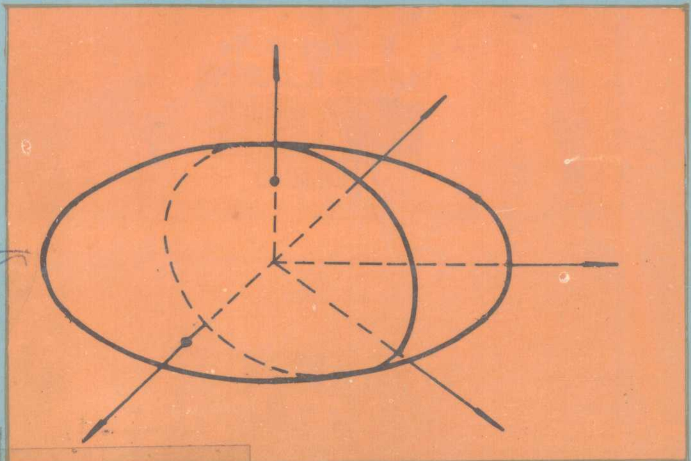
线性代数及其应用

王 文 贤　等编



大连理工大学出版社

线性代数及其应用

王文贤　肖义珣
张凤香　施光燕　编

大连理工大学出版社

（辽）新登字 16 号

内 容 提 要

本书是参考美国著名数学家斯特让（G. Strang）著：《线性代数及其应用》，结合教学实践，并参照《线性代数课程教学基本要求》编写而成。本书试图将线性代数的抽象性与应用性有机地结合起来，力求概念引入自然、理论严谨、应用面广、便于自学。

本书内容包括：高斯消去法，线性方程组的理论、正交射影和最小二乘法、行列式、特征值和特征向量、正定矩阵、矩阵的计算、线性规划。书末附有习题答案。超基本要求的内容可供有兴趣的学生学习。

本书可作为高等工业学校各专业不同层次的大学生、研究生的教材，也可供高校有关教师及科技工作者参考。

线 性 代 数 及 其 应 用

Xianxing Daishu Jiqi Yingyong

王文贤　等编

大连理工大学出版社出版发行　　邮政编码：116024
大连海运学院印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32　　印张：12.5　　字数：312 千字
1993 年 7 月第 1 版　　1993 年 7 月第 1 次印刷
印数：0001— 3600 册

责任编辑：张亚军　范水士　　责任校对：寸　土
封面设计：姜严军

ISBN 7-5611-0793-5/O・108　定价：6.50 元

前　言

由于电子计算机的飞速发展和广泛应用，使许多实际问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决，于是作为离散问题的表述，数据的存贮以及各类数值计算方法的基础——线性代数，就成为理工、经济、管理各专业本科生以及从事实际工作的科技人员和管理人员必修的课程。

多年的教学实践和调查表明，许多学生感到线性代数课程抽象难学，学完之后也不知道通过这门课程学到了什么，因而远不如学微积分那样有兴趣，究其原因就是在线性代数课程中未能把线性代数的抽象性与其应用性有机地结合起来。著名美国数学家斯特让(G. Strang)根据他在麻省理工学院所用讲义写成的教材《线性代数及其应用》(侯自新等译，南开大学出版社，1990 年)力图解决这个问题。1978 年该书问世以来受到各国数学工作者和科技人员的重视。我校以该书为蓝本加以删节，在校内试用过多次。现在试用的基础上，根据我们的教学习惯编写出这本教材，该教材力求保持斯特让所著《线性代数及其应用》的体系以及将线性代数的抽象性与其应用性有机地结合的特点，期望读者在学习线性代数基本内容的同时能更快更好地应用线性代数。

本教材可供 50 学时以上线性代数课程使用，本书某些章节具有独立性，少学时课程可以根据需要选择讲授，书中带有(*)号或小字排印的内容是供选学的内容。

本书初稿(方玉玲、王文贤编)于 1986 年在大连理工大学校内试用。1990 年对初稿进行全面修订，历时两年有余，由王文贤(第一、二、三章)、肖义珣(第四、五章)、张凤香(第六章)、施光燕(前言、第七、八章)编写出本书，肖义珣、王文贤审阅了全书。书中不妥之处，敬请读者批评和指正。

编者

1992 年 9 月

目　　录

第一章　消去法与矩阵

线性代数的核心问题之一是解线性方程组。最重要、最简单的是未知数的个数与方程的个数都等于n的所谓n元线性方程组，我们就从这样的方程组讲起。解n元线性方程组有两种基本方法：一种方法是高斯消去法（简称消去法），它是通过消元和回代两个过程求得方程组的未知数；另一种方法是应用克莱姆法则（参阅第四章），这个法则是通过两个行列式之比以求得方程组的未知数。当n很大时，后者不便实用，而前者则是简单易行的方法。

