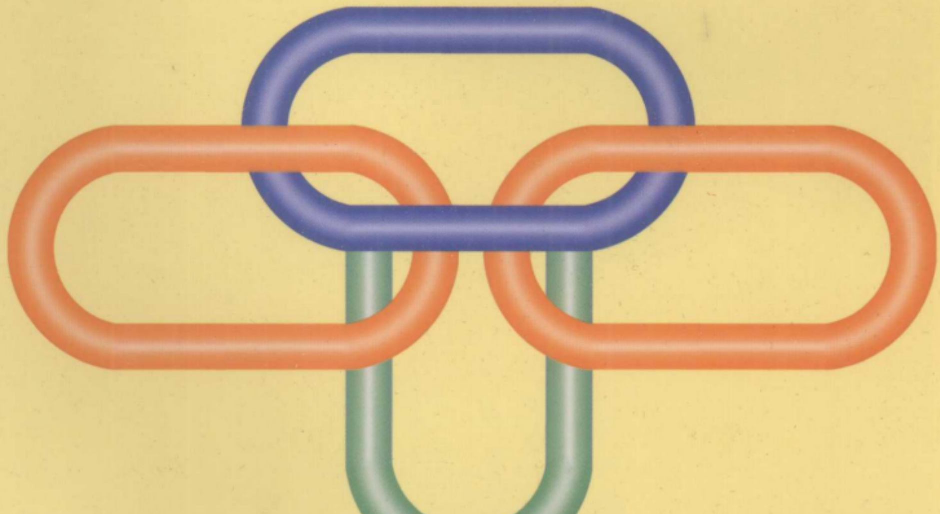
Junior Mathematical Olympiads

奥数精讲与测试

高一年级

熊斌 冯志刚 主编

熊斌 王朝和 郑仲义 胡圣团 编著



学林出版社

Junior Mathematical Olympiads

熊斌

中国数学奥林匹克委员会委员，第45届IMO中国队主教练，第46届IMO中国队领队（中国队在这两次比赛中均取得团体第一），华东师范大学数学系硕士生导师。中国数学奥林匹克高级教练，《数学通讯》“数学竞赛”专栏主持人，《数学教学》、《数理天地》编委、记者。多次担任中国数学奥林匹克国家集训队教练，指导多名学生在IMO上获得金牌，参与全国初中数学竞赛、全国高中数学联赛、西部数学奥林匹克、女子数学奥林匹克、希望杯全国数学邀请赛、中国数学奥林匹克(CMO)、国际青少年城市数学邀请赛的命题工作。在国内外杂志发表文章80多篇，编著、翻译、主编著作百余本，其中与单墫共同主编的《奥数教程》发行尤广，此外还主持编写了相关的电子教材。

冯志刚

理学硕士。上海市上海中学特级教师，中国数学奥林匹克高级教练。长期从事数学竞赛的教学、研究与命题工作，参与西部数学奥林匹克的命题工作，擅长代数与数论。所教学生中累计有2人获IMO金牌，30余人进入国家集训队，40多人次在中国数学奥林匹克（CMO，即“冬令营”）上获奖，200余人获全国高中数学联赛一等奖。作为2003年中国队副领队带队参加了第44届IMO并取得优异成绩，主编或参编十余套竞赛方面的读物，著作有《奥数教程》、《数学奥林匹克一讲一练》、《赛前集训》、《高中竞赛数学教程》、《数学奥赛导引》、《数学归纳法的证明方法与技巧》、《整除、同余与不定方程》，译有《解决问题的策略》等。

上架建议：高中数学奥数

ISBN 978-7-80730-507-1

9 787807 305071 >

定价 27.00 元

奥数精讲与测试

高一年级

熊斌 冯志刚 主编
熊斌 王朝和 郑仲义 胡圣团 编著

学林出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥数精讲与测试. 高一年级 / 熊斌，冯志刚主编；熊斌等编著. —上海：学林出版社，2008. 1
ISBN 978 - 7 - 80730 - 507 - 1

Ⅰ. 奥… Ⅱ. ①熊…②冯…③熊… Ⅲ. 数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 200070 号

