法时,要十分注意使用的前提条件,不能在允许的条件之外想当然地进行极限运算.

5. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln x+(x-e)e^{(x-e)t+x}}{1+(x-e)e^{(x-e)t+k}}$　$(k\leqslant e,x>0)$,求 $f(x)$,$f(x)$的反函数$g(x)$,并讨论函数 $g(x)$的连续性.

解:极限含参变量应讨论. 当 $x>\mathrm{e}$ 时,$\mathrm{e}^{(x-\mathrm{e})t+x}\to+\infty$,故 $f(x)=\mathrm{e}^{x-k}$. 当 $x<\mathrm{e}$ 时,$\mathrm{e}^{(x-\mathrm{e})t+x}\to 0$,故 $f(x)=\ln x$. 当 $x=\mathrm{e}$ 时,$f(x)=\ln\mathrm{e}=1$,于是有

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x-k} & \mathrm{e}<x<+\infty\\ \ln x & 0<x\leqslant\mathrm{e}\end{cases}$$

$f(x)$为分段函数,应分段处理. 当 $\mathrm{e}<x<+\infty$时,由 $y=\mathrm{e}^{x-k}$,得 $x=\ln y+k$,即 $y=\ln x+k$,$1<x<+\infty$;当 $0<x\leqslant\mathrm{e}$ 时,由 $y=\ln x$,得 $x=\mathrm{e}^{y}$,即 $y=\mathrm{e}^{x}$,$-\infty<x\leqslant 1$,综上讨论

$$g(x)=\begin{cases}\ln x+k & 1<x<+\infty\\ \mathrm{e}^{x} & -\infty<x\leqslant 1\end{cases}$$

函数 $g(x)$在各自分段开区间对应为初等函数,连续. 对于分段点 $x=1$ 处,由

$\lim\limits_{x\to1^{+}}g(x)=\lim\limits_{x\to1^{+}}(\ln x+k)=k$,$\lim\limits_{x\to1^{-}}g(x)=\lim\limits_{x\to1^{-}}\mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}$ 且 $g(1)=\mathrm{e}$,知当 $k=\mathrm{e}$ 时,$g(x)$在$x=1$ 处连续,且在其定义域内连续. 当 $k\neq\mathrm{e}$ 时,$y=g(x)$有一个间断点 $x=1$.

6. 已知$\lim\limits_{x\to0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{3}$,求$\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解:欲求极限,需先确定$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$. 由已知有$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)}{x}=3$,从而有$\lim\limits_{x\to0}\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)=0$,进一步有$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 和 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\dfrac{f(x)}{x}}{x}=1+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^{2}}=3$,也即$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^{2}}=2$. 于是

$$原极限=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}/x=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^{2}}=2$$

7. 设 $f(x)$是关于 x 的三次多项式,且有$\lim\limits_{x\to2a}\dfrac{f(x)}{x-2a}=\lim\limits_{x\to4a}\dfrac{f(x)}{x-4a}=1$,求$\lim\limits_{x\to3a}\dfrac{f(x)}{x-3a}$.

解:由 $\lim\limits_{x\to2a}\dfrac{f(x)}{x-2a}=\lim\limits_{x\to4a}\dfrac{f(x)}{x-4a}=1$,知多项式 $f(x)$ 必含因式$(x-2a)$和$(x-4a)$,于是可设

$$f(x)=k(x-2a)(x-4a)(x-b)\qquad b,k\ 为待定系数$$

并有

$$\lim_{x\to2a}\frac{f(x)}{x-2a}=\lim_{x\to2a}k(x-4a)(x-b)=-2ak(2a-b)=1$$

$$\lim_{x\to4a}\frac{f(x)}{x-4a}=\lim_{x\to4a}k(x-2a)(x-b)=2ak(4a-b)=1$$

$$联立方程\begin{cases}-2ak(2a-b)=1\\ 2ak(4a-b)=1\end{cases}\qquad 得\begin{cases}k=\dfrac{1}{2a^{2}}\\ b=3a\end{cases}$$

所以

$$\lim_{x\to3a}\frac{f(x)}{x-3a}=\lim_{x\to3a}\frac{1}{2a^{2}}(x-2a)(x-4a)=-\frac{1}{2}$$

8. 某玩具厂每天生产 60 个玩具,其成本为 300 元,若每天生产 80 个玩具,其成本为 340 元. 求其线性成本函数,问每天的固定成本和生产一个玩具的可变成本以及平均成本各多少?

