高等专科学校试用教材

# 高等数学

吉林工学院数学教研室编

华中理工大学出版社

高等专科学校试用教材

# 高等数学

华中理工大学出版社

## 内 容 简 介

本书为高等专科学校高等数学教材．全书除包括微积分，微分方程等传统《高等数学》内容外，还包括矩阵、线性方程组等线性代数内容．书内各章附有习题，书后附有习题解答，便于教学和自学．

本书可供二年、三年不同学制专科选用，也可供中等专业学校选用。


高 等 数 学

吉林工学院数学教研室编

责任编辑　龙纯曼

*

华中理工大学出版社出版发行

（武昌喻家山）

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社洒阳印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：15.25　字数：324 000

1987年7月第1版　1989年3月第3次印刷

印数：10 001—15 000

ISBN 7-5609-0031-3/O·4

定价：3.10元

# 前　　言

本书是根据我院专科班教材《高等数学讲义》修改而成的，可供高等工科院校专科班使用，也可供中等专业学校选用。内容包括一元函数微积分、空间解析几何与向量代数、多元函微数积分、级数、微分方程和线性代数。本书内容深入浅出，并配备较多的例题，便于教学和自学。书中对超出基本要求的内容加了“*”号，供选用。全书教学可以用120学时完成。

本书由吴子陵、吴绪英（线性代数部分）执笔，刘正一、李玉亚担任原稿的主审，刘俊英、杜文思、陈义元和王承中参加了审稿。彭天华为习题核对了答案。

本书出版前，由华中工学院出版社委托程亚昆同志审阅了原稿，提出了许多宝贵的建设性的意见，谨致衷心谢意。

根据有关方面的意见，由王承中执笔对原稿进行了修改，并补写了部分内容。

由于编者水平有限，一定有许多不妥之处，诚恳地希望广大读者批评指正。

编　者

一九八六年七月

# 目 录

# 第一章　函数、极限、连续

## §1　变量与函数

### 一、常量与变量

在观察某种自然现象或技术过程时，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中不起变化，也就是保持固定的数值，这种量叫做常量；还有一些量在过程中是变化着的，也就是可以取不同的数值，这种量叫做变量。例如，自由落体在下落过程中，它们所经过的路程$S$和速度$v$都随着时间$t$而变化，这里的路程$S$速度$v$和时间$t$都是变量，而它的重力加速度$g$不变，是个常量。

一个量是常量还是变量，要根据具体情况作出具体分析，例如，重力加速度$g$，就小范围区域来说，可以认为是常量，就大范围区域来说，则是变量。

常量通常用字母$a$，$b$，$c$等表示，变量用$x$，$y$，$z$等表示。

任何一个变量，总有一定的变化范围，例如，某天的最高温度是8℃，最低温度是－6℃，那么，这一天的气温$T$的变化范围就是－6℃到8℃，或者说－6℃到8℃是变量$T$的取值范围。

如果变量的变化是连续的，常用区间来表示变量的变化范围。关于区间的名称和记号，在中学数学中已经学过，这里不再重复。

以后，时常会遇到被称做邻域的一种开区间，其规定如下：

设 $a$ 与$\delta$是两个实数，且$\delta>0$，满足不等式

$$|x-a|<\delta$$

的实数 $x$ 的全体叫作点 $a$ 的$\delta$邻域，点 $a$ 叫作这邻域的中心。$\delta$叫作这邻域的半径。

易知

$$|x-a|<\delta$$
$$\Longleftrightarrow -\delta<x-a<\delta$$
$$\Longleftrightarrow a-\delta<x<a+\delta,$$

