21 世纪高职高专规划教材

高等数学

邱 筝 主编

第二版

MATHEMATICS

苏州大学出版社

21 世纪高职高专规划教材

高等数学

邱筝 主编

第二版

MATHEMATICS

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/邱筝主编. —2 版. —苏州：苏州大学出版社，2008.6
21 世纪高职高专规划教材
ISBN 978-7-81137-067-6

Ⅰ. 高… Ⅱ. 邱… Ⅲ. 高等数学-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 092077 号

高等数学(第二版)
邱 筝 主编
责任编辑 李 娟

苏州大学出版社出版发行
(地址：苏州市干将东路 200 号 邮编:215021)
丹阳市教育印刷厂印装
(地址：丹阳市西门外 邮编：212300)

开本 787mm×1 092mm 1/16 印张 17.5 字数 437 千
2008 年 6 月第 1 版 2008 年 6 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-81137-067--6 定价：28.00 元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换
苏州大学出版社营销部 电话:0512-67258835

《高等数学》(第二版)编委会

主　编　邱　筝

副主编　钱黎明　纪　锋　赵　彤

参加编写人员(以姓氏笔画为序)

朱卫平　纪　锋　邱　筝

张　亭　陆　健　赵　彤

钱黎明　高　伟　黄惠南

第二版前言

本书第二版是我们在第一版的基础上，根据近年来的教学实践经验全面修订而成的. 修订中，我们基本保留了原教材的系统和风格，同时注意吸收当前教材改革中一些成功的经验，并注意与高中数学新课程标准适当衔接，使新版能更适合当前教学的需要.

本书第一版共十章，我们在第二版中合并为九章，主要是将第一版第八章“多元函数微分学”与第九章“多元函数积分学”合并为第二版的第八章“多元函数微积分学”，并删去了“曲线积分”一节；将第一版第十章“无穷级数”删去了“傅立叶级数”一节，变为第二版第九章“无穷级数”；调整了部分例题、习题，对第一版中存在的个别问题，这次也作了修订.

在第二版中，我们依据“定位高职，融入建模思想；面向专业，培养应用意识”的教学指导思想，增加了数学模型简介，引入适合高职学生学习的应用实例，侧重模型的建立，淡化计算技巧，模型求解借助于数学软件包 Mathematica，并注重数学软件包的合理融入；注重微分的应用，体现局部线性化思想，利用微分形式的不变性导出隐函数微分法与参数方程求导法则，并运用隐函数微分法推导出反函数求导公式；注重数学思想与方法的阐述、建模思想的渗透，努力体现数学课程改革的新思路. 数学教学不仅要具备工具功能，而且还要具备思维训练和文化素质教育功能，也就是要立足于综合素质教育，重视培养学生的科学精神、创新意识和综合运用数学解决实际问题的能力.

本版修订编写工作，由邱筝任主编，钱黎明、纪锋、赵彤任副主编，负责完成本书框架结构与编写大纲. 第一章由陆健、朱卫平编写，第二章由纪锋编写，第五章、第七章由黄惠南编写，第六章由张亭编写，第八章前三节由赵彤编写，第八章后两节由高伟编写，第九章由钱黎明编写，第三章、第四章及各章数学软件包 Mathematica 应用由邱筝编写. 全书的统稿工作由邱筝负责，教材中的插图由黄惠南绘制.

本书的再版，得到了苏州大学出版社及南通职业大学、南通纺织职业技术学院、南通农业职业技术学院、南通航运职业技术学院等单位的领导和老师们的大力支持和帮助，在此一并表示诚挚的感谢.

由于编者经验、水平有限，书中难免有不妥之处，我们衷心地希望得到专家、同行和读者的批评指正，以便使本书不断完善.

编　者

2008 年 4 月

前言

PREFACE

《高等数学》是高职院校工程类、管理类、经济类专业一门十分重要的公共基础课，对于培养高职学生的思维能力、应用能力和基本运算技能起着重要的作用，为后续专业课程的学习、接受不断更新的知识和技术打下坚实的基础.

根据教育部关于职业教育必须面对就业的指示精神，为适应高职教育学制转轨的需求，面对《高等数学》课程学时数不断精简的实际状况，我们组织了长期从事高职数学教学的一线教师编写了本书.

