新世纪高职机电类教学改革规划教材

工程应用数学

（下册）

万金保 主 编
舒虹 王文智 副主编

GONGCHENG YINGYONG SHUXUE

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

新世纪高职机电类教学改革规划教材

工程应用数学

（下 册）

主　编　万金保
副主编　舒　虹　王文智
参　编　刘中瑞　贺　萍　康晓红
　　　　周旭光　董铸荣　夏毓鹏

机械工业出版社

本套书是教育部“21世纪高职高专教育机械基础课程教学内容体系改革与实践”和广东省高教厅“高职高专教育机电类专业教学内容体系改革与实践”研究项目的试点教材之一，是通过教学实践探索及在国内外高职高专教育教学内容体系研究基础上完成的。

本套书以高等数学和理论力学为主线，适当介绍了线性代数、矢量代数、微分方程、振动理论及流动力学等相关内容。本套书形成了以培养综合工程技术应用能力为目标的理论教学内容体系，适应了当前教学改革的需要。本套书分为上、下两册，共3篇。本书为下册，包括第3篇高等微积分与动力学，内容有多元微积分、动力学基础、常微分方程、单自由度线性系统及液体流体力学基础等。本套书参考学时为140学时。其中，上册为90学时，下册为50学时。

本套书可作为高职高专及成人高校机电类专业数学和工程力学相关内容的教学用书，也可作为有关工程技术人员参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

工程应用数学．下册/万金保主编．—北京：机械工业出版社，2004.7

新世纪高职机电类教学改革规划教材

ISBN 7-111-14412-0

Ⅰ.工… Ⅱ.万… Ⅲ.工程数学－高等学校：技术学校－教材 Ⅳ.TB11

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第040362号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
责任编辑：贡克勤 宋学敏 版式设计：霍永明 责任校对：李秋荣
封面设计：张 静 责任印制：李 妍
北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2004年7月第1版第1次印刷
1000mm×1400mm B5·4.375印张·169千字
定价：13.00元

前　言

本书是作者在承担教育部“21世纪高职高专教育机械基础课程教学内容体系改革与实践”和广东省高教厅“高职高专教育机电类专业教学内容体系改革与实践”项目研究的基础上，结合编者多年从事教学、科研开发与生产实践的经验编写的。

高职高专专业设置岗位针对性强，要求有较强的实践能力和解决生产、建设、管理、服务一线问题的综合能力。这种特点使得高等职业技术教育的理论课时大为减少，导致目前高职院校的学生不是基础理论学得太少，就是基础理论学得“夹生”，甚至成为公式、定理的记忆机器，难以在解决实际问题中发挥作用。如何在基础理论“适度、够用”的原则下，重构课程内容体系，是高职教育面临的重大课题。

《机械基础》课程涉及内容较广，且无明确的界定。但是在实践中，涉及机械基础的理论、概念、方法却是广泛的。为了满足高职教育特点、适合机电类不同专业的需要，“机械基础课程教学内容体系”已超越了传统的《机械基础》课程的基本内容体系，而是由本教材和《实用机械设计基础》、《机械应用基础》教材来实现。《工程应用数学》主要以高等数学和理论力学为基本内容，同时还包括了线性代数、矢量代数、常微分方程、振动理论及流体力学等内容，形成了相关理论内容的关联应用体系，以增加学生的学习兴趣和对理论内容的灵活掌握。《实用机械设计基础》以机械设计、材料力学为基本内容，包括机械系统涉及的材料、液压与电机驱动、动力平衡等，形成了对机械系统进行分析、构建与应用的综合应用体系，以增强学生对机械系统的分析与构建的实践应用能力。《机械应用基础》则以机械基础为基本内容，包括常用机械（构）的原理、结构、使用、维护中所涉及的机构、零件、材料、公差配合、驱动、平衡及效率等内容，形成对机械系统进行使用与维护的综合应用体系，以增强学生对机械系统认识、使用与维护的实际综合应用能力。

