

回报 500万 学子



北京万向思维基础教育教学研究中心成果

高中数学

教材知识详解

必修5

人教A版

【总主编】刘增利[®]

章节详解 + 课后解答 + 学科综合 + 思路导航

集教学精髓与课程资源之大成



北京出版社出版集团
BEIJING PUBLISHING HOUSE(GROUP)



北京教育出版社
BEIJING EDUCATION PUBLISHING HOUSE

万向思维 万卷真情TM

多题一解·掌握规律
一题多解·训练思维

多题一变·善于归纳
一题多变·学会迁移

物流编码



详解通天下 —— 前程更远大

全面

1. 穷尽教材大纲考纲全部必备知识点
2. 搜罗大纲外考试内无限可能资料库

详细

3. 系统讲练教材基础知识基本技能
4. 拓展深化学科内学科间边缘问题

信息

5. 命题贴近生活发现问题解决问题
6. 选题紧跟时代追踪新闻关注热点

活泼

7. 颜色字体边框巧妙搭配区别记忆
8. 趣题趣文趣知识开发头脑增长智慧

万向思维 培养学子 全球视野

一册图书 十分爱心

总主编：刘增利

封面设计：魏晋文化



ISBN 978-7-5303-6821-3



9 787530 368213 >

定价：15.80 元



一网打尽系列

教材知识 详解

高中数学 必修⑤

人教A版

总 主 编 刘增利
学科主编 杨文彬
本册主编 韩廷蕴 李现勇
编 者 裴玉霞 樊忠丽
冯艳红 陈兴芬

 北京出版社出版集团
BEIJING PUBLISHING HOUSE (GROUP)
 北京教育出版社
BEIJING EDUCATION PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

教材知识详解: 人教版. 高中数学. 5: 必修/刘增利
主编. —北京: 北京教育出版社, 2008. 11
ISBN 978 - 7 - 5303 - 6821 - 3

I. 教… II. 刘… III. 数学课—高中—教学参考资料
IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 185105 号

编读交流平台

✉ 主编邮箱: zhubian@wxsw.cn (任何疑问、意见或建议, 皆请提出, 我们是很虚心的。)
投稿邮箱: tougao@wxsw.cn (想让大家分享你的学习心得和人生体验吗? 快投稿吧!)
求购邮箱: qiugou@wxsw.cn (什么书适合自己, 在哪能买到? 我们的选书顾问为你量身选择。)

☎ 图书质量监督电话: 010 - 62380997 010 - 58572393 010 - 82378880 (含图书内容咨询)
传真: 010 - 62340468

📠 销售服务短信: 建议咨询短信:
中国移动用户发至 625551001 中国移动用户发至 625556018
中国联通用户发至 725551001 中国联通用户发至 725556018
小灵通用户发至 925551001 小灵通用户发至 925556018

想知道更多的图书信息, 更多的学习资源, 请编辑手机短信“万向思维”发送至 12114;
想知道更多的考试信息, 更多的学习方法, 请编辑相应的手机短信“小学学习方法”“初中学习方法”或“高中学习方法”发送至 12114。

🏠 通信地址: 北京市海淀区王庄路 1 号清华同方科技广场 B 座 11 层万向思维 (邮编 100083)。

最新“万向思维金点子”奖学金获奖名单(2008 年 1 月 10 日)

“创意之星”一等奖

杜 舒(黑龙江肇东) 周佑海(陕西安康)

“创意之星”二等奖

薛 明(安徽宿州) 王辉仁(湖南衡阳) 花 宇(广西北海) 彭明松(湖南洞口)
罗小波(四川江油) 宗大城(吉林辽源) 钟智全(湖北天门) 刘 欢(河南内黄)
慕绪兵(甘肃镇原) 杨静茹(陕西宝鸡) 陈 博(湖北黄石) 蒲艳秋(广西南宁)
熊 睿(江西丰城) 庾 蓉(四川遂宁)

纠错王

胡佳高(湖北孝感) 余剑波(安徽黄山) 董 红(新疆吐鲁番)
王威风(广东化州) 王振鹏(吉林通化)

中华人民共和国北京市海证公证处

公证员

减文瑾

二〇〇八年一月二十九日



教材知识详解

[高中数学必修⑤ 人教 A 版]