解：设该厂每天玩具产量为 x 个，则其线性成本函数为 $C(x)=a+bx$（单位：元），由已知 $C(60)=300$，$C(80)=340$，得方程组

$$\begin{cases}a+60b=300\\a+80b=340\end{cases}\quad 解得\quad \begin{cases}a=180\\b=2\end{cases}$$

因此，该厂生产成本函数为 $C(x)=180+2x$，每天固定生产成本为 $C(0)=a=180$ 元，生产一个玩具的可变成本为 $b=2$ 元，每天生产 x 单位玩具的平均单位成本为

$$\frac{C(x)}{x}=\frac{a}{x}+b$$

9. 设某商品的需求函数为 $Q_d=15-0.4p$，总成本函数为 $C=12+0.3Q_d$，求该商品总利润对于销售价格的函数.

解：当销售量为 Q_d 时，总收入为

$$R(p)=Q_dp=(15-0.4p)p$$

于是总利润关于销售价格的函数为

$$\begin{aligned}L(p)&=R(p)-C(Q_d)\\&=(15-0.4p)p-[12+0.3(15-0.4p)]\\&=15.12p-0.4p^2-16.5\end{aligned}$$

（四）练习与答案

1. 填空.

(1) 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，则 $\varphi(x)=$______，其定义域为______.

(2) 设函数 $f(x)$ 满足等式 $2f(x)+x^2f(\frac{1}{x})=\frac{x^2+2x}{x+1}$，则 $f(x)=$______.

(3) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{\frac{x}{t^2}}-1}{e^{\frac{x}{t^2}}+1}$，则 $f(x)=$______.

(4) 已知 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 为等价无穷小，则 $a=$______.

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x^2+1)\cdot\cdots\cdot(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}=$______.

(6) 已知 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x^k}=c$，则 $k=$______，$c=$______.

(7) 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1000}}{n^k-(n-1)^k}=A\neq 0$，则 $k=$______，$A=$______.

(8) 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x(\sin t^3)\mathrm{d}t}{x^k} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ $(a\neq 0)$ 为连续函数，则 k 与 a 满足条件______.

(9)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+2 & x\leqslant 0\\ x^2+a & 0<x\leqslant 1\\ bx & 1<x\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续,则 $a=$______,$b=$______.

(10)要使方程 $3x^2+(m-5)x+m^2-m-2=0$ 的两根分别满足 $0<x_1<1$ 和 $1<x_2<2$,实数 m 的取值范围应是______.

2.选择题(每小题给出的四个选项中,只有一项正确).

(1)下面(　　)中两函数相同.

(A)$y=x$　　$y=\arctan(\tan x)$

(B)$y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$　　$y=\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$

(C)$y=\dfrac{2x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$　　$y=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$

(D)$y=\ln x^2$　　$y=2\ln x$

(2)设 $g(x)=\begin{cases}2-x & x\leqslant 0\\ x+2 & x>0\end{cases}$　$f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ -x & x\geqslant 0\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=$(　　).

(A)$\begin{cases}2+x^2 & x<0\\ 2-x & x\geqslant 0\end{cases}$　(B)$\begin{cases}2-x^2 & x<0\\ 2+x & x\geqslant 0\end{cases}$

(C)$\begin{cases}2-x^2 & x<0\\ 2-x & x\geqslant 0\end{cases}$　(D)$\begin{cases}2+x^2 & x<0\\ 2+x & x\geqslant 0\end{cases}$

(3)设 $f(x)$可导且单调增,则(　　)也单调增.

(A)$f(\sin x)$　(B)$\dfrac{1}{f(-x)}$

(C)$f(f(x))$　(D)$f'(x)$

(4)函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x+1}} & x<-1\\ \ln(1-x^2) & -1<x<1\\ x^2\sin x & 1\leqslant x\end{cases}$ 当(　　)时为无穷大量.

(A)$x\to-\infty$　(B)$x\to+\infty$

(C)$x\to 1$　(D)$x\to-1$

(5)设 $x\to 0$ 时,$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小,则 $n=$(　　).

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

(6)曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x-1}{(x+1)(x-2)}$有(　　)条渐近线.

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

(7)函数 $f(x)$在(a,b)内连续,则(　　)也在(a,b)内连续.