本教材的编写依据“淡化严密性，强调思维性，加强实践环节，运用现代技术，适应专业需求”的高职数学教学思想，分析后续职业基础课和职业技术课教学内容所涉及的数学基础需要，遵循“必需、够用、高效”的原则，注意现代化计算工具的应用，并充分汲取了编著者十多年数学教学经验和教改体会. 在内容编排上，突出以应用为主线的内容体系，淡化了理论证明，注重对学生进行数学思想、方法和数学应用软件应用能力的培养. 教材加强对数学基本概念和基本定理从实际问题的引入和直观描述与几何解释，部分章节增加了应用实例和习题.

传统的数学理论与现代的科学计算工具的结合是高职数学发展的必然趋势，为适应这一形势的发展，我们在相应章节分别介绍 Mathematica 在求极限、导数、作图、积分、微分方程、无穷级数等方面的应用，以增强学生学习数学和应用数学的兴趣，引导和帮助学生借助 Mathematica 软件来解决在学习数学时遇到的复杂计算或作图方面的困难，淡化计算技巧，强调实际应用.

全书共分十章，主要内容为：函数的极限与连续，导数与微分，微分中值定理和导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数. 内容安排为实际教学提供了较大的弹性，适合 60－100 学时不同专业的教学需求.

本书可作为高等职业教育、高等专科教育教材，以及成人教育工程类、管理类、经济类专业的教材，也可作为工程技术人员的参考书.

全书由邱筝任主编，赵彤、纪锋、钱黎明任副主编，第一章由朱卫平编写，第二章由纪锋编写，第五章、第七章由黄惠南编写，第六章及第三章 3.6 由张亭编写，第八章由赵彤编写，第九章由高伟编写，第十章由钱黎明编写，第三章 3.1－3.5、第四章及各章 Mathematica 软件应用由邱筝编写. 全书的统稿工作由邱筝负责，教材中的插图由黄惠南绘制.

本书的编写和出版，自始至终得到了江苏省教育厅、苏州大学出版社及南通职业大学、南通纺织职业技术学院、南通航运职业技术学院、南通农业职业技术学院等单位的领导和老师的大力支持和帮助，在此一并表示诚挚的感谢.

由于水平与经验有限，书中难免存在一些缺点和不足，敬请广大师生、读者批评指正.

编　者

2007 年 7 月

目　录
CONTENTS

第一章　函数与极限

第二章　一元函数导数与微分

第三章 导数的应用

第四章 不定积分

第五章 定积分及其应用

第六章　常微分方程

第七章　向量代数与空间解析几何

第八章　多元函数微积分学

第九章 无穷级数

第一章

函数与极限

函数是高等数学研究的对象，极限是高等数学中研究问题的基本方法. 本章在简单回顾函数概念与性质的基础上，着重讨论函数的极限、连续等基本概念，以及它们的性质与运算法则.

1.1　函数的概念与性质

1.1.1　函数的概念

1. **函数的定义**

定义 1.1.1　设 x 和 y 是两个变量，当变量 x 在实数集 D 内任取某一数值时，变量 y 依照某个对应法则 f 有唯一确定的实数与之对应，则称 f 是定义在 D 上的**函数**. x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 D 称为函数 f 的**定义域**.

与自变量 x 对应的因变量 y 的值记作 $f(x)$，称为函数 f 在点 x 处的函数值. 数集 $\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 f 的**值域**.

由于常常通过函数值讨论函数，因此习惯上把自变量为 x，因变量为 y 的函数 f 记成 $y=f(x)$.

若函数在某个区间上的每一点都有定义，则称这个函数在该区间上有定义.

2. **函数的两个要素**

由定义 1.1.1 可见，定义域 D 和对应法则 f 是构成函数的两个要素.

如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的. 例如，函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$ 的定义域不同，因此它们是两个不同的函数；$y=|x|$ 与 $y=x$ 的对应法则不同，因此它们也是两个不同的函数；而函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 的定义域和对应法则都相同，所以它们是相同的函数.