JIAO CAI ZHI SHI XIANG JIE

策划设计 北京万向思维基础教育教学研究中心数学教研组

总 主 编 刘增利

学科主编 杨文彬

本册主编 韩廷蕴 李现勇

责任编辑 王俊凤 沈 磊

责任审读 陈兴芬 冯艳红 李小玲

责任校对 晁 鲁 彭凤珠 陈桂荣

责任录排 陈 虹

封面设计 魏 晋

版式设计 廉 赢

出 版
发 行
刷 印
经 销
开 本
印 张
字 数
版 次
印 次
书 号
定 价

北京出版社出版集团
北京教育出版社
北京出版社出版集团
陕西思维印务有限公司
各地书店
890 × 1240 1/32
10
280 千字
2008 年 12 月第 1 版
2008 年 12 月第 1 次印刷
ISBN 978 - 7 - 5303 - 6821 - 3/G · 6739
15.80 元

版权所有 翻印必究

北京

王大绩 语文特级教师

- 北京市陈经纶中学(原单位)
- 享受国务院特殊津贴专家、北京市语文教学研究会常务理事

徐北泰 政治特级教师

- 北京市教育科学研究院(原单位)
- 曾为11年全国高考命题人

孟广恒 历史特级教师

- 北京市教育科学研究院(原单位)
- 全国历史教学专业委员会常务理事、北京市历史教学研究会会长

郭正权 地理特级教师

- 北京市教育科学研究院(原单位)
- 全国地理教学专业委员会理事

河北

潘鸿章 教授

- 河北师范大学化学系(原单位)
- 享受国务院特殊津贴专家、全国化学教学专业委员会常务理事

山西

田秀忠 语文高级教师

- 山西省太原市杏花实验中学
- 语文本体教学改革研究中心理事、全国中语会优秀教师

高培英 地理特级教师

- 山西省教科所(原单位)
- 山西省地理教学专业委员会理事长

辽宁

林淑芬 化学高级教师

- 辽宁思维学会考试研究中心(原单位)
- 中国教育学会考试专业委员会常委、辽宁省招生考试办公室顾问

吉林

毛正文 副教授

- 吉林省教育学院(原单位)
- 全国化学教学专业委员会理事、吉林省中学化学专业委员会副理事长

黑龙江

朱靖 副研究员

- 黑龙江教育学院
- 黑龙江省中学化学教学专业委员会秘书长

江苏

曹惠玲 生物高级教师

- 江苏省教研室(原单位)
- 全国生物学教学专业委员会常务理事

浙江

金鹏 物理特级教师

- 浙江省杭州市教育局教研室
- 浙江省物理学会中学教学委员会主任、浙江省天文学会副理事长

施储 数学高级教师

- 浙江省杭州市教育局教研室
- 浙江省中学数学分会副会长

安徽

章潼生 语文高级教师

- 安徽省合肥市教育局教研室
- 安徽省中学语文教学专业委员会副秘书长

重庆

李开珂 数学高级教师

- 重庆市教科院
- 重庆市中小学数学竞赛委员会办公室主任、重庆市数学会理事

福建

李松华 化学高级教师

- 福建省教育厅普教教研室(原单位)
- 全国化学教学专业委员会理事、福建省化学教学委员会副理事长兼秘书长

江敬润 语文高级教师

- 福建省教育厅普教教研室
- 全国中学语文教学专业委员会副理事长、福建省语文学科学习科学理事会副理事长

河南

陈达仁 语文高级教师

- 河南省基础教育教研室(原单位)
- 河南省中学语文教材审定委员会委员、中语会理事

湖北

胡明道 语文特级教师

- 湖北省武汉市第六中学
- 全国中学语文教育改革课题专家指导委员会主任委员、湖北省中学语文专业委员会学术委员

夏正盛 化学特级教师

- 湖北省教学研究室
- 全国化学教学专业委员会常务理事、湖北省中小学教材审定委员会委员

湖南

杨慧仙 化学高级教师

- 湖南省教科院(原单位)
- 全国化学教学专业委员会常务理事、湖南省中学化学教学研究会理事长

周华楠 数学高级教师

- 湖南省教科院
- 湖南省中学数学教学研究会理事长、湖南省初高中数学毕业会考命题主持人

广西

彭运锋 副研究员

- 广西教育学院
- 广西省中学化学教学专业委员会副理事长、会考办副主任、中小学教材审查委员

邓雅学 语文特级教师

- 广西省南宁市教科所
- 广西省南宁市教育局办公室主任、政策研究室主任

四川

刘志国 数学特级教师

- 四川省教科所(原单位)
- 全国中学数学教学专业委员会学术委员、四川省中学数学教学专业委员会理事长

贵州

龙纪文 副研究员

- 贵州省教科所