本章以消去法为主线，首先简述消去法，其次介绍矩阵的概念及其运算，矩阵的逆矩阵，转置矩阵和初等矩阵等，最后再介绍消去法等价于矩阵的三角分解的定理以及误差分析等。

§1　消去法举例

我们以解三元线性方程组为例介绍消去法，对于线性方程组

$$\begin{cases} 2u+v+w=1 \\ 4u+v=-2, \\ -2u+2v+w=7 \end{cases} \qquad (1)$$

其具体步骤是：

从(1)的后两个方程减去第一个方程的适当倍数，以消去该两个方程中的未知数 u，即

1° 从(1)的第二个方程减去第一个方程的 2 倍；

2° 从(1)的第三个方程减去第一个方程的 -1 倍，从而得到与(1)同解的方程组：

$$\begin{cases} 2u + v + w = 1 \\ \quad -v - 2w = -4 \\ \quad\ 3v + 2w = 8 \end{cases} . \tag{2}$$

不管(2)的第一个方程，对(2)的后两个方程应用同样的消去法，以消去(2)中第三个方程中的未知数 v，即

3° 从第三个方程减去第二个方程的 -3 倍，这样便得到与原方程组同解的简化方程组

$$\begin{cases} 2u + v + w = 1 \\ \quad -v - 2w = -4 \\ \qquad\ -4w = -4 \end{cases} . \tag{3}$$

这是一个阶梯形的方程组，把一个方程组按照上述步骤化为阶梯形方程组的过程叫**消去过程**。

由阶梯形方程组(3)最后一个方程容易算出 $w = 1$；把 $w = 1$ 往回代入前一个方程可算出 $v = 2$；再把 $w = 1$，$v = 2$ 往回代入前一个方程算出 $u = -1$，于是方程组(1)的解为

$$u = -1,\ v = 2,\ w = 1 .$$

这样从阶梯形方程组的最后一个方程开始求解，逐步往回代入前一个方程的求解过程叫**回代过程**。

以上就是解方程组的消去法，它的主要步骤是消去过程和回代过程。

在阶梯形方程组(3)中第一个方程的未知数 u 的系数 2，第二个方程的未知数 v 的系数 -1 以及第三个方程的未知数 w 的系数 -4 叫做**主元**。

对于 n 元线性方程组同样可用消去法求解。先做消去过程，即

用第一个方程的倍数对方程组作消去变换，使第一个主元正下方的所有系数变为零；再用所得的新方程组的第二个方程的倍数对该方程组作消去变换，使第二个主元正下方的所有系数变为零；余者类推，直到最后一个方程仅含一个未知数，使原方程组化为同解的阶梯形方程组。当然，这是假定各主元均不为零。其次做回代过程，即在所得的阶梯形方程组中，先解最后一个方程求得最后一个未知数，把它往回代入前一个方程求得前一个未知数，直到由第一个方程求出第一个未知数。

为了对消去法本身有更进一步的了解，我们应考虑下面两个问题：

首先，用消去法是否一定能得到方程组的解？显然，当方程组的主元都不为零时，如上所述，其消去过程能进行到底，再用回代过程便能求出其唯一解。若方程组在消去过程中遇到主元为零时，在多数情况下，通过调整该方程组中方程的顺序能使消去过程进行到底，从而能求出唯一解（参阅 §6）。当然，也有一些这样的方程组，不管怎样调整其方程的顺序，也不能改变其零主元的情况，这时方程组有无穷多解或无解（见习题（1-1）第 5 题）。这种情况将在第二章讨论。

其次，用消去法解 n 元线性方程组需要进行多少次算术运算？这里遇到的运算有两类：一类是除法，用来确定从主元下面的方程中应减去主元所在方程的倍数（如 l 倍）；另一类是"先乘后减"，即先用 l 乘主元所在的方程，再从主元下面的方程中减去乘上了 l 的主元所在的方程，我们约定把每一个除法和每一个"先乘后减"都分别叫做一次运算，下面就来估算一下对 n 元线性方程组左端使用消去法所需的运算次数，对于消去法第一步，每消去第 1 列的一个元素，要做 n 次运算（求倍数一次，算出被消去元素所在行的新元素 $n-1$ 次），而第一行下面共有 $n-1$ 行，要消去的元素为 $n-1$ 个，因此消去法的第一步要进行 $n(n-1)=n^2-n$ 次运算。第二步是对第一个方程之外的 $n-1$ 元线性方程组进行同样考虑，类似

地，剩下 k 元线性方程组时，消去主元下面的所有元素所需的运算次数是 $k(k-1)=k^2-k$，所以用消去法把 n 元线性方程组变为阶梯形方程组即消去过程，其左端所需的运算总次数为

$$\begin{aligned}P &= (n^2-n)+\cdots+(k^2-k)+\cdots+(1^2-1)\\ &= \sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{n^3-n}{3}.\end{aligned}$$

