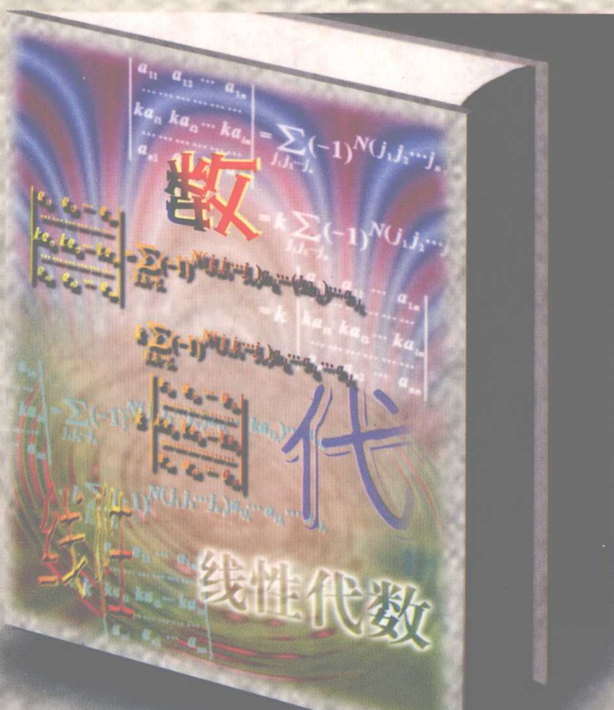
教育部、国家民委规划教材

经济数学
线性代数

张　群　主编



广西民族出版社

经济数学
线性代数

教育部、国家民委规划教材

经济数学

线性代数

主　编　张　群
副主编　余启港　于纯海
　　　　孙　蓉　包峰山

广西民族出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学.线性代数/张群主编.—南宁:广西民族出版社,2000.6
教育部、国家民委规划教材
ISBN 7-5363-3677-2

Ⅰ.经…Ⅱ.张…Ⅲ.线性代数-高等学校-教材Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 29157 号

教育部、国家民委规划教材

经济数学

Xianxing Daishu

线 性 代 数

张 群 主编

责任编辑 韦启福
封面策划 张文馨
封面设计 吴左平
技术设计 蓝剑风
出版发行 广西民族出版社
印　　刷 广西区计委印刷厂印刷
开　　本 850×1168 1/32
印　　张 10.375
字　　数 245千
版　　次 2002年7月第2版
印　　次 2002年7月第2次印刷
印　　数 5001—11000册

ISBN 7-5363-3677-2/G·1260 定价:16.00元

前　言

本系列教材是国家民委和国家教育部在"九五"期间依据我国民族高等院校的教学需要而组织编写的.

民族高等院校是我国高等教育学校体系中的重要组成部分,由民族学院(大学)和民族地区高等院校两类学校组成.目前我国共设置有 12 所民族学院(大学),在五个自治区及其它民族自治地方设置有普通高等院校 90 余所,其总数约占全国普通高等院校总数的 10%.这些院校大部分地处民族地区,直接为我国的少数民族和民族地区服务,具有鲜明的特色.

教材建设是高等院校各项建设中的一项基础性工作,直接关系到高等院校的办学特色和人才培养质量.为了面向 21 世纪进行教学内容和课程体系改革,更好地体现民族高等院校课程设置和教学内容的特点,国家民委和国家教育部采取积极措施,有重点地加强了适用于民族高等院校教学需要的非民族类教材建设,即在公共课和专业基础课范围内,有选择地编写一批能够突出民族高等院校办学特色,适应少数民族学生的知识基础和学习特点,对提高学校教学质量起重要作用,并能够使大多数院校共同受益、适应面宽、质量较高的系列教材.

本系列教材力图较好地处理教材内容的低起点与高要求的关系;较好地处理教学内容与各民族学生文化背景的关系;较好地处理教学内容的改革与精益求精、多出精品的关系;较好地处理客观反映学科最新研究成果与循序渐进因材施教的关系等.在这些方面,本系列教材进行了有益的探讨与尝试.