奥数精讲与测试·高一年级

编　　者—— 熊　斌　王朝和　郑仲义　胡圣团
责任编辑—— 马健荣
封面设计—— 魏　来
出　　版—— 上海世纪出版股份有限公司
学林出版社(上海钦州南路 81 号 3 楼)
电话：64515005　传真：64515005
发　　行—— 新华书店上海发行所
学林图书发行部(上海钦州南路 81 号 1 楼)
电话：64515012　传真：64844088
照　　排—— 南京展望文化发展有限公司
印　　刷—— 上海师范大学印刷厂
开　　本—— 787×1092　1/16
印　　张—— 18
字　　数—— 31 万
版　　次—— 2008 年 1 月第 1 版
2008 年 10 月第 2 次印刷
印　　数—— 6001-8300 册
书　　号—— ISBN 978 - 7 - 80730 - 507 - 1/G · 141
定　　价—— 27. 00 元

前言

我们都知道数学是科学之母，在科技迅速发展的今天，数学的重要性尤为明显。由于人们深刻地了解到数学的重要性，也意识到应当尽早培养青少年学生对数学的兴趣与数学思维的习惯，因此举办了许多内容丰富的数学活动，数学奥林匹克竞赛就是这些丰富多彩的活动中的一页。

数学奥林匹克竞赛对于激发学生的学习兴趣、开发智力、培养创新能力、开拓视野有着非常积极的作用。通过开展数学奥林匹克竞赛活动，可以更好地发现和培养优秀学生，并能提高教师的水平，促进教学改革，为我国数学事业的长期发展提供源源不断的生力军。

本套丛书从小学一年级至高中三年级共12册，将数学奥林区克竞赛的内容以精讲和测试的形式系统地组织起来，目的是为学生提供一套强化知识、提高数学素养和能力的教材，让学生通过对这套教材的学习，具备和提高参加各种数学竞赛的知识和能力，使学生不仅能把自己课内的成绩提高，而且能在各级各类数学竞赛中取得理想的成绩。

本书的每一讲都有“精讲”和“测试 ABC 卷”组成，分设三部分内容：

1. 竞赛热点、考点、知识点。将数学奥林匹克竞赛的知识、内容以及当前的热点问题和历届数学奥林匹克竞赛中经常出现的问题给予分析、归纳、阐述和总结。

2. 典型例题精讲。围绕数学竞赛的热点、考点，选择典型的例题，提高对典型例题的分析、讲解，使学生能够掌握基本思想和基本方法，进而提高分析问题和解决问题的能力。

3. 测试 ABC 卷。有针对性地选择一些名题、新题、好题给学生练习。A 卷是“精讲”内容的延伸与拓展，题目难度较小；B 卷进一步加强数学竞赛的基本功，突出了解题的基本技巧与方法；C 卷是为准备在数学奥林匹克竞赛

中取得优异成绩的同学设计的，题目具有一定的挑战性，是学生发挥自己的创造性、一显身手的试金石。

作者希望同学们在使用本书后，视野开阔了，数学素养提高了，解题与应试的能力加强了，不仅能在课内考试脱颖而出，也能在数学奥林匹克竞赛中出类拔萃。

参加本套丛书编写的作者都是长期在数学竞赛辅导第一线的富有经验的教师，有中国数学奥林匹克国家队的领队、副领队、主教练，还有多次参与各级各类数学竞赛命题的专家，他们丰富的教学经验为本题丛书增色不少。

让我们尽情地享受数学的乐趣，积极地参与数学奥林匹克竞赛吧！

目录

第 1 讲　集合的概念与运算 …………………… 1
第 2 讲　子集 ………………………………………… 12
第 3 讲　一元二次不等式 …………………………… 22
第 4 讲　二次函数与方程、不等式 ………………… 30
第 5 讲　幂函数、指数函数、对数函数 …………… 40
第 6 讲　函数的图像与性质 ………………………… 52
第 7 讲　函数的最大值与最小值 …………………… 64
第 8 讲　函数的应用问题 …………………………… 73
第 9 讲　三角函数的性质及应用 …………………… 83
第 10 讲　三角恒等式 ……………………………… 91
第 11 讲　三角不等式与三角最值 ………………… 101
第 12 讲　正弦定理与余弦定理 …………………… 112
第 13 讲　反三角函数与三角方程 ………………… 122
第 14 讲　向量的加法与减法 ……………………… 131
第 15 讲　向量的数量积及其坐标表示 …………… 138
第 16 讲　等差数列与等比数列 …………………… 147
第 17 讲　递推数列 ………………………………… 155
第 18 讲　数列综合题 ……………………………… 167
参考答案 …………………………………………… 179

第 1 讲　集合的概念与运算

竞赛热点、考点、知识点

概括原则：任给一个性质 p，那么存在一个集合 S，它的元素恰好是具有性质 p 的所有对象，即 $S=\{x \mid p(x)\}$，其中 $p(x)$是"x 具有性质 p"的缩写.