《工程应用数学》将高等数学和理论力学有机地结合在一起，将高等数学、理论力学、机械设计相关内容进行合理编排，让学生在相对较少的学时内学到的更多、学得更好、用得更活是编者的心愿。

《工程应用数学》是“机械基础课程教学内容体系”改革的一部分。对高职高专机电类专业的学生，主要以上册内容为主，下册内容可根据专业进行选取。《工程应用数学》教学内容的选取，应根据专业要求，结合后续的《实用机械设计基础》或《机械应用基础》教学内容综合考虑，以真正实现高职高专教育面向实际、面向岗位、面向应用的目的。

参加本书编写的有：刘中瑞（第1、2、9章），贺萍（第3、4章），舒虹（第5、6章），万金保（第7、8章），康晓红（第10章），周旭光（第11章），王文智（第12章），董铸荣（第13章），夏毓鹏（第14章）。全书由万金保负责统稿。

由于编者水平有限，缺点、错误及不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正，并提出宝贵的意见和建议。

文中带“*”号的为选学内容。

编　者

目录

第3篇　高等微积分与动力学

第10章　多元微积分

工程技术等应用问题中，往往牵涉到多方面的因素，反映在数学上就是因变量依赖于多个自变量的函数——多元函数。本章主要内容为多元函数微分学、二重积分、曲线积分及曲面积分等。

10.1　多元函数与偏导数

10.1.1　多元函数的概念

引例 1　如图 10-1 所示，三角形的面积 S 和它的底边长 b 以及底边上的高 h 之间有关系式

$$S=\frac{1}{2}bh$$

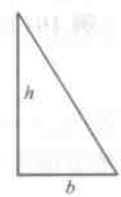

图　10-1

式中，S、b、h 是变量，面积 S 随着变量 b、h 的变化而变化。当变量 b、h 在一定范围($b>0,h>0$)内取定一对值 b_0、h_0 时，面积 S 就相应地随之确定。

因此说，S 是 b 和 h 的二元函数。b、h 的变化范围($b>0$，$h>0$)为该函数的定义域。

引例 2　圆柱体的体积 V 和它的底半径 r，高 h 之间具有关系式

$$V=\pi r^2h$$

式中，当变量 r、h 在一定范围($r>0,h>0$)内取定一对数值 r_0、h_0 时，V 的对应值就随之确定。V 是 r、h 的二元函数。

引例 3　一根截面为矩形的梁，其抗弯截面系数 W 与截面的高 h 及宽 b 之间的关系为

$$W=\frac{1}{6}bh^2$$

当变量 b、h 在一定范围($b>0,h>0$)内取定一对数值 b_0、h_0 时，W 的对应值就随之确定。W 是 b、h 的二元函数。

从上述例子看到，三角形面积、圆柱体的体积、矩形梁的抗弯截面系数都取决

于两个变化的量。为此引入下述定义。

定义 10-1 设有三个变量 x、y 及 z。如果当变量 x 和 y 在一定变化范围取定一对数值时，如果变量 z 按照一定的法则 f 总有确定的数值与它们对应，则称 z 是 x、y 的二元函数，记为 $z=f(x,y)$。其中 x、y 称为自变量，z 称为因变量。自变量 x、y 的取值范围称为函数的定义域。

二元函数在 $x=x_0, y=y_0$ 处取得的函数值记为

$$z\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}, z\Big|_{(x_0,y_0)}, \text{ 或 } f(x_0,y_0)$$

例 10-1 设 $z=\sin xy-\sqrt{1+y^2}$，求 $z\Big|_{(\frac{\pi}{2},1)}$。

解 $$z\Big|_{(\frac{\pi}{2},1)}=\sin\frac{\pi}{2}-\sqrt{1+1^2}=1-\sqrt{2}$$

10.1.2 二元函数的定义域

二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域比较复杂，可以是整个 xOy 平面，也可以是坐标平面的一部分，通常由一些曲线围成，可用图形或不等式来表示。