- 全国中学语文教学专业委员会理事、贵州省中学语文教学专业委员会副理事长

申莹行 政治特级教师

- 贵州省教科所(原单位)
- 全国中学语文教学专业委员会理事、教育部组织编写的七省市政治课实验教材贵州版主编

云南

李正湛 政治特级教师

- 云南省昆明教育学院(原单位)
- 云南省教育厅师范处全省中小学教师校本培训项目专家

甘肃

周雪 物理高级教师

- 甘肃省教科所
- 中国物理学会理事、甘肃省物理学会常务理事

新疆

王光曾 化学高级教师

- 乌鲁木齐市中心(原单位)
- 新疆中学化学教学专业委员会常务理事、乌鲁木齐化学学会秘书长



王乐君 英语特级教师

原单位：北京市第十五中学
担任北京市英语学科高级教
师评审委员会评审主任；高考命
题研究专家。

王乐君



吴毓全 英语特级教师

所属单位：广东省教育厅教研室
担任中国教育学会外语教学专业委
员会常务理事；曾任湖南省教科所教研
员。

吴毓全



邢凌初 英语特级教师

所属单位：安徽省合肥市教
育局教研室
安徽省教育学会外语教学研
究会副理事长。

邢凌初



郑中和 英语高级教师

所属单位：重庆市教科院
担任重庆市翻译学会理事，重庆市
教育学会外语教学研究会常务理事、学
术委员会主任，全国基础教育研究中心
特聘研究员。

郑中和



卢萍 英语高级教师

所属单位：新疆乌鲁木齐
市教研中心
新疆师范大学实习学员培训
教师，新疆教育学院、乌鲁木
齐市成人教育学院继教学院客座教
师。

卢萍



Paul Mulroney (加) 交际口语培训专家

简介：在加拿大曾参与多年的阅读
推广活动并从事对外口语教学。他来到
中国后曾受聘于多所中学从事英语教学
工作，并在各大城市举办文化交流巡回
讲座，以其广博的学识、幽默的教法深
受广大学生的喜爱。

Paul Mulroney



Vera Vender Zee (美) 外籍教授

简介：曾执教于北京语言大
学。在我国从事包括精读、泛
读、综合英语、听力、会话、翻
译、英美文学等课程在内的教
学，还同时负责学生英语第二课
堂的组织与教学工作。

Vera Vender Zee



Chip Belly (美) 听力、口语培训专家

简介：在我国数家大型语言培训中
心举办大型免费讲座或进行一对一的听
力、口语培训；参与我国多家语言文化
机构组织的英语教学研讨及文化交流活
动；参与编写语言培训教材及录制相关
语音材料。

chip belly

谢 尼 2005年陕西文科状元



北京大学光华管理学院2005级
 星座：白羊座
 个人爱好：音乐（声乐）、电影、读书
 光荣的荆棘路：电子琴过八级
 状元诀：人的全部本领无非是耐心和时间的混合物。

傅必振 2005年江西理科状元



清华大学电子工程系2005级
 星座：巨蟹座
 个人爱好：足球、音乐
 光荣的荆棘路：全国中学生英语能力竞赛三等奖
 状元诀：保持平静的心态，在题海中保持清醒的头脑，不忘总结走过的路。

程相源 2005年黑龙江理科状元



北京大学光华管理学院2005级
 星座：天秤座
 个人爱好：阅读、音乐、绘画、羽毛球
 光荣的荆棘路：全国中学生英语能力竞赛一等奖
 状元诀：超越自我，挑战极限。

任 飞 2005年黑龙江文科状元



北京大学光华管理学院2005级
 星座：天秤座
 个人爱好：读书、看电视、散步
 状元诀：书山有路勤为径，然而勤奋不在于一天学习多长时间，而在于一小时学了多少。

林小杰 2005年山东文科状元



北京大学光华管理学院2005级
 星座：水瓶座
 个人爱好：足球、篮球
 光荣的荆棘路：山东省优秀学生干部
 状元诀：把简单的事做好。

吴 倩 2005年云南文科状元



北京大学光华管理学院2005级
 星座：处女座
 个人爱好：电影、旅游
 状元诀：悟性+方法+习惯=成功

孙田宇 2005年吉林文科状元



北京大学光华管理学院2005级
 星座：水瓶座
 个人爱好：读书、上网、看漫画
 光荣的荆棘路：全国中学生英语能力竞赛一等奖
 状元诀：细节决定成败，认真对待每一天。

冯文婷 2005年海南文科状元



北京大学光华管理学院2005级
 星座：水瓶座
 个人爱好：运动、看NBA、跳舞、听歌
 光荣的荆棘路：英语奥赛海南赛区一等奖和数学联赛一等奖
 状元诀：有独立的思想，要明白自己向哪里走，该怎么走。