集合的运算：**交** $(A\cap B=\{x \mid x\in A 且 x\in B\})$，

并$(A\cup B=\{x \mid x\in A 或 x\in B\})$，

补$(\overline{A}=\{x \mid x\in I 且 x\notin A\})$，

差$(A\backslash B=\{x \mid x\in A,但 x\notin B\})$.

集合的运算法则：

分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

De Morgen 法则　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$;

$A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$,

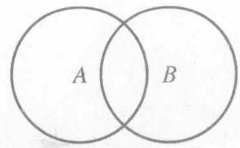
$A\backslash(B\cap C)=(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$.

集合的各种表示法各具特点，在直观上表示集合，特别是表示两个或两个以上集合之间的关系时，常常用一个平面上的封闭图形来形象地表示集合，即 Venn 图，可以方便地验证集合间的各种关系. 集合的确定性和互异性特征是其重要的基本特征.

空集不含任何元素，并且是任何集合的子集.

容斥原理　在需要对某一个有限集合的元素进行记数时，为了便于计算，常常通过计算它的若干个子集的元素个数来实现. 实质是将整体计数问题转化为局部计数问题. 我们将此类计数公式通称为容斥原理. "容"意指这些子集的并集是原集合，"斥"意指这些子集中两两交集不是空集时，需要将重复的元素个数排斥掉.

通常以 $|X|$ 表示有限集合 X 中元素的个数，参照 Venn 图可以得到如下计数公式：



$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|$$
$$-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|$$
$$+|A\cap B\cap C|$$

……

典型例题精讲

例 1 已知数集 $A=\{a+2,\ (a+1)^2,\ a^2+3a+3\}$，$B=\{a+b,\ 1,\ a-b+5\}$. 若 $A=B$，求实数 a，b 的值.

分析 两个集合相等是指这两个集合的元素完全相同. 由集合中元素的互异性及无序性，集合 A 中三个元素有且仅有一个为 1. 据此可求出 a，进而求出 b.

解 由 $A=B$，得 $1\in A$. $a+2=1\Rightarrow a=-1$；$(a+1)^2=1\Rightarrow a=0$ 或 $a=-2$；$a^2+3a+3=1\Rightarrow a=-1$ 或 $a=-2$. 由集合 A 中三个元素有且仅有一个为 1，得 $a=0$，$A=\{1,\ 2,\ 3\}$，$B=\{1,\ b,\ 5-b\}$. 由 $A=B$，得 $b=2$ 或 $b=3$. 因此所求实数为 $a=0$，$b=2$ 或 $a=0$，$b=3$.

例 2 集合 $M=\{u\mid u=12m+8n+4l,\ m,\ n,\ l\in\mathbf{Z}\}$ 和

$$N=\{u\mid u=20p+16q+12r,\ p,\ q,\ r\in\mathbf{Z}\}$$

的关系是(　　).

A. $M=N$　　　　B. $M\not\subset N$ 且 $N\not\subset M$

C. $M\subset N$　　　　D. $M\supset N$

分析 1 通过化简，认识这两个集合中元素的特征，进而作出判断.

解一 $12m+8n+4l=4(3m+2n+l)$，而 $3m+2n+l$ 可取任意整数，得集合 M 表示 4 的倍数的集合，即 $M=\{u\mid u=4k,\ k\in\mathbf{Z}\}$. $20p+16q+12r=4(5p+4q+3r)$，设 $p=-q=k$，$r=0$，得 $N=\{u\mid u=4k,\ k\in\mathbf{Z}\}$. 所以 $M=N$，应选 A.