求一个给定函数的定义域，就是要给出使函数表达式有意义的所有自变量的取值范围。

例 10-2 求下列函数的定义域，并画出图形。

1) $z=\arcsin\left|\dfrac{x}{2}\right|+\arcsin\left|\dfrac{y}{3}\right|$；

2) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$。

解 1) 因为 $\left|\dfrac{x}{2}\right|\leqslant 1$，$\left|\dfrac{y}{3}\right|\leqslant 1$

所以 $\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\ -3\leqslant y\leqslant 3\end{cases}$。定义域为一矩形(如图 10-2)。

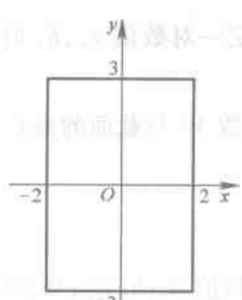

图 10-2

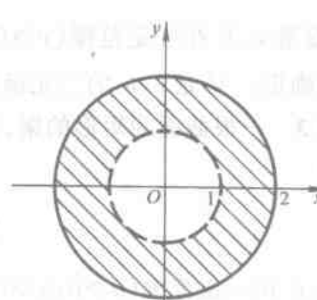

图 10-3

2) 因为$\begin{cases}4-x^2-y^2\geqslant 0\\ x^2+y^2-1>0\end{cases}$所以$1<x^2+y^2\leqslant 4$。

定义域为一环形区域(如图10-3)。

10.1.3 二元函数的几何意义

已经知道,一元函数的图形一般是一条平面曲线。对于二元函数 $z=f(x,y)$,当其自变量(x,y)在其定义域 D 内变化时,其对应的函数值 z 与自变量 x,y 一起构成空间内一动点(x,y,z),其轨迹形成一张曲面 Σ,称之为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形(如图10-4)。

定义域 D 就是曲面 Σ 在 xOy 平面的投影。

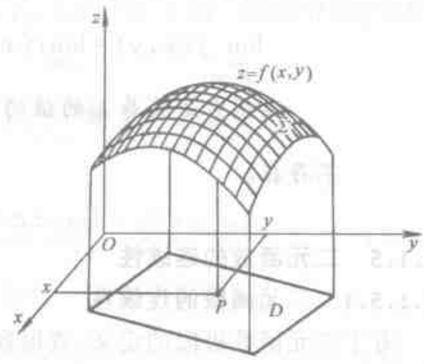

图 10-4

10.1.4 二元函数的极限

与一元函数极限的情况类似,对于二元函数 $z=f(x,y)$,需要考察当自变量 x,y 无限趋近于某定点(x_0,y_0)时,对应的函数值的变化趋势,这就是二元函数的极限问题。

定义 10-2 设函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$附近有定义[(x_0,y_0)可除外],当点 $P(x,y)$无限接近 $P_0(x_0,y_0)$时,对应的函数值无限接近某个确定的常数 A,就说 A 是函数 $z=f(x,y)$当 $x\to x_0,y\to y_0$ 时的极限,记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \tag{10-1}$$

例 10-3 求极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$。

解 令 $u=x^2+y^2$,因为 $x\to 0,y\to 0$ 时,$u\to 0$,所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$$

本例表明,二元函数的极限问题有时可先转化为一元函数的极限问题,再求解。

例 10-4 考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x^2+y^2\neq 0)\\ 0 & (x^2+y^2=0)\end{cases}$$

当$(x,y)\to(0,0)$时的极限是否存在。

解　当点(x,y)沿x轴趋向于原点,有

$$\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0} 0=0$$

当点(x,y)沿y轴趋向于原点时,有

$$\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0} 0=0$$

但是,当点(x,y)沿着直线$y=kx(k\neq 0)$趋向于原点时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,kx)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

显然它是随着k的值的不同而改变的,故极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$不存在。

10.1.5　二元函数的连续性

10.1.5.1　二元函数的连续性

有了二元函数极限的定义,就很容易给出二元函数连续的定义。

定义 10-3　设函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$附近有定义,如果当点$P(x,y)$趋向于点$P_0(x_0,y_0)$时,函数$z=f(x,y)$的极限存在,且等于它在点P_0处的函数值。即