如果 n 足够大，可用 $P=\dfrac{n^3}{3}$ 来估算消去过程运算的总次数。

回代时，求最后一个未知数需一次除法，求倒数第二个未知数时需一次“先乘后减”和一次除法。类推，求倒数第 k 个未知数时，需 k 次运算，因此回代过程所需的总运算次数为

$$Q=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}\approx\frac{n^2}{2}.$$

习　题　1-1

1. 用消去法解方程组

$$\begin{cases}2u-3v=3\\ 4u-5v+w=7\\ 2u-v-3w=5\end{cases}.$$

列出消去过程的各步运算，写出各主元。

2. 用消去法解方程组

$$\begin{cases}2u-v=0\\ -u+2v-w=0\\ -v+2w-z=0\\ -w+2z=5\end{cases}.$$

3. 用消去法解方程组

$$\begin{cases} u+v+w+z=5 \\ u+v+2w+4z=5 \\ 2u+3v-w-5z=10 \\ v-2w+11z=-15 \end{cases}.$$

当遇到零主元时，将该方程与它下面的方程对换位置后，继续做消去过程。

4. 用消去法解方程组

$$\begin{cases} u+v+w=6 \\ u+2v+2w=11 \\ 2u+3v-4w=3 \end{cases}.$$

5. 设有方程组

$$\begin{cases} u+v+w=-2 \\ 3u+3v-w=6 \\ -u-v+w=2 \end{cases}.$$

请用消去法讨论该方程组是否有解？若将第三个方程中 w 的系数改为 -1，则该方程组是否有解？

§2 矩阵及其运算

对于 §1 的例子，我们能写出消去过程的各方程，甚至能详细地列出每个消去步骤以及阶梯形方程组，然而对于大的方程组我们无法全部写出它的所有方程及每个消去步骤，这就需要更简明的表示它。为此我们引入矩阵和矩阵乘法来描述原方程组及消去法。矩阵是数学中一个极其重要的工具，除了用它考察线性方程组外，在其它方面也有广泛的应用。

2.1 向量与矩阵

在 §1 的方程组(1)

$$\begin{cases} 2u+v+w=1 \\ 4u+v=-2 \\ -2u+2v+w=7 \end{cases}$$

中有三种不同类型的量：有未知数 u、v、w；有右端的常数 1、－2、7；有在左端的未知数的九个系数(其中之一为零)。对右端的一列常数(方程组的非齐次项)及三个未知数，我们用向量记号分别记作

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\-2\\7\end{bmatrix}\qquad \text{和}\qquad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}.$$

这些都是 3 维向量。3 维向量在几何上表示 3 维空间中的一点，把它的三个分量取作点的坐标，于是 3 维空间的每一点都对应一个以原点为起点的 3 维向量。例如点 $M(1,2,3)$ 与一个 3 维向量 $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ 对应。向量 $\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ 分别对应 x,y,z 轴上的点，且其长度均为 1，称它们为单位向量。

点 $M(1,2,3)$ 所对应的向量，有时也记作 $(1,2,3)$，我们称这种向量为**行向量**，而把 $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ 叫**列向量**。本书所谈的向量如无特别声明，都是指列向量，并用黑体字表示。$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$，而把行向量 $(1,2,3)$ 记作 $\boldsymbol{a}^T$，即 $\boldsymbol{a}^T=(1,2,3)$。

向量的基本运算有两类，即向量的加法和数乘向量。例如设

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\-2\\7\end{bmatrix},\ \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}1\\-4\\-4\end{bmatrix},$$

从几何上看，$\boldsymbol{b}$ 是起点为原点，终点为该点的向量，$2\boldsymbol{b}$ 是和 $\boldsymbol{b}$ 有相同方向而长度是 $\boldsymbol{b}$ 的 2 倍的向量，$-2\boldsymbol{b}$ 是和 $2\boldsymbol{b}$ 方向相反的向量，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 是通过平移向量 $\boldsymbol{c}$，将 $\boldsymbol{c}$ 的起点放在 $\boldsymbol{b}$ 的终点来求得的。在代

数上，这些正好表示向量的运算是按分量进行的：

$$2b = 2\begin{bmatrix}1\\-2\\7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-4\\14\end{bmatrix}, -2b = \begin{bmatrix}-2\\4\\-14\end{bmatrix},$$

$$b + c = \begin{bmatrix}1\\-2\\7\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\-4\\-4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-6\\3\end{bmatrix},$$

两个向量仅当它们的维数相同，即分量的数目相同时才能相加。

将上面 3 维向量的概念加以推广有：

定义 1 n 个有序的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 所组成的数组

$$a = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$$

叫做 n 维向量，也称 n 维列向量。这 n 个数叫做向量 a 的**分量**(或坐标)。$a_i\ (i = 1,2,\cdots,n)$ 叫做 a 的第 i 个分量(或坐标)。

设

$$a = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$$

都是 n 维向量，当且仅当 $a_i = b_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 时，称向量 a 与 b **相等**，记作 $a = b$。行向量 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 可记作 a^T，即 $a^T = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$。

若 λ 为数量，则向量