3. **函数的定义域**

在研究函数时，经常要考虑它的定义域. 对于用数学式子给出的函数，通常约定函数的定义域是使得数学式子有意义的一切实数组成的集合. 例如，函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$，自变量 x 必须满足 $\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\ x-1\neq 0,\end{cases}$ 即函数的定义域 $D=[-1,1)\cup(1,+\infty)$. 对于具有实际背景的函数，要根据实际背景中变量的实际意义来确定定义域. 例如，圆的面积 S 是半径 r 的函数 $S(r)=\pi r^2$，因此它的定义域 $D=(0,+\infty)$；某电信局规定上网收费标准：当月上网时间低于 60 小时，按每小时 1.80 元收取，超过 60 小时后的部分按每小时 1.20 元收取，这样当月上网费 y

与上网时间 t 的函数关系为

$$y=\begin{cases}1.80t, & 0\leqslant t\leqslant 60,\\ 1.80\times 60+1.20(t-60), & 60<t\leqslant 744.\end{cases}$$

函数的定义域为 $D=[0,744]$.

4. **分段函数**

像上例这种在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子表示的函数，通常称为**分段函数**. 分段函数是用几个式子表示一个函数.

再如，绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

也是分段函数，如图 1-1 所示，不过它可以等价变形为 $y=\sqrt{x^2}$，即对应关系可以化成一个式子.

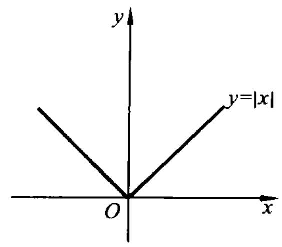


图 1-1

5. **隐函数**

若变量 x,y 之间的函数关系是由一个含 x,y 的方程 $F(x,y)=0$ 给出的，则称 y 是 x 的**隐函数**. 相应地，把直接由自变量的式子表示的函数称为**显函数**.

例如，$x^2+\sin 2y+2y=1$，$x^2+y^2=1$ 等确定的函数都是隐函数，而 $y=x+1$，$y=|x|$ 等都是显函数.

1.1.2 函数的几种特性

1. **函数的单调性**

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果对于区间 (a,b) 上的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上是**单调增加的**（或**单调减少的**），(a,b) 称为 $f(x)$ 的**单调增加区间**（或**单调减少区间**）.

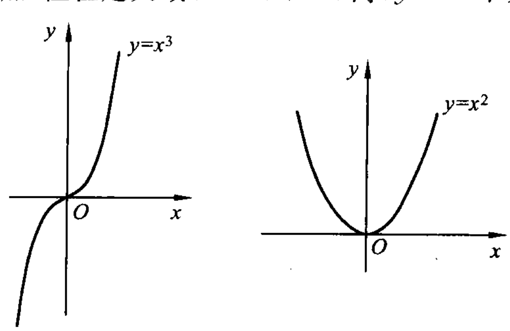
在区间 (a,b) 上单调增加或单调减少的函数统称为区间 (a,b) 上的**单调函数**，(a,b) 称为 $f(x)$ 的**单调区间**.

从几何直观上看，单调增加函数的图象沿 x 轴正向而上升，单调减少函数的图象沿 x 轴正向而下降. 例如，函数 $y=x^3$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加（图 1-2(a)）；函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，但在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内，$y=x^2$ 不是单调函数，如图 1-2(b) 所示.

2. **函数的奇偶性**

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任意 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**；如果对于任意 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图象关于 y 轴对称（图 1-2(b)），奇函数的图象关于原点对称（图 1-2(a)）.



(a) (b)

图 1-2

3. **函数的有界性**

设函数 $f(x)$的定义域为 D,数集 $X\subset D$,如果存在一个正数 M,使得对于任一 $x\in X$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$在 X 上**有界**. 如果不存在这样的正常数 M,则称 $f(x)$在 X 上**无界**.

如果 $f(x)$在 D 上有界,则称 $f(x)$为**有界函数**. 例如,函数 $y=\sin x$ 是有界函数,函数 $y=x$在$[-1,1]$内是有界的,但它在$(-\infty,+\infty)$上是无界的.

特别地,如果存在 M,使得 $f(x)\leqslant M$,则称 $f(x)$有上界;如果存在 m,使得 $f(x)\geqslant m$,则称 $f(x)$有下界. 显然若函数有界,界是不唯一的.

4. **函数的周期性**

设函数 $f(x)$的定义域为 D,如果存在一个不为零的数 T,使得对于任一 $x\in D$,有 $x\pm T\in D$,且 $f(x+T)=f(x)$恒成立,则称 $f(x)$为**周期函数**,T 为 $f(x)$的**周期**. 当周期函数存在最小正周期时,通常所说的周期是指最小正周期.