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0) \tag{10-2}$$

则称函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处连续。

粗略地讲,连续就是当自变量变化很小时,函数值的变化也很小。

如果函数$z=f(x,y)$在区域D内各点都连续,则称函数$z=f(x,y)$在区域D内连续。

10.1.5.2　有界闭区域上连续函数的性质

与闭区间上一元连续函数的性质相类似,在有界闭区域上连续的二元函数有如下性质:

(1)最大值、最小值定理　在有界闭区域上连续的二元函数在该区域上一定能取到最大值和最小值。

(2)介值定理　在有界闭区域上连续的二元函数能取得介于它的两个不同函数值之间的任何值至少一次。

以上的讨论可以推广到三元及三元以上的函数。

10.1.6　偏导数

10.1.6.1　偏导数的定义

定义 10-4　设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的附近有定义,当y固定在y_0而

x 在 x_0 处有增量 Δx 时,相应地函数有增量

$$f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)$$

如果

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的一阶偏导数(简称偏导数),记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \left.z'_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \text{或 } f'_x(x_0,y_0)$$

即

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x} \tag{10-3a}$$

类似地,函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数定义为

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y} \tag{10-3b}$$

记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \left.z'_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \text{或 } f'_y(x_0,y_0)$$

如果 $f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在,那么这个偏导数是 x,y 的函数,此函数称为函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的偏导函数,记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ z'_x \text{或} f'_x(x,y)$$

类似地,可以定义函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导函数,记作

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ z'_y \text{或} f'_y(x,y)$$

在不致混淆的情况下,偏导函数也称偏导数。

与高阶导数类似,对二元及多元函数也有类似的二阶及高阶偏导数。如

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},\ \text{或 } z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy}, z''_{yx}$$

通常情况下,二阶偏导数连续,$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$,即求导次序可交换。

10.1.6.2 偏导数的求法

由偏导数的定义可以看出,对某一个变量求偏导,就是将其余变量看作常数,而对该变量求导。所以,求函数的偏导数不需要建立新的运算方法。

例 10-5 求函数 $z=x^2-3xy+2y^3$ 在点 $(2,1)$ 处的两个偏导数。

解 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=2x-3y$,$\frac{\partial z}{\partial y}=-3x+6y^2$

所以

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=2\times2-3\times1=1\ ,\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=-3\times2+6\times1=0$$

例 10-6 求 $z=x^2\sin 2y$ 的一阶和二阶偏导数。

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin 2y\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y}=2x^2\cos 2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\sin 2y\ ,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-4x^2\sin 2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2x\sin 2y)=4x\cos 2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(2x^2\cos 2y)=4x\cos 2y$$

例 10-7 设 $z=x^y(x>0)$,求证

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=2z$$

证明 因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}\ ,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$

将它们代入等式左边,得

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}yx^{y-1}+\frac{1}{\ln x}x^y\ln x=x^y+x^y=2z$$

所以 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\ln x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$

10.1.7 全微分

一元函数 $y=f(x)$ 的微分 dy 是估计函数增量 Δy 的数学模型。类似地,关于二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的增量 Δz 的估计,也有类似的数学模型。

定义 10-5 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

可表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

式中,A、B 与 Δx、Δy 无关;$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$;则称

$$A\Delta x+B\Delta y$$

为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分,记作 dz,即

$$dz=A\Delta x+B\Delta y \tag{10-4}$$

定理 10-1 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微,则函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续。

【证略】

定理 10-2 （可微的必要条件） 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在，而且

$$A=\frac{\partial z}{\partial x}\ ,\ B=\frac{\partial z}{\partial y}$$

即 $$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

【证略】

像一元函数一样，规定 $\Delta x=dx,\Delta y=dy$，则

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{10-5}$$

定理 10-3 设 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，则存在某一函数 $u(x,y)$，使得

$$du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy \tag{10-6}$$

的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{10-7}$$

例 10-8 计算函数 $z=x^2y+y^2$ 的全微分。

解 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy$ ， $\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$