分析 2 本题供选择的结论中，均为两集合之间的包含关系. 证明集合之间包含关系的一般方法是“若 $a\in A\Rightarrow a\in B$，则 $A\subseteq B$”；证明集合相等关系的一般方法是“若 $\begin{cases}A\subseteq B\\ B\subseteq A,\end{cases}$ 则 $A=B$”.

解二 若 $u\in M\Rightarrow u=12m+8n+4l$. 设 $m=r$, $n=2q$, $l=5p$, 则 $u=20p+16q+12r\in N\Rightarrow M\subseteq N$. 若 $u\in N\Rightarrow u=20p+16q+12r$. 设 $p=-q=2n+l$, $r=m$, 则 $u=12m+8n+4l\in M\Rightarrow N\subseteq M$. 由 $\begin{cases}M\subseteq N\\N\subseteq M\end{cases}\Rightarrow M=N$, 所以应选 A.

例 3 已知 $M=\{(x,\ y)\mid y=x^2\}$, $N=\{(x,\ y)\mid x^2+(y-a)^2=1\}$, $A=M\cap N$.

(1) 若 $|A|=3$, 求实数 a 的值; (2) 若 $A=\varnothing$, 求实数 a 的取值范围.

分析 首先应对题中的集合语言进行解读. $M\cap N$ 意为由集合 M、N 分别表示的两个方程组成的方程组的解集. (1)是求实数 a 的值, 使上述方程组有 3 解; (2)是求实数 a 的取值范围, 使上述方程组无解.

解 由 $\begin{cases}y=x^2\\x^2+(y-a)^2=1\end{cases}\Rightarrow y^2-(2a-1)y+a^2-1=0\quad(*)$

$\Delta=(2a-1)^2-4(a^2-1)=5-4a$.

当 $a>\dfrac{5}{4}$ 时, $\Delta<0$, 原方程组无解;

当 $a=\dfrac{5}{4}$ 时, $y=\dfrac{3}{4}\Rightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 原方程组有两解;

当 $a<\dfrac{5}{4}$ 时, $\Delta>0$, 方程$(*)$有两个不等的实根 y_1、y_2.

由 $x^2=y\geqslant0$, 得方程$(*)$两根中, 一根为正数另一根为 0 时, 原方程组有 3 解; 方程$(*)$两根均为负根时, 原方程组无解.

由 $a^2-1=0\Rightarrow a=\pm1$. 经验算, $a=1$ 时原方程组有 3 解;

由 $\begin{cases}\Delta>0\\2a-1<0\\a^2-1>0\end{cases}\Rightarrow a<-1$, 即 $a<-1$ 时原方程组无解.

所以, 若 $|A|=3$, 实数 $a=1$;

若 $A=\varnothing$, 实数 a 的取值范围是 $a<-1$ 或 $a>\dfrac{5}{4}$.

例 4 设集合 A、B、X 满足: $A\cap X=B\cap X=A\cap B$, $A\cup B\cup X=A\cup B$. 若 A、B 为已知集合, 求集合 X.

分析 在研究集合之间的运算时, 应理解集合运算的意义并注意应用运算的性质.

解一 由 $A\cup B\cup X=A\cup B\Rightarrow X\subseteq A\cup B$. 设 $x\in X\Rightarrow x\in A\cup B\Rightarrow$ $x\in A$ 或 $x\in B$. 因为 $x\in X$，得 $\begin{cases}x\in A\\x\in X\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\in B\\x\in X,\end{cases}$ 即 $x\in(A\cap X)\cup(B\cap X)=A\cap B$. 由 $x\in X\Rightarrow x\in A\cap B$，得 $X\subseteq A\cap B$. 又 $A\cap X=A\cap B\Rightarrow A\cap B\subseteq X$. 所以 $X=A\cap B$.

解二 由 $A\cup B\cup X=A\cup B\Rightarrow X\subseteq A\cup B$，所以 $X=X\cap(A\cup B)=(A\cap X)\cup(B\cap X)=A\cap B$.

例5 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-(a-2)x-2a+4=0\}$，

$$B=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2+(2a-3)x+2a^2-a-3=0\}.$$

若 $A\cup B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

分析 由题意，两个一元二次方程 $x^2-(a-2)x-2a+4=0$ 和 $x^2+(2a-3)x+2a^2-a-3=0$ 中至少有一个方程有实数解. 采用直接方法是求两个方程有解集合的并集，或采用间接方法是求两个方程无解集合的交集的补集.