1.1.3 初等函数

1. **基本初等函数**

幂函数: $y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$;

指数函数: $y=a^{x}(a>0,a\neq1)$;

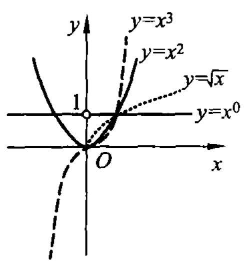
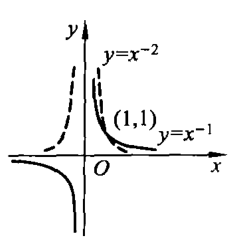
对数函数: $y=\log_{a}x(a>0,a\neq1)$;

三角函数: $y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$;

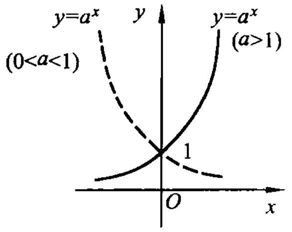
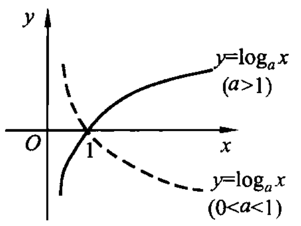
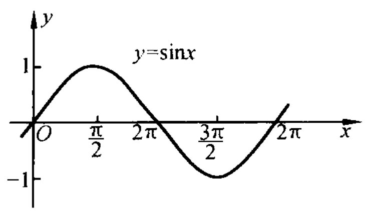
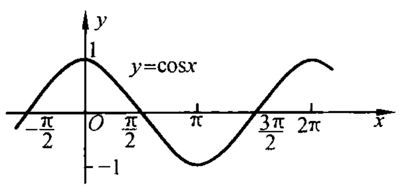
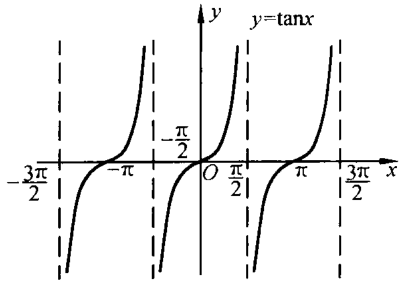
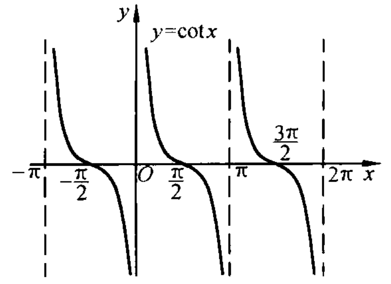
反三角函数: $y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\mathrm{arccot}\,x$.

以上五类函数统称为**基本初等函数**,它们的图象、定义域和主要性质如表 1-1 所示.

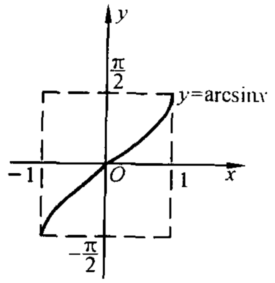
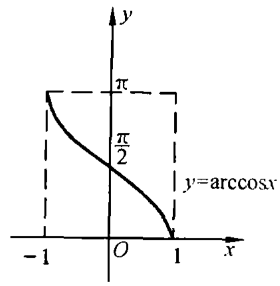
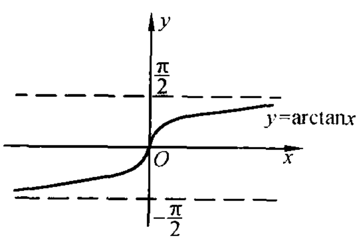
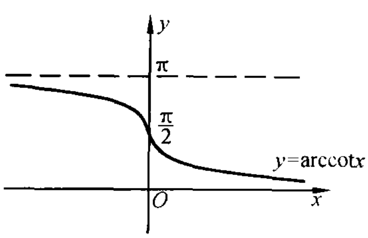
表 1-1　基本初等函数的图象、定义域和主要性质

函　数	图　象		定义域	主要性质
1. 幂函数 $y=x^{\alpha}$ (α 为常数)	$\alpha\geqslant0$		根据 α 的取值而定	1. 图象过点$(0,0)$,$(1,1)$; 2. 在$(0,+\infty)$内单调递增; 3. 无界.
	$\alpha<0$		根据 α 的取值而定	1. 图象过点$(1,1)$; 2. 在$(0,+\infty)$内单调递减; 3. 无界; 4. 以 x 轴、y 轴为渐近线.