所以 $dz=2xydx+(x^2+2y)dy$

例 10-9 计算函数 $z=e^{xy}$ 在点 $(2,1)$ 处的全微分。

解 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}$ ， $\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=e^2\ ,\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=2e^2$$

所以 $dz=e^2dx+2e^2dy$

10.1.8 偏导数的应用

10.1.8.1 极大值与极小值

在实际问题中，往往会遇到多元函数的最大值、最小值问题。与一元函数相类似，多元函数的最大值、最小值与极大值、极小值有密切联系。下面以二元函数为例，先来讨论多元函数的极值问题。

定义 10-6 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内有定义，对于该邻域内异于 (x_0,y_0) 的点 (x,y) 都有

$$f(x,y)<f(x_0,y_0)\ (\text{或 } f(x,y)>f(x_0,y_0)) \tag{10-8}$$

则称 $f(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的**极大值(或极小值)**。

极大值、极小值统称为**极值**。使函数取得极值的点称为极值点。

例 10-10　证明函数 $z=3x^2+4y^2$ 在点(0,0)处有极小值。

证明　因为对于点(0,0)的任一邻域内异于(0,0)的点，函数值都为正，而在点(0,0)处的函数值为零。从几何上看，点(0,0)是开口朝上的椭圆抛物面 $z=3x^2+4y^2$ 的顶点，因此必是极小值点。

例 10-11　证明函数 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 在点(0,0)处有极大值。

证明　因为在点(0,0)处函数值为零，而对于点(0,0)的任一邻域内异于(0,0)的点，函数值都为负。点(0,0,0)是位于 xOy 平面下方的锥面 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 的顶点，因此必是极大值点。

二元函数的极值问题，一般可以利用偏导数来解决。

定理 10-4(必要条件)　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 具有偏导数，且在点 (x_0,y_0) 处有极值，则它在该点的偏导数必然为零，即

$$f'_x(x_0,y_0)=0\ ,\ f'_y(x_0,y_0)=0 \tag{10-9}$$

证　不妨设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处有极大值。根据极大值的定义，则在点 (x_0,y_0) 的某邻域内异于 (x_0,y_0) 的点 (x,y) 都适合不等式

$$f(x,y)<f(x_0,y_0)$$

特殊地，在邻域内取 $y=y_0,x\neq x_0$ 的点，也应适合不等式

$$f(x,y_0)<f(x_0,y_0)$$

这表明一元函数 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值，因而必有

$$f'_x(x_0,y_0)=0$$

类似地可证

$$f'_y(x_0,y_0)=0$$

仿照一元函数，凡是能使 $f'_x(x_0,y_0)=0$，$f'_y(x_0,y_0)=0$ 同时成立的点 (x_0,y_0) 称为函数 $z=f(x,y)$ 的驻点，驻点不一定是极值点。

定理 10-5(充分条件)　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，又 $f'_x(x_0,y_0)=0$，$f'_y(x_0,y_0)=0$，令

$$f''_{xx}(x_0,y_0)=A\ ,\ f''_{xy}(x_0,y_0)=B\ ,\ f''_{yy}(x_0,y_0)=C$$

则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处是否取得极值的条件如下：

1) $AC-B^2>0$ 时具有极值，且当 $A<0$ 时有极大值，当 $A>0$ 时有极小值；

2) $AC-B^2<0$ 时没有极值；

3）$AC-B^2=0$ 时可能有极值,也可能没有极值,还需另作讨论。

【证略】

利用定理10-4、10-5,求具有二阶连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$ 的极值的步骤为:

1）解方程组

$$f'_x(x,y)=0\ ,\ f'_y(x,y)=0$$

求得一切实数解,即可求得一切驻点。

2）对于每一个驻点(x_0,y_0),求其二阶偏导数的值 A、B 和 C。

3）确定 $AC-B^2$ 的符号,按定理10-5的结论判定 $f(x_0,y_0)$是否是极值、是极大值还是极小值。

例10-12　求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值。

解　先解方程组

$$\begin{cases}f'_x(x,y)=3x^2+6x-9=0\\ f'_y(x,y)=-3y^2+6y=0\end{cases}$$

求得驻点为(1,0)、(1,2)、(-3,0)、(-3,2)。

再求出二阶偏导数

$A=f''_{xx}(x,y)=6x+6, B=f''_{xy}(x,y)=0, C=f''_{yy}(x,y)$
$=-6y+6$

在点(1,0)处,$AC-B^2=12\times6>0$,又 $A>0$,所以函数在(1,0)处有极小值 $f(1,0)=-5$;