解一 由二次方程 $x^2-(a-2)x-2a+4=0$ 得 $\Delta_1=(a-2)^2-4(-2a+4)=a^2+4a-12\geqslant0\Rightarrow a\leqslant-6$ 或 $a\geqslant2$；由二次方程 $x^2+(2a-3)x+2a^2-a-3=0$ 得 $\Delta_2=(2a-3)^2-4(2a^2-a-3)=-4a^2-8a+21\geqslant0\Rightarrow-\frac{7}{2}\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}$；由 $A\cup B\neq\varnothing$ 得所求实数 a 的取值范围是 $\{a\mid a\leqslant-6$ 或 $a\geqslant2\}\cup\left\{a\,\middle|\,-\frac{7}{2}\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}\right\}=\left\{a\,\middle|\,a\leqslant-6,-\frac{7}{2}\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}\text{ 或 }a\geqslant2\right\}$.

解二 由解一得 $\begin{cases}\Delta_1<0\\\Delta_2<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-6<a<2\\a<-\frac{7}{2}\text{ 或 }a>\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow M=\left\{a\,\middle|\,-6<a<-\frac{7}{2}\text{ 或 }\frac{3}{2}<a<2\right\}$. 由 $A\cup B\neq\varnothing$ 得所求实数 a 的取值范围是 $\complement_{\mathbf{R}}M=\left\{a\,\middle|\,a\leqslant-6,-\frac{7}{2}\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}\text{ 或 }a\geqslant2\right\}$.

例6 为搞好学校工作，全校各班级一共提出了 P 条建议($P\in\mathbf{N}_+$). 已知有些班级有相同的建议，且任何两班都至少有一条建议相同，但没有两班提出全部相同的建议，求证该校的班级数不多于 2^{P-1} 个.

证明 假设全校有 m 个班级，他们的建议分别组成集合 A_1、A_2、…、A_m. 这些集合中没有两个相同(因为没有两个班级提出全部相同的建议)，而任何两个集合都有公共元素，因此任何一个集合都不是另一个集合的补集，这样在 A_1、

A_2、…、A_m 中至多有A(所有 P 条建议所组成的集合)的 $\frac{1}{2}\cdot 2^P=2^{P-1}$ 个子集,所以 $m\leqslant 2^{P-1}$.

例 7 已知集合 $A=\{(x, y) \mid y=ax+2\}$, $B=\{(x, y) \mid y=|x+1|\}$,且 $A\cap B$ 是一个单元素集合,求实数 a 的取值范围.

解 我们在图 1-1 中作出函数 $y=ax+2$ 与 $y=|x+1|$ 的图像,由题意 $A\cap B$ 是单元素集合,故它们的图像只有一个交点,由图像可知 a 的取值范围是 $(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$.

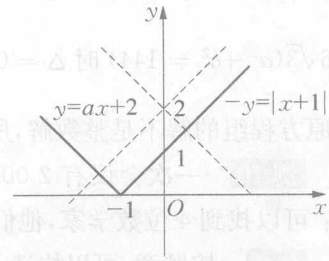


图 1-1

说明 这是一个常见的求解含字母不等式的讨论问题,解答中利用图像来处理,显得简洁明了.

例 8 已知 $A\subseteq\{1, 2, \cdots, 2000\}$,且 A 中任意两个数之差的绝对值不等于 4 或 7,求 $|A|$ 的最大值.