续表

函　数	图　　象	定义域	主要性质
2. 指数函数 $y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$		$(-\infty,+\infty)$	1. 图象过点(0,1)； 2. $y>0$ 且无界； 3. 当 $0<a<1$ 时，在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递减； 当 $a>1$ 时，在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递增.
3. 对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$		$(0,+\infty)$	1. 图象过点(1,0)； 2. 无界函数，$y\in\mathbf{R}$； 3. 当 $0<a<1$ 时，在 $(0,+\infty)$ 内单调递减； 当 $a>1$ 时，在 $(0,+\infty)$ 内单调递增.
4. 正弦函数 $y=\sin x$		$(-\infty,+\infty)$	1. 有界函数，$\lvert y\rvert=\lvert\sin x\rvert\leqslant1$； 2. 奇函数； 3. 以 2π 为周期的周期函数.
5. 余弦函数 $y=\cos x$		$(-\infty,+\infty)$	1. 有界函数，$\lvert y\rvert=\lvert\cos x\rvert\leqslant1$； 2. 偶函数； 3. 以 2π 为周期的周期函数.
6. 正切函数 $y=\tan x$		$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$	1. 无界函数，$y\in\mathbf{R}$； 2. 奇函数； 3. 以 π 为周期的周期函数.
7. 余切函数 $y=\cot x$		$x\neq k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$	1. 无界函数，$y\in\mathbf{R}$； 2. 奇函数； 3. 以 π 为周期的周期函数.

续表

函　数	图　　象	定义域	主要性质
8. 反正弦函数 $y=\arcsin x$		$[-1,1]$	1. 有界函数，$\lvert\arcsin x\rvert\leqslant\frac{\pi}{2}$； 2. 奇函数； 3. 单调递增.
9. 反余弦函数 $y=\arccos x$		$[-1,1]$	1. 有界函数，$0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$； 2. 非奇非偶函数； 3. 单调递减.
10. 反正切函数 $y=\arctan x$		$(-\infty,+\infty)$	1. 有界函数，$\lvert\arctan x\rvert<\frac{\pi}{2}$； 2. 奇函数； 3. 单调递增.
11. 反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$		$(-\infty,+\infty)$	1. 有界函数，$0<\operatorname{arccot} x<\pi$； 2. 非奇非偶函数； 3. 单调递减.

2. 复合函数

由物理学知，物体的动能 E 是速度 v 的函数 $E=\frac{1}{2}mv^2$，式中 m 是物体的质量. 如果考虑物体上抛运动，把一个质量为 m 的物体以初速度 v_0 垂直上抛，由于地球引力的作用，它就不断减速，这时 $v=v_0-gt$，于是物体的动能 E 通过速度成为时间的函数，即

$$E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2.$$

$E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2$ 可以看成由 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 和 $v=v_0-gt$ 复合而成的一个函数.

定义 1.1.2 设有两个函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$，如果 $\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交集非空，那么，y 通过中间变量 u 的联系成为 x 的函数，我们把这个函数称为是由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，记作 $y=f[\varphi(x)]$.

必须注意，不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的. 例如，$y=\ln u$ 和 $u=-\sqrt{x^2+1}$ 就不能复合成一个复合函数，因为 $u=-\sqrt{x^2+1}$ 的值域是 $(-\infty,-1]$，与 $y=\ln u$ 的定义域 $(0,+\infty)$ 的交集为空集，因此不能复合.

复合函数不仅可以由两个函数复合而成，还可以由多个函数复合而成. 复合函数通常是由基本初等函数与常数经过四则运算形成的简单函数复合而成.

例 1.1.1 已知 $y=\ln u, u=4-v^2, v=\cos x$，将 y 表示成 x 的函数.

解 u 和 v 都是中间变量，所以 $y=\ln(4-v^2)=\ln(4-\cos^2 x)$.

例 1.1.2 指出下列复合函数是由哪些简单函数复合而成.

(1) $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$； (2) $y=\sin^2(x+1)$.

解 (1) $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$ 由 $y=e^u, u=\sqrt{v}, v=x^2+1$ 复合而成.