林巧璐 2005年港澳台联考状元



北京大学光华管理学院2005级
 星座：巨蟹座
 个人爱好：健身(yoga)、钢琴
 状元诀：踏实+坚持

朱仁杰 2003年上海免试录取生



清华大学机械工程系2003级
 星座：水瓶座
 个人爱好：各种体育运动
 光荣的荆棘路：全国高中物理竞赛一等奖，北京市大学生物理竞赛特等奖，全国高中数学竞赛二等奖；系科协研发部长
 状元诀：良好的心理，出众的发挥。

千里之行



始于足下

高中三年规划

高一(上)盲目激情期,第一次取得领先的机会

高一(下)适应寻求期,学科优势形成的时期

高二(上)定位起飞期,第二次赢得优势的机会

高二(下)稳步发展期,基本确定学习地位时期

高三(上)扎实复习期

高三(下)加速冲刺期

必做的事

善于思考,勇于质疑,博览群书,厚积薄发,兴趣广泛,目标明确,积极乐观面对学习和生活。

学习方略

适应高中要求,养成良好学习习惯,形成特有学习方法,全面升级知识储备,培养综合语言素养。



成功学习计划\深理解阶段



控制台

英语学期目标

期中前进 名 期末前进 名

时间安排

学校安排自习时间

自主安排学习时间

作业 时 阅读 时 训练 时

固定做的事有 机动做的事有

学习辅导

老师 同学

学习资源

教材和笔记 成功学习计划

学习步骤

初步理解阶段:预习·听课·新课温习·作业

深理解阶段:深化温习·强化训练·复习

告诫自己要注意的问题

文件

1. 话题探究 选用与单元主题相关的经典英文诗歌、名家语录和脍炙人口、广为传颂的著名篇章,让你在体验英语语言魅力的同时,激发学习兴趣,开始快乐学习历程。

2. 发散思维 以单元主题为中心的头脑风暴思维,将互动学习发挥到极致,把词句和篇章的学习融为一体,同时集书面表达和口头表达于一身,为英语学习另辟蹊径。

3. 牛津解词 选用最新版牛津词典对单元重点词汇精辟解释,权威的中英释意,实用的短语例句,免除你翻阅词典的烦恼,让学习的过程更轻松。

4. 状元策略 高考状元的学习心得和体会,让你在最短的时间内获取全面提升英语技能的高效方法,成为会学习、会思考、高效率的尖子生。

5. 跟踪练习 采用讲练结合的模式,针对各个部分的特点有针对性的设计科学、合理的训练方式,随学随练,各个击破,让学生夯实基础、提高能力。

6. 满分作文 历年高考书面表达经典范文完全再现,配合全面到位的命题剖析和对文章构架的总体分析,再加上高考名师精髓点评,将为你呈现一个完全不同的英语写作模式。

CONTENTS 目录

第一章 解三角形

A——章节准备

- 一、兴趣情景导引 (1)
- 二、本章内容分析 (2)
- 三、学习方法点拨 (2)

B——章节详解

1.1 正弦定理和余弦定理

1.1.1 正弦定理

- I 知识技能达标版 (3)
 - 一、相关知识链接 (3)
 - 二、教材知识详解 (3)
 - 三、经典基础例题 (5)
 - 四、思维误区点击 (6)
- II 发散创新应用版 (7)
 - 一、基本能力题 (7)
 - 二、综合应用题 (8)
 - 三、课标创新题 (10)
 - 四、高考经典题 (11)
- III 应试必备满分版 (11)
 - A 卷 知识技能巩固 (11)
 - B 卷 思维能力提升 (12)
- 参考答案及点拨 (13)

1.1.2 余弦定理

- I 知识技能达标版 (17)
 - 一、相关知识链接 (17)
 - 二、教材知识详解 (17)
 - 三、经典基础例题 (19)
 - 四、思维误区点击 (20)
- II 发散创新应用版 (21)
 - 一、基本能力题 (21)

- 二、综合应用题 (22)
- 三、课标创新题 (23)
- 四、高考经典题 (23)
- III 应试必备满分版 (24)
 - A 卷 知识技能巩固 (24)
 - B 卷 思维能力提升 (25)
- 参考答案及点拨 (25)

1.2 应用举例

- I 知识技能达标版 (29)
 - 一、相关知识链接 (29)
 - 二、教材知识详解 (30)
 - 三、经典基础例题 (31)
 - 四、思维误区点击 (33)
- II 发散创新应用版 (34)
 - 一、基本能力题 (34)
 - 二、综合应用题 (35)
 - 三、课标创新题 (35)
 - 四、高考经典题 (36)
- III 应试必备满分版 (38)
 - A 卷 知识技能巩固 (38)
 - B 卷 思维能力提升 (39)
- 参考答案及点拨 (40)