解 注意到 $2000=11\times 181+9$,我们取 $A=\{x \mid x=11t+1, 11t+4, 11t+6, 11t+7, 11t+9, 0\leqslant t\leqslant 181, t\in\mathbf{Z}\}$,则 A 中任意两个数之差不是 4 或 7. 事实上,若 $|11(t-r)+(b-a)|=4$ 或 7,这里 a、$b\in\{1, 4, 6, 7, 9\}$,而 $0\leqslant r\leqslant t\leqslant 181$,则当 $t-r\geqslant 2$ 时,显然不能成立;当 $t-r=1$ 时,应有 $|11+(b-a)|=4$ 或 7,去绝对值后应有 $|b-a|=4$ 或 7,这一点直接验证即知不能成立;当 $t-r=0$ 时,与上类似也不能成立. 所以 $|A|$ 的最大值 $\geqslant 5\times 182=910$. 另一方面,设 A 是满足条件的集合且 $|A|>910$,这时存在 t,使得集合 $\{x \mid x=11t+r, 1\leqslant r\leqslant 11\}$ 中出现 6 个数都减去 $11t$ 后都属于 A,说明 1、2、…、11 中有 6 个数入选 A,我们证明这是不可能的. 将 1、2、…、11 排成一个圆圈,例如 1、5、9、2、6、10、3、7、11、4、8(这里 1 与 8 首尾相连),则此圆圈上任意相邻两个的差的绝对值为 4 或 7. 从中任取 6 个数必有两个数相邻,从而 1、2、…、11 中不能有 6 个数同时入选 A,矛盾. 综上所述,$|A|$ 的最大值为 910.

例 9 设 a、$b\in\mathbf{R}$, $A=\{(x, y) \mid x=n, y=an+b, n\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{(x, y) \mid x=m, y=3m^2+15, m\in\mathbf{Z}\}$、$C=\{(x, y) \mid x^2+y^2\leqslant 144\}$ 是平面 XOY 内的点集,讨论是否存在 a、b 使得(1) $A\cap B\neq\varnothing$;(2) $(a, b)\in C$ 同时成立.

分析 首先应对题中的集合语言进行解读. $A\cap B\neq\varnothing$,意为由集合 A、B 分别表示的两个方程组成的方程组有整数解;$(a, b)\in C$,则给出了 a、b 的允

许值范围.

解 集合 A、B 可分别化简为 $A=\{(x,y)\mid y=ax+b,x\in\mathbf{Z}\}$、$B=\{(x,y)\mid y=3x^2+15,x\in\mathbf{Z}\}$. $\begin{cases}y=ax+b\\y=3x^2+15\end{cases}\Rightarrow 3x^2-ax+15-b=0$, $\Delta=a^2-12(15-b)\leqslant 144-b^2-180+12b=-(b-6)^2$. 仅当 $b=6$ 且 $a=\pm6\sqrt{3}(a^2+b^2=144)$ 时 $\Delta=0$，方程组有解，此时原方程组的解为 $\begin{cases}x=\pm\sqrt{3}\\y=24.\end{cases}$ 由于原方程组的解不是整数解，所以满足条件的实数 a、b 不存在.

例 10 一次会议有 2 005 位数学家参加，每人至少有 1 337 位合作者，求证：可以找到 4 位数学家，他们中每两人都合作过.

分析 按题意，可以构造一种选法找出符合条件的四位数学家.

解 由题意，可任选两位合作过的数学家 a、b，设与 a 合作过的数学家的集合为 A，与 b 合作过的数学家的集合为 B，则 $|A|\geqslant 1\,337$，$|B|\geqslant 1\,337$. 又 $|A\cup B|\leqslant 2\,005$，于是 $|A\cap B|=|A|+|B|-|A\cup B|\geqslant 1\,337+1\,337-2\,005=669$. 因此在集合 $A\cap B$ 中，有数学家且不是 a、b. 从中选出数学家 c，并设与 c 合作过的数学家的集合为 C，则 $|(A\cup B)\cup C|\leqslant 2\,005$，$|C|\geqslant 1\,337$. 于是 $|A\cap B\cap C|=|A\cap B|+|C|-|(A\cap B)\cup C|\geqslant 669+1\,337-2\,005=1$，因此在集合 $A\cap B\cap C$ 中有数学家且不是 a、b、c. 又可从中选出数学家 d，则数学家 a、b、c、d，他们中每两人都合作过，即原命题得证.

水平测试 1

A 卷

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x\mid x=a^2+1,a\in\mathbf{N}_+\}$，$B=\{y\mid y=b^2-4b+5,b\in\mathbf{N}_+\}$，则下述关系中正确的是（ ）.

A. $A=B$　　　　B. $A\supset B$

C. $A\subset B$　　　　D. $A\cap B=\varnothing$

2. 设集合 $M=\{x\mid x>a,a^2-12a+20<0\}$，$P=\{x\mid x\leqslant 10\}$，则

$M \cap P=($ $)$.