(2) $y=\sin^2(x+1)$ 由 $y=u^2, u=\sin v, v=x+1$ 复合而成.

3. ***初等函数***

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的复合构成的，可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

例如，$y=\dfrac{\sin x}{x}$，$y=\ln(x+1)$，$y=x^3+1$ 等都是初等函数，而 $y=1+x+x^2+\cdots$ 不是初等函数.

1.1.4 数学模型

数学建模是近些年发展起来的新学科，是数学理论与实际问题相结合的一门科学.

1. ***数学模型的含义***

数学模型是把部分现实世界的一个特定对象，为了一个特定目的，根据其内在规律，作出必要的简化和假设，运用适当的数学工具，采用形式化的数学语言，概括地、近似地表达出来的一种数学结构. 它或者能解释特定现象的现实性态，或者能预测对象的未来状况，或者能提供处理对象的最优决策或控制.

广义地说，一切数学概念、数学理论体系、数学公式、方程式、函数关系和由公式系列构成的算法系统等都可以称为数学模型. 从狭义上讲，只有那些反映特定问题或特定的具体事物系统的数学关系的结构，才称为数学模型，这种数学关系的结构可以是方程、计算机程序乃至图表和图形.

2. ***数学模型的建立过程***

利用数学方法解决实际问题时，首先要进行的工作是建立数学模型. 建立数学模型的过程，就是把错综复杂的实际问题简化、抽象为合理的数学结构的过程，是实践——理论——实践的循环过程(图 1-3).

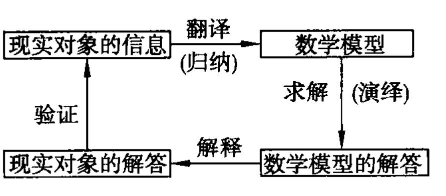


图 1-3

(1) 翻译

根据建立数学模型的目的，搜集必需的各种信息，对问题进行必要的、合理的简化，将实际问题翻译成数学问题，用数学语言确切地表述出来.

这是建立数学模型至关重要的过程，需要充分发挥想像力、洞察力和判断力，善于辨别主次，而且为了使处理方法简单，应尽量使问题线性化、均匀化，利用对象的内在规律和适当的数学工具，构造各个量间的等式关系或其他数学结构.

(2) 求解

可以采用解方程、画图形、证明定理、逻辑运算、数值运算等各种传统的和近代的数学方法，特别是计算机技术.

(3) 解释

将数学模型的解答用通俗易懂的语言翻译回现实对象，给出实际问题的解答.

(4) 验证

验证解答的准确性、合理性和适用性.

如果检验的结果是正确的，即可用来指导实际，否则，要重新考虑翻译、归纳的过程，修改数学模型，重新求解，再做验证，直至获得满意的结果为止.

3. 函数模型的建立

函数建模是一种极其重要的思想与方法，很多实际问题都可以转化为函数来解决. 建立函数模型的一般步骤为：

(1) 分析问题中哪些是变量，哪些是常量，分别用字母表示；

(2) 根据所给条件，运用数学、物理或其他知识，确定等量关系；

(3) 通过等量关系变形得出函数解析式，并指明定义域.

例 1.1.3 有一半径为 a 的半球形碗，在碗内随机放入一根质量均匀、长度为 $l(2a<l<4a)$ 的细杆，试建立细杆的中心所在位置的函数模型.

解 将问题简化在平面直角坐标系中，如图 1-4 所示. 设 $G(x,y)$ 为细杆中心，细杆与 y 轴交角为 θ，于是

$$x=|CG|=|GB|\sin\theta,$$
$$y=|OB|-|CB|=a-|GB|\cos\theta.$$

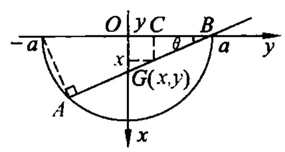


图 1-4

而

$$|GB|=|AB|-|AG|=2a\cos\theta-\frac{l}{2},$$

代入上式，便得细杆中心位置的函数模型为

$$\begin{cases} x=\left(2a\cos\theta-\dfrac{l}{2}\right)\sin\theta, \\ y=a-\left(2a\cos\theta-\dfrac{l}{2}\right)\cos\theta \end{cases} \quad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right).$$

习题 1-1

1. 下列函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$；　　(2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$.