C——本章总结

- 一、知识网络回顾 (45)
- 二、重点专题讲解 (46)
- 三、综合方法指导 (50)
- 四、自主探究地带 (52)

D——本章验收

- 本章检测题 (54)
- 参考答案及点拨 (57)

CONTENTS 目录

第二章 数列

A——章节准备

- 一、兴趣情景导引 (62)
- 二、本章内容分析 (63)
- 三、学习方法点拨 (63)

B——章节详解

2.1 数列的概念与简单表示法

- I 知识技能达标版 (64)
 - 一、相关知识链接 (64)
 - 二、教材知识详解 (64)
 - 三、经典基础例题 (65)
 - 四、思维误区点击 (67)
- II 发散创新应用版 (68)
 - 一、基本能力题 (68)
 - 二、综合应用题 (69)
 - 三、课标创新题 (69)
 - 四、高考经典题 (70)
- III 应试必备满分版 (71)
 - A 卷 知识技能巩固 (71)
 - B 卷 思维能力提升 (72)
- 参考答案及点拨 (73)

2.2 等差数列

- I 知识技能达标版 (76)
 - 一、相关知识链接 (76)
 - 二、教材知识详解 (76)
 - 三、经典基础例题 (78)
 - 四、思维误区点击 (79)
- II 发散创新应用版 (80)
 - 一、基本能力题 (80)
 - 二、综合应用题 (81)

- 三、课标创新题 (82)
- 四、高考经典题 (83)
- III 应试必备满分版 (84)
 - A 卷 知识技能巩固 (84)
 - B 卷 思维能力提升 (84)
- 参考答案及点拨 (85)

2.3 等差数列的前 n 项和

- I 知识技能达标版 (89)
 - 一、相关知识链接 (89)
 - 二、教材知识详解 (89)
 - 三、经典基础例题 (90)
 - 四、思维误区点击 (91)
- II 发散创新应用版 (92)
 - 一、基本能力题 (92)
 - 二、综合应用题 (93)
 - 三、课标创新题 (94)
 - 四、高考经典题 (95)
- III 应试必备满分版 (96)
 - A 卷 知识技能巩固 (96)
 - B 卷 思维能力提升 (97)
- 参考答案及点拨 (98)

2.4 等比数列

- I 知识技能达标版 (101)
 - 一、相关知识链接 (101)
 - 二、教材知识详解 (101)
 - 三、经典基础例题 (103)
 - 四、思维误区点击 (105)
- II 发散创新应用版 (105)
 - 一、基本能力题 (105)
 - 二、综合应用题 (105)
 - 三、课标创新题 (106)
 - 四、高考经典题 (107)

CONTENTS 目录

III 应试必备满分版	(108)
A 卷 知识技能巩固	(108)
B 卷 思维能力提升	(109)
参考答案及点拨	(110)

2.5 等比数列的前 n 项和

I 知识技能达标版	(112)
一、相关知识链接	(113)
二、教材知识详解	(113)
三、经典基础例题	(114)
四、思维误区点击	(116)
II 发散创新应用版	(117)
一、基本能力题	(117)
二、综合应用题	(118)
三、课标创新题	(119)
四、高考经典题	(120)
III 应试必备满分版	(121)
A 卷 知识技能巩固	(121)
B 卷 思维能力提升	(122)
参考答案及点拨	(123)

C——本章总结

一、知识网络回顾	(127)
二、重点专题讲解	(127)
三、综合方法指导	(131)
四、自主探究地带	(136)

D——本章验收

本章检测题	(137)
参考答案及点拨	(140)

第三章 不等式

A——章节准备

一、兴趣情景导引	(145)
----------	-------

二、本章内容分析	(146)
三、学习方法点拨	(146)

B——章节详解

3.1 不等关系与不等式

I 知识技能达标版	(147)
一、相关知识链接	(147)
二、教材知识详解	(147)
三、经典基础例题	(150)
四、思维误区点击	(152)
II 发散创新应用版	(154)
一、基本能力题	(154)
二、综合应用题	(154)
三、课标创新题	(155)
四、高考经典题	(156)
III 应试必备满分版	(158)
A 卷 知识技能巩固	(158)
B 卷 思维能力提升	(159)
参考答案及点拨	(160)