为了能够使本系列教材达到预想效果,有关部门进行了积极工作:1997 年上半年,两委组成调查组对教材编写的有关情况进行了系统调查,召开调研会 7 次,49 所高校 92 人参加了座谈;1997 年 9 月

在武汉召开了本系列教材立项会议，有 43 所高校的代表出席会议，采取无记名投票方式对 24 所院校上报的 297 项选题进行遴选；1997 年 10 月 20 日，国家民委教育司、国家教委民族教育司、高等教育司、师范教育司联合发文，正式公布了首批 13 项 15 本立项教材；1998 年 3 月 30 日在武汉召开本系列教材主编选定会，本着公平、公开、公正原则，通过充分协商和无记名投票方式，对 20 所院校申报的主编进行遴选；1998 年 5 月 13 日至 17 日在宁波大学召开各教材主编会议，对系列教材编写原则进行确定，对编写工作进行了部署；1999 年 3 月 17 日至 18 日在武汉召开了本系列教材编写工作座谈会，对系列教材的最后出版进行协商部署.

为了进一步规范民族高等院校的课程教学，我们在组织编写这套教材过程中，经过充分讨论反复修改，并经专家审定，重新制订了各课程教学大纲.在本系列教材出版发行之际，一并推荐给各高校使用.

中南民族学院和广西民族出版社为本系列教材的编写和出版做了大量的组织协调工作，保证了本系列教材的质量和按期出版.

民族院校和民族地区高等院校
立项规划教材编委会
1999 年 6 月 19 日

编　写　说　明

本书是民族院校和民族地区高等学校非民族类规划教材之一.全体编写人员于1998年7月底在兰州召开了第一次编写工作会议,讨论确定了教材编写提纲和课程教学大纲的初稿,并于同年11月底在武汉又召开了第二次编写工作会议,认真修改课程教学大纲和教材初稿.1999年5月书稿由张群、余启港进行了认真的统一修改定稿.1999年12月由教育部、国家民委组织专家组审查通过.

本书主要特点有:(1)针对性强.本书主要针对民族院校学生的实际学习需要,对概念和结论进行了通俗细致地阐述,表达和论证正确、严谨,推理步骤循序渐进、因果分明,便于理解.(2)内容新.本书注重于对线性代数的主要计算方法——初等变换方法的灵活性的阐述.同时,部分内容和例题、习题是编者新编的.(3)理论联系实际.书中经济应用方面的内容帮助学生学以致用.本书重点在于提高学生解决实际问题的应用能力.

全书教学时数约54学时.

本书由主编张群聘请副主编余启港、于纯海、孙蓉、包峰山共同编写.分工如下:张群、余启港编写第二、三、六章;于纯海编写第一章;孙蓉编写第五章;包峰山编写第四章.

由于我们水平有限,书中难免有不妥之处,欢迎读者批评指正.

编者

2000年3月

再 版 说 明

自本书第一版出版以来，受到许多专家、学者的重视，对本书采用选元素法代替以往教材中的化三角形方法，给予了充分肯定．同学们在学习本教材过程中，也体会到了本教材中处理问题的方法的好处：学以致用，部分同学采用本教材复习报考研究生，虽然要重新学习选元素法，但是复习之后，大大提高了解题能力．老师和同学也反映了本教材的一些不足．这次再版，主要是根据大家反映的情况，由主编张群教授主持，余启港副主编做了修订，主要有：(1)对全书进行了再次校对，改正了一些错误；(2)全面修改、补充、校订了所有的习题和答案；(3)改写了“初等变换不变秩”定理的证明，修改了惯性定理的证明，补充了许瓦兹不等式和三角不等式的证明，修改第六章例7、例8．

对支持、采用本教材和给本教材提出宝贵意见的专家、学者、老师和同学们，恕不一一列举，在此谨表示衷心的感谢．

本教材还将陆续出版配套学习辅导资料和习题解答、习题集，以及电子教案、电子学习系统和电子试题库．为了大家教和学的方便，编者特设电子信箱如下：

在中文雅虎、163、sina等常用网站以xxds123456为名称，例如：xxds123456@163.net等．

我们将努力回复来信，并在可能的情况下，建立专用网页．

欢迎大家多联系交流．

编者

2002年7月

目　　录

第1章 行 列 式

在初等数学中,我们讨论过用消元法解二元和三元线性方程组(二元、三元一次方程组),后来数学家们发现可以用二阶、三阶行列式给出二元、三元线性方程组的一般解的公式.由此人们希望能用类似的方法去解 n 元线性方程组,于是就引进了 n 阶行列式的概念.行列式不仅在数学领域,且在包括经济学在内的很多其它学科中都有广泛的应用.