A. $\{x \mid a<x \leqslant 10\}$　　B. $\{x \mid x>a\}$

C. $\{x \mid 2<x \leqslant 10\}$　　D. P

3. 已知集合 $E=\{x \mid x^2-5x-6>0\}$，$F=\{x \mid |x-5|<a$，a 是常数$\}$，且 $11 \in F$，设全集 $I=\mathbf{R}$，则(　　).

A. $E \cup F=\mathbf{R}$　　B. $E \cup \overline{F}=\mathbf{R}$

C. $\overline{E} \cup F=\mathbf{R}$　　D. $\overline{E} \cup \overline{F}=\mathbf{R}$

4. 已知集合 $E=\left\{e \left\lvert\, e=m+\frac{1}{6}, m \in \mathbf{Z}\right.\right\}$，$F=\left\{f \left\lvert\, f=\frac{n}{2}-\frac{1}{3}, n \in \mathbf{Z}\right.\right\}$，$G=\left\{g \left\lvert\, g=\frac{p}{2}+\frac{1}{6}, p \in \mathbf{Z}\right.\right\}$，则集合 E、F、G 满足关系(　　).

A. $E=F=G$　　B. $E \subset F=G$　　C. $E \subset F \subset G$　　D. $F \subset G \subset E$

5. 已知集合 $A=\{x \mid x^2-2x-3=0\}$，$B=\{x \mid ax=1\}$. 若 $B \subseteq A$，则实数 a 的所有可能的值的积为(　　).

A. -1　　B. $-\frac{1}{3}$

C. 0　　D. 以上都不对

6. 在坐标平面上，纵、横坐标都是整数的点叫做整点. 用 I 表示坐标平面上所有直线的集合，M 表示恰好通过一个整点的直线集合，N 表示不通过任何整点的直线集合，P 表示通过无数多个整点的直线集合，那么表达式：(1) $M \cup N \cup P=I$，(2) $M \neq \varnothing$，(3) $N \neq \varnothing$，(4) $P \neq \varnothing$ 中正确的个数是(　　).

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

二、填空题

7. 设含有三个实数的集合既可表示为 $\left\{a, \frac{b}{a}, 1\right\}$，也可表示为 $\{a^2, a+b, 0\}$，则 $a^{2002}+b^{2003}$ 的值等于________.

8. 若集合 $M=\{x \mid x^2-2x+m=0, m \in \mathbf{R}\}$，则集合 M 中所有元素的和为________.

9. 已知集合 $A=\left\{x \left\lvert\, \frac{x+8}{x-5} \leqslant 0\right.\right\}$，非空集合 $B=\{x \mid t+1 \leqslant x \leqslant 2t-1\}$. 若 $A \cap B=\varnothing$，则实数 t 的取值范围是________.

10. 已知集合 $A=\{x \mid 0<x \leqslant 3\}$，$B=\{x \mid x^2-2ax+a \leqslant 0\}$. 若 $A \cup B=A$，则实数 a 的取值范围是________.

11. 定义两个集合 A 与 B 的差为 $A-B=\{x\mid x\in A$,但 $x\notin B\}$,对称差 $A\triangledown B=(A-B)\cup(B-A)$. 若 $A=\{(x,y)\mid y=x+1\}$, $B=\left\{(x,y)\middle|\frac{x-5}{x-4}=1\right\}$,则 $A\triangledown B=$ ________.

12. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid(x-2)^2+(y+3)^2\leqslant 4\}$, $B=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+(y-a)^2\leqslant\frac{1}{4}\right\}$,且有 $A\cap B=B$,实数 a 的取值范围是________.

三、解答题

13. 已知集合 $A=\{t\mid t$,使$\{x\mid x^2+2tx-4t-3\neq 0\}=\mathbf{R}\}$, $B=\{t\mid t$,使$\{x\mid x^2+2tx-2t=0\}\neq\varnothing\}$,其中 x、t 均为实数,求 $A\cap B$.

14. 已知集合 $A=\left\{(x,y)\middle|\frac{y-3}{x-2}=a+1\right\}$, $B=\{(x,y)\mid(a^2-1)x+(a-1)y=15\}$. 若 $A\cap B=\varnothing$,求实数 a 的值.