3.2 一元二次不等式及其解法

I 知识技能达标版	(164)
一、相关知识链接	(164)
二、教材知识详解	(164)
三、经典基础例题	(167)
四、思维误区点击	(169)
II 发散创新应用版	(171)
一、基本能力题	(171)
二、综合应用题	(172)
三、课标创新题	(174)
四、高考经典题	(176)
III 应试必备满分版	(177)
A 卷 知识技能巩固	(177)
B 卷 思维能力提升	(178)

CONTENTS 目录

参考答案及点拨 (178)

3.3 二元一次不等式(组)与简单的线性规划问题

3.3.1 二元一次不等式(组)与平面区域

I 知识技能达标版 (184)

一、相关知识链接 (184)

二、教材知识详解 (184)

三、经典基础例题 (185)

四、思维误区点击 (187)

II 发散创新应用版 (189)

一、基本能力题 (189)

二、综合应用题 (190)

三、课标创新题 (191)

四、高考经典题 (192)

III 应试必备满分版 (193)

A 卷 知识技能巩固 (193)

B 卷 思维能力提升 (194)

参考答案及点拨 (195)

3.3.2 简单的线性规划问题

I 知识技能达标版 (203)

一、相关知识链接 (203)

二、教材知识详解 (203)

三、经典基础例题 (204)

四、思维误区点击 (206)

II 发散创新应用版 (209)

一、基本能力题 (209)

二、综合应用题 (211)

三、课标创新题 (213)

四、高考经典题 (214)

III 应试必备满分版 (216)

A 卷 知识技能巩固 (216)

B 卷 思维能力提升 (217)

参考答案及点拨 (218)

3.4 基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

I 知识技能达标版 (224)

一、相关知识链接 (225)

二、教材知识详解 (225)

三、经典基础例题 (226)

四、思维误区点击 (228)

II 发散创新应用版 (230)

一、基本能力题 (230)

二、综合应用题 (232)

三、课标创新题 (232)

四、高考经典题 (234)

III 应试必备满分版 (235)

A 卷 知识技能巩固 (235)

B 卷 思维能力提升 (236)

参考答案及点拨 (237)

C——本章总结

一、知识网络回顾 (243)

二、重点专题讲解 (243)

三、综合方法指导 (248)

四、自主探究地带 (252)

D——本章验收

本章检测题 (254)

参考答案及点拨 (256)

学段测试 (264)

参考答案及点拨 (266)

附录一 数学思想方法 (271)

附录二 课后习题参考答案

..... (276)

第一章 解三角形

博学之,审问之,慎思之,明辨之,笃行之.

——《礼记》

A 章节准备

一、兴趣情景导引

三角学的英文名称为 Trigonometry, 约定名于公元 1600 年, 实际起源于希腊文 trigono (三角) 和 metrein (测量), 其原义为三角形测量(解法), 以研究平面三角形和球面三角形的边和角的关系为基础, 达到测量上的应用为目的的一门学科. 早期的三角学是天文学的一部份, 后来研究范围逐渐扩大, 变成以三角函数为主要对象的学科. 现在, 三角学的研究范围已不仅限于三角形, 且为数理分析的基础, 是研究实用科学所必需之工具.

(一) 三角学在西方的发展

三角学 (Trigonometry) 创始于公元前约 150 年, 早在公元前 300 年, 古代埃及人已有了-定的三角学知识, 主要用于测量. 公元前 600 年左右, 古希腊学者泰勒斯利用相似三角形的原理测出金字塔的高, 成为西方三角测量的肇始. 公元前 2 世纪后希腊天文学家希帕霍斯 (Hipparchus of Nicaea) 为了天文观测的需要, 作了一个和现在三角函数表相仿的“弦表”, 即在固定的圆内, 不同圆心角所对弦长的表, 他成为西方三角学的最早奠基者, 这个成就使他赢得了“三角学之父”的称谓.

公元 2 世纪, 希腊天文学家、数学家托勒密 (Ptolemy) 继承希帕霍斯的成就, 著成《天文学大成》13 卷, 被认为是西方第一本系统论述三角学理论的著作. 约同时代的梅内劳斯 (Menelaus) 写了一本专门论述球三角学的著作《球面学》, 内容包括球面三角形的基本概念和许多平面三角形定理在球面上的推广, 以及球面三角形许多独特性质. 他的工作使希腊三角学达到全盛时期.