本章从介绍二阶、三阶行列式入手,引入 n 阶行列式的概念,然后讨论 n 阶行列式的基本性质、展开公式和利用基本性质、展开公式计算行列式的一般方法及常见类型行列式的计算,最后讨论用行列式解特殊类型的线性方程组.

第1节 二元和三元线性方程组

行列式的概念来源于解线性方程组.所谓线性方程组是指所含未知量的次数是一次的方程组.本节我们分析解二元、三元线性方程组的消元法过程,回顾二阶、三阶行列式的产生.

1.1 二元线性方程组与二阶行列式

设有二元线性方程组(二个未知量,二个线性方程的方程组)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & ② \end{cases} \tag{1}$$

用消元法求解: $a_{22} \times ① - a_{12} \times ②$ 得:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

$a_{11} \times ② - a_{21} \times ①$ 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,方程组(1)有解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

为了便于记忆,我们引进记号

$$D \triangleq \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{2}$$

并称 D 为**二阶行列式**.

由于 x_1 的分子是用常数项 b_1, b_2 分别代替 D 中的 a_{11}, a_{21} 得到的,x_2 的分子是用 b_1, b_2 分别代替 D 中的 a_{12}, a_{22} 得到的,故方程组(1)的解可用二阶行列式表达成如下形式:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{3}$$

这样,只要已知二元线性方程组(1)的系数和常数项的具体值,就能很容易地计算出方程组的解,且(3)既简便又易于记忆.

例 1 解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 = -2 \end{cases}$$

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - (-2) \times 2 = 19 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 5 \times 5 - (-2) \times (-2) = 21$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 3 \times (-2) - 5 \times 2 = -16$$

所以方程组的解是

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{21}{19} = 1\frac{2}{19}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-16}{19}$$

从(2)中不难发现二阶行列式的计算规则是**主对角线**(左上角到右下角连线)上元素的乘积减去**次对角线**(右上角到左下角连线)上元素的乘积,这也称为**对角线规则**(如图 1).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

(−)　　(+)

图 1　二阶行列式的对角线规则

1.2　三元线性方程组与三阶行列式

设有三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & ② \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & ③ \end{cases} \tag{4}$$

仿照解二元线性方程组的方法,消去 x_2, x_3 即

先从方程①、②消去 x_2: $a_{22}\times$ ① $- a_{12}\times$ ②得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 + (a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23})x_3 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \quad ④$$

从方程①、③消去 x_2: $a_{32}\times$ ① $- a_{12}\times$ ③得

$$(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})x_1 + (a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33})x_3 = b_1a_{32} - b_3a_{12} \quad ⑤$$

从方程②、③消去 x_2: $a_{32}\times$ ② $- a_{22}\times$ ③得

$$(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})x_1 + (a_{23}a_{32} - a_{22}a_{33})x_3 = b_2a_{32} - b_3a_{22} \quad ⑥$$

再从方程④、⑤、⑥消去 x_3: $a_{33}\times$ ④ $- a_{23}\times$ ⑤ $+ a_{13}\times$ ⑥得

$$\begin{aligned} &(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})x_1 \\ &= b_1a_{22}a_{33} + b_3a_{12}a_{23} + b_2a_{13}a_{32} - b_3a_{13}a_{22} - b_2a_{12}a_{33} - b_1a_{23}a_{32} \end{aligned} \tag{5}$$

令 $D \triangleq a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

易见等式(5)右端是用 b_1, b_2, b_3 分别代替 D 中的 a_{11}, a_{21}, a_{31} 得到的表达式,记其为 D_1.