15. 对集合 $A=\{1,2,3,\cdots,n\}$ 及其每一个非空子集,定义一个唯一确定的"交替和"如下:按照递减的次序重新排列该子集,然后从最大的数开始,交替地减或加后继的数所得的结果. 例如,集合$\{1,2,4,7,10\}$的"交替和"是 $10-7+4-2+1=6$,集合$\{7,10\}$的"交替和"是 $10-7=3$,集合$\{5\}$的"交替和"是5,等等. 求集合A的所有子集的"交替和"的总和.

B 卷

一、选择题

1. 集合 $M=\left\{x\middle|x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$, $P=\left\{x\middle|x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$,则(　　).

   A. $M=P$　　B. $M\supset P$　　C. $M\subset P$　　D. $M\cap P=\varnothing$

2. 给出下列四个命题:

   (1) 若 $A=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{N}_+\}$, $B=\{y\mid y=x^2-2x+2,x\in\mathbf{N}_+\}$,则 $A=B$;

   (2) 若 A、B 均为非空集合,且 $A\cap B=\varnothing$, $M=\{A$的子集$\}$, $P=\{B$的子集$\}$,则 $M\cap P=\{\varnothing\}$;

   (3) 若 $A=B$,则 $A\cap C=B\cap C$;

(4) 若 $A\cap C=B\cap C$,则 $A=B$.

其中正确命题的个数是( ).

A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

3. 已知 $x\in\mathbf{R}$, $y\in\mathbf{R}^{+}$, $A=\{x^2+x+1, -x, -x-1\}$, $B=\left\{-y, -\frac{y}{2}, y+1\right\}$. 若 $A=B$,则 x^2+y^2 的值是( ).

A. 4 B. 5 C. 10 D. 25

4. 集合 A、B 的并集 $A\cup B=\{a_1, a_2, a_3\}$,当 $A\neq B$ 时,(A, B) 与 (B, A) 视为不同的对,这样的 (A, B) 对的个数有( ).

A. 8 个 B. 9 个 C. 26 个 D. 27 个

5. 已知集合 $A_n=\{x \mid 2^n<x<2^{n+1}$,且 $x=7m+1, n、m\in\mathbf{N}_+\}$, A_6 中各元素之和为( ).

A. 792 B. 890 C. 891 D. 990

6. 集合 $S=\{1, 2, 3, \cdots, 18\}$ 的五元子集 $S_1=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 中,任何两元素之差不为 1,这样子集 S_1 的个数为( ).

A. C_{17}^4 B. C_{15}^4 C. C_{13}^5 D. C_{14}^5

二、填空题

7. 若集合 $A=\{2, 4, x^3-2x^2-x+7\}$, $B=\{-4, y+3, y^2-2y+2, y^3+y^2+3y+7\}$,且 $A\cap B=\{2, 5\}$,则 $A\cup B=$ ________.

8. 已知集合 $M=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$, $n\in\mathbf{N}_+$, M 的所有子集的元素之和的和为________(规定空集 $\varnothing$ 的元素之和为 0).

9. 设集合 $M=\{1, 2, 3, \cdots, 2002\}$,现对 M 的任一非空子集 A,令 x_A 为 A 中最大数与最小数之和,则所有这样的 x_A 的算术平均值为________.

10. 已知 $A=\{1, 2, 3, 4, \cdots, 2002\}$, $B=\{1, 2, 3, \cdots, 1000\}$. 若 $C\subseteq A$, $B\cap C\neq\varnothing$,则子集 C 共有________个.

11. 设 $f(x)=x^2+ax+b\ (a, b\in\mathbf{R})$, $A=\{x \mid f(x)=x, x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x \mid f(f(x))=x, x\in\mathbf{R}\}$. 若 $A=\{-1, 3\}$,则 $B=$ ________.

12. 集合 $M=\{-1, 0, 1, -2, 2, 10, 20, -30, 99, -100\}$ 有 10 个元素,设 M 的所有非空子集为 M_i, $i=1, 2, 3, \cdots, 1023$. 每一个 M_i 中所有元素的乘积为 $m_i(i=1, 2, 3, \cdots, 1023)$, $\sum\limits_{i=1}^{1023}m_i=$ ________.

三、解答题

13. 已知集合 $A=\{(x, y) \mid ax+y=1\}$, $B=\{(x, y) \mid x+ay=1\}$,