(二) 三角学在中国的发展

我国古代没有出现角的函数概念, 只用勾股定理解决了一些三角学范围内的实际问题. 据《周髀算经》记载, 约与泰勒斯同时代的陈子已利用勾股定理测量太阳的高度, 其方法后来称为“重差术”. 1631 年西方三角学首次传入我国, 以德国传教士邓玉函、汤若望和我国学者徐光启合编的《大测》为代表. 同年徐光启等人还编写了《测量全义》, 其中有平面三角和球面三角的论述. 1653 年薛凤祚与波兰传教士穆尼阁合编《三角算法》, 以“三角”取代“大测”, 确立了“三角”名称, 1877 年华蘅煦等人对三角级数展开式等问题有过独立的探讨.

现代的三角学主要研究角的特殊函数及其在科学技术中的应用, 如几何计算等, 多发展于 20 世纪中.

二、本章内容分析

本章由正弦定理和余弦定理以及正、余弦定理的应用两部分组成.教材首先由我们所熟悉的直角三角形中的边角关系得出正弦定理的形式: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 然后引导大家按不同的情况尝试证明正弦定理;由在三角形中,已知两边及夹角,如何求第三边,引出余弦定理: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A$, $b^2 = c^2 + a^2 - 2cacos B$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos C$.

本章是在前面学习过的三角形、三角函数和解直角三角形等知识的基础上,通过对任意三角形的边角关系的研究,发现并掌握三角形中的边长与角度之间的数量关系(即正、余弦定理),运用它们解决一些与测量和几何计算有关的实际问题.

本章的重点是掌握正弦定理、余弦定理,能运用它们解决有关三角形的问题和解决一些简单的实际问题;难点是在解三角形时,如何选择定理,寻找简捷的解法.在运用正弦定理时,如何判断解的个数,另外,要提高数学建模能力,将实际问题抽象为解三角形的模型也是本章的一个难点.

三、学习方法点拨

1. 要善于联系实际,结合教科书开头所提供的实际问题,充分感受现实世界中存在的三角形问题,从中体会数学源于生活的真谛,把实际问题转化为数学问题,建立数学模型并解决它.

2. 应用正弦定理解出一个角的正弦值,得出对应两个解,要根据条件合理取舍,注意解三角形的角度问题时的隐含条件:内角度数应在区间 $(0^\circ, 180^\circ)$ 内;应用余弦定理,由于公式较复杂,要细心运算.

3. 解题中还要用到数形结合思想和函数与方程的思想,在解三角形的实际问题中,获得综合运用解三角形的知识和方法解决实际问题的经验,培养创新意识、由特殊到一般的学习方法,类比推理,掌握推导过程.

1.1 正弦定理和余弦定理

1.1.1 正弦定理

I 知识技能达标版

学习目标	1. 掌握正弦定理及其证明, 会初步运用正弦定理理解斜三角形, 培养数学应用意识
	2. 要认真体会由特殊到一般的循序渐进的数学思维过程, 学会多角度、多层次、全面思考问题的数学思维模式, 领悟数形结合思想及分类讨论思想在解三角形中的应用

一、相关知识链接

1. 在初中, 我们已学习了直角三角形中各边之间的关系及勾股定理的内容;
2. 物理学中解力的合成和分解的过程, 物理学中有关测量问题及地理学中的方向角知识.

二、教材知识详解

【知识点 1】正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

即在一个三角形中, 各边和它所对角的正弦的比相等.

正弦定理的结构特点: 分式连等形式, 各边对应各角, 分子均为边长, 分母均为角的正弦值, 正弦定理对任意三角形都成立. 定理体现了三角形中三条边与三个内角之间的密切联系, 是边和角的和谐统一.

正弦定理的推广形式: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径).

该形式体现了 $\triangle ABC$ 的边长和角与外接圆的密切关系, 知道比值, 可以求外接圆的半径, 另外知道外接圆的半径, 可以求出比值.

正弦定理可有如下变式:

$$a \sin B = b \sin A, a \sin C = c \sin A, b \sin C = c \sin B;$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C};$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}, \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}, \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A};$$

$$a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C;$$

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R};$$

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c.$$

注意:正弦定理指出了任意三角形中三条边与其对应角的正弦值之间的一个关系,它很好地描述了任意三角形中边与角的一种数量关系.

【知识点2】利用正弦定理解三角形

利用正弦定理可以解决以下两类有关三角形的问题:

(1) 已知两角和任一边,求其他两边和一角;

(2) 已知两边和其中一边的对角,求另一边的对角,从而进一步求出其他的边和角.

对于第(1)类,其解是唯一确定的,一般先由三角形内角和为 180° 求得第三个角,再利用正弦定理求其余两边;

对于第(2)类,其解不一定唯一,由于三角形的形状不能唯一确定,会出现两解、一解和无解三种情况.如图 1-1-1 和图 1-1-2.