类似地在(4)中消去 x_1, x_3 得 $Dx_2 = D_2$,其中 D_2 是用 b_1, b_2, b_3 分

别代替 D 中的 a_{12},a_{22},a_{32}得到的表达式.

在(4)中消去 x_1,x_2,得 $Dx_3=D_3$,其中 D_3 是用 b_1,b_2,b_3 分别代替 D 中的 a_{13},a_{32},a_{33}得到的表达式.

当 $D\neq 0$ 时,得方程组(4)的解是

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} \\ x_3 = \dfrac{D_3}{D} \end{cases}$$

其中 x_1,x_2,x_3 具有公共分母 D,且 D 只与(4)中未知量的系数有关.

如果我们引入记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\Delta}{=} a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

称其为**三阶行列式**,且易见下列三阶行列式

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

分别为 D_1,D_2,D_3 所代表的表达式,故

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

这样,利用三阶行列式,我们给出了三元线性方程组(4)解的简捷表达式．只要掌握了三阶行列式的运算规律,当给定的三元线性方程组所对应的 $D\neq 0$ 时,立即可得出解的表达式或具体数值.

三阶行列式是六项的代数和,每一项是不同行不同列的三个元

素的乘积,其中三项带正号,三项带负号.其计算规律可由图 2 所示的**对角线规则**给出.

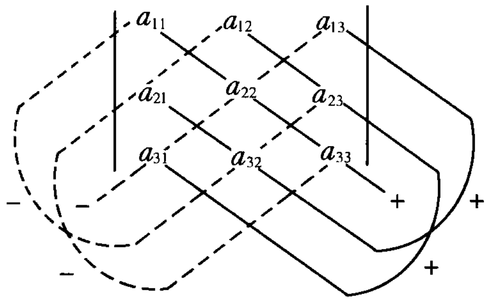


图 2　三阶行列式的对角线规则

例 2　计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 4 \\ 7 & -3 & -6 \end{vmatrix}$$

解　$D=3\times5\times(-6)+(-1)\times(-3)\times1+7\times4\times(-2)$

$$-1\times5\times7-(-2)\times(-1)\times(-6)-3\times(-3)\times4$$

$$=-130$$

例 3　解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=5 \\ 3x_1+x_2-5x_3=5 \\ 4x_1-x_2+\ \ x_3=9 \end{cases}$$

解　因为

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-6\neq0,\ D_1=\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -5 \\ 9 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-12,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&5&3\\3&5&-5\\4&9&1\end{vmatrix}=6,\qquad D_3=\begin{vmatrix}2&-1&5\\3&1&5\\4&-1&9\end{vmatrix}=0$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{-12}{-6}=2,\qquad x_2=\frac{6}{-6}=-1,\qquad x_3=\frac{0}{-6}=0$$

对比二元线性方程组与三元线性方程组求解的行列式表达形式,可以看出其间有共同的规律性:

1.每个 x_j 的公分母为由系数构成的行列式,叫做**系数行列式**.

2.每个 x_j 的分子为在系数行列式中用常数项代替 x_j 的系数得到的行列式,叫做**分子行列式**.

这样,就使得解的表达式非常简单且便于记忆.

1.3 解 n 元线性方程组的问题

设有 n 元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\tag{6}$$

人们希望用类似于解二元、三元线性方程组的方法给出这类一般 n 元线性方程组解的公式.为此就需要引入 n 阶行列式的概念.当然,我们也可以仿照二元、三元的情形,先求出解的表达式,并进行通分调整,使解中每个 x_j 具有相同的公分母以此来定义 n 阶行列式.但是这样做,将非常繁琐且是不必要的.我们应该按照认识的规律,从特殊的二阶、三阶行列式中寻找出共同的本质的特征,以此去定义 n 阶行列式.同时,不要忘记了我们的目的:用行列式表达方程组的解.那么计算二阶和三阶行列式的对角线规则能不能推广到四阶和四阶以上的各阶行列式呢?如果四阶行列式