在点(1,2)处,$AC-B^2=12\times(-6)<0$,所以 $f(1,2)$不是极值;

在点(-3,0)处,$AC-B^2=-12\times6<0$,所以 $f(-3,0)$不是极值;

在点(-3,2)处,$AC-B^2=-12\times(-6)>0$,又 $A<0$,所以函数在(-3,2)处有极大值 $f(-3,2)=31$。

与一元函数类似,二元可微函数的极值点一定是驻点,但对有些函数来说,极值点不一定是驻点。例如,点(0,0)是函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$的极小值点,但点(0,0)并不是驻点,因为函数在该点偏导数不存在。因此,二元函数的极值点可能是驻点,也可能是偏导数中至少有一个不存在的点。

10.1.8.2　最大值与最小值

在有界闭区域 D 上的连续函数一定有最大值和最小值。如果使函数取得最大值或最小值的点在区域 D 的内部,则这个点必然是函数的驻点,或者是一阶偏导数中至少有一个不存在的点。然而,函数的最大值和最小值也可能在该区域的

边界上取得。因此，求有界闭区域 D 上二元函数的最大值和最小值时，首先要求出函数在 D 内的驻点、一阶偏导数不存在的点处的函数值及该函数在 D 的边界上的最大值、最小值。比较这些值，其中最大值，就是该函数在闭区域 D 上的最大值，最小值就是函数在闭区域 D 上的最小值。

求二元函数在区域上的最大值和最小值，往往比较复杂。但是，如果根据问题的实际意义，知道函数在区域 D 内存在最大值(或最小值)，又知函数在 D 内可微，且只有惟一的驻点，则该点处的函数值就是所求的最大值(或最小值)。

例 10-13 要制造一个无盖的长方体水槽，已知它的底部造价为 18 元/m^2，侧面造价均为 6 元/m^2，设计的总造价为 216 元，问如何选取它的尺寸，才能使水槽容积最大？

解 设水槽的长、宽、高分别为 x、y、z，则容积为 $V=xyz(x>0,y>0,z>0)$。

由题意知
$$18xy+6(2xz+2yz)=216$$
即
$$3xy+2z(x+y)=36$$
解出 z，得
$$z=\frac{36-3xy}{2(x+y)}=\frac{3}{2}\,\frac{12-xy}{x+y}$$
将上式代入 $V=xyz$ 中，得二元函数
$$V=\frac{3}{2}\,\frac{12xy-x^2y^2}{x+y}$$
求 V 对 x、y 的偏导数
$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{3}{2}\,\frac{(12y-2xy^2)(x+y)-(12xy-x^2y^2)}{(x+y)^2}$$
$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{3}{2}\,\frac{(12y-2x^2y)(x+y)-(12xy-x^2y^2)}{(x+y)^2}$$
令 $\frac{\partial V}{\partial x}=0$、$\frac{\partial V}{\partial y}=0$，得方程组
$$\begin{cases}(12y-2xy^2)(x+y)-(12xy-x^2y^2)=0\\(12x-2x^2y)(x+y)-(12xy-x^2y^2)=0\end{cases}$$
解之，得 $x=2,y=2,z=3$。

由问题的实际意义得知，函数确有最大值，又只有一个驻点，所以取长为 2m，宽为 2m，高为 3m 时，水槽的容积最大。

10.1.8.3 条件极值 拉格朗日乘数法

上面所讨论的极值问题，对于函数的自变量，除了限制在函数的定义域内以外，并无其他条件，所以有时候称为**无条件极值**。但在实际问题中，有时会遇到对函数的自变量还有附加条件的极值问题。例如，求表面积为 a^2 而体积为最大的