一般地,已知两边和其中一边的对角解三角形,有两解、一解、无解三种情况.

(1) 当 A 为锐角时:

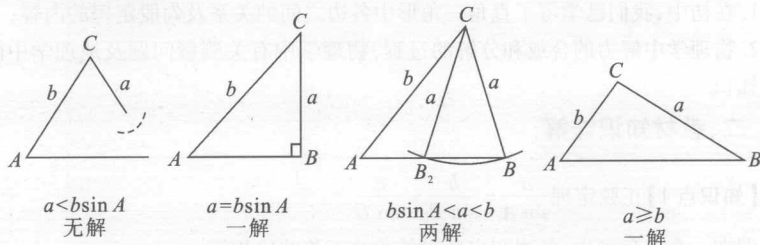


图 1-1-1

(2) 当 A 为直角或钝角时:

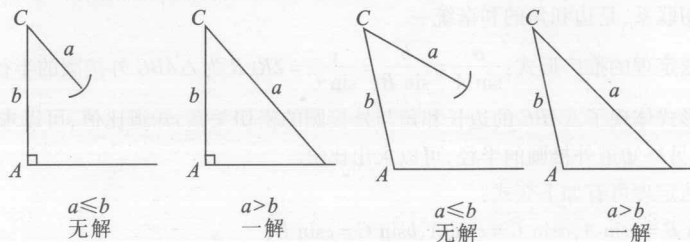


图 1-1-2

注意:出现解不确定是由于已知两边和其中一边的对角不能唯一确定三角形的形状,故解这类三角形问题时应分情况予以讨论.

【知识点3】三角形面积公式

在 $\triangle ABC$ 中,边 a, b, c 的对角分别为 A, B, C , 则有 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A$

$= \frac{1}{2} \text{casin } B$. 证明如下:

如图 1-1-3, 在 $\triangle ABC$ 中, 边 a, b, c 上的高分别为 h_a, h_b, h_c , 则 $h_a = b \sin C, h_b = c \sin A, h_c = a \sin B$, 根据 $\triangle ABC$ 的面积公式 $S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c$, 得 $S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B$. (其面积公式在直角三角形和钝角三角形中的

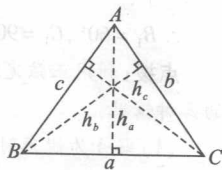


图 1-1-3

证明方法同上, 学生可自己验证)

三、经典基础例题

【例 1】已知下列各三角形中的两边及其一边的对角, 判断三角形是否有解? 有解的作出解答.

(1) $a = 7, b = 8, A = 105^\circ$; (2) $a = 10, b = 20, A = 80^\circ$;

(3) $b = 10, c = 5\sqrt{6}, C = 60^\circ$; (4) $a = 2\sqrt{3}, b = 6, A = 30^\circ$.

分析: 利用正弦定理解题, 注意大边对大角以及对解的个数的讨论, 防止多解或漏解.

解: (1) $a = 7, b = 8, a < b, A = 105^\circ > 90^\circ$, 所以本题无解.

(2) $a = 10, b = 20, a < b, A = 80^\circ < 90^\circ$,

讨论如下:

$$\therefore b \sin A = 20 \sin 80^\circ > 20 \sin 60^\circ = 10\sqrt{3},$$

$\therefore a < b \sin A, \therefore$ 本题无解.

(3) $b = 10, c = 5\sqrt{6}, b < c, C = 60^\circ < 90^\circ, \therefore$ 本题有一解.

$$\therefore \sin B = \frac{b \sin C}{c} = \frac{10 \sin 60^\circ}{5\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore B = 45^\circ, A = 180^\circ - (B + C) = 75^\circ,$$

$$\therefore a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{10 \sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{10 \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 5(\sqrt{3} + 1).$$

(4) $a = 2\sqrt{3}, b = 6, a < b, A = 30^\circ < 90^\circ$.

又 $\therefore b \sin A = 6 \sin 30^\circ = 3, a > b \sin A, \therefore$ 本题有两解.

$$\text{由正弦定理, 得 } \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{6 \sin 30^\circ}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore B = 60^\circ$ 或 $B = 120^\circ$. 令 $B_1 = 60^\circ, B_2 = 120^\circ$.

$$\text{当 } B_1 = 60^\circ \text{ 时, } C_1 = 90^\circ, \therefore c_1 = \frac{a \sin C_1}{\sin A} = \frac{2\sqrt{3} \sin 90^\circ}{\sin 30^\circ} = 4\sqrt{3}.$$