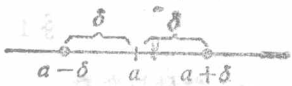

图1—1

因此，以点 $a$ 为中心的$\delta$邻域就是开区间 $(a-\delta,\ a+\delta)$，如图1—1。

二、函数概念

先看两个例子

**例1** 自由落体下落的距离 $S$ 和时间 $t$ 的关系是

$$S=\frac{1}{2}gt^2.$$

当 $t$ 在其变化范围内变化时，$S$ 也随之变化，$t$ 有一确定值时，$S$ 的值随之确定。

**例2** 金属圆板的面积 $A$ 与半径 $r$ 的关系是

$$A=\pi r^2.$$

当圆板受热膨胀时，半径 $r$ 发生变化，面积 $A$ 也随之变化，当 $r$ 在其变化范围内有一确定值时，面积 $A$ 的值也就确定。

上述二例具有共同的本质，那就是：在某一变化过程中有两个变量，其中一个发生变化，另一个就跟着变化，而且当其中一个取定了某个确定的值时，另一个按着一定的法则总有确定的值和它对应。这时我们说变量 $x$，$y$ 之间具有函数关系，称 $y$ 是 $x$ 的函数。其定义如下：

**定义** 设在某一变化过程中有两个变量 $x$ 和 $y$，如果当变

量 $x$ 在其变化范围内任意取定一个数值时，变量 $y$ 按照一定的法则总有确定的数值和它对应，则称 $y$ 是 $x$ 的函数。记作

$$y = f(x)$$

其中 $x$ 叫自变量，$y$ 叫因变量

函数的定义包括三个内容：

1．函数的定义域

自变量 $x$ 的变化范围叫做函数的定义域。

如果自变量取某一数值 $x_0$ 时，函数有确定的值和它对应，那么就说函数在 $x_0$ 处有定义。这时的函数值记作 $f(x_0)$。因此函数的定义域可以说成是使函数有定义的实数的全体。

定义域不同，函数就不相同，例如

$$y = 2\log_a x \text{与} y = \log_a x^2,$$

前者的定义域是 $(0, +\infty)$，后者的定义域是 $(-\infty, 0)$ 与 $(0, +\infty)$。

2．对应关系

定义中"变量 $y$ 按照一定的法则总有确定的数值和它对应"一语，表明了 $y$ 与 $x$ 之间的关系是按照一定的法则联系起来的。这个"一定的法则"就是 $x$ 与 $y$ 之间的对应关系，即函数关系。因此，对应关系不同就是不同的函数；给出 $y$ 与 $x$ 间的对应关系就是给出了函数。

函数记号 $y = f(x)$ 中的字母 $f$ 是表示 $x$ 与 $y$ 之间对应关系的，也就是定义中的"一定的法则"。因此，当同时考察几个不同函数时，为了避免混淆，就要用不同的字母来表示。例如

$$y = x \text{与} y = \sqrt{x^2},$$

虽然定义域相同，但对应关系不同，仍是两个不同的函数。如果同时讨论它们，应当记作

$$y = f(x) = x \text{与} y = F(x) = \sqrt{x^2}$$

3．函数的值域

设函数$y=f(x)$的定义域为$I$，那么对于$I$中的每一个$x$值，函数$y$就有确定的值$f(x)$和它对应，所有函数值的全体叫做函数的值域。

例如，$y=x$的定义域是$(-\infty, +\infty)$，值域是$(-\infty, +\infty)$；

$y=\sqrt{x^2}$的定义域是$(-\infty, +\infty)$，值域是$(0, +\infty)$；

$y=\sin x$的定义域是$(-\infty, +\infty)$，值域是$[-1,1]$。

此外，对于函数的定义域还应注意的是：自变量在定义域内任意取定一个数值时，“变量$y$……总有确定的数值和它对应”，至于函数$y$有几个数值和自变量取定的那个数值相对应，由概念的内涵可知，至少一个，多则不限。如果对于自变量的每一个值，函数都只有一个确定的值和它对应，这种函数叫单值函数，否则叫多值函数。例如，$y^2=x$，函数$y$在$[0, +\infty)$内是$x$的双值函数，即对于$x$的每一个数值，$y$有两个数值和它对应。

在函数定义中，并不要求在自变量变化时函数一定要变，只要求有确定的函数值和它对应即可。因此在此种意义下，常量可以当作函数来看待，即常量是这样一个函数，它对于自变量的一切值来说，函数恒取相同的数值，其图象是平行于$x$轴的一条直线。

三、函数的表示法

常用来表示函数的方法有三种：

1．公式法

这是用数学式子表示自变量和因变量之间对应关系的方法。有些函数在其定义域内用一个式子就可完全表示，有些函数在其定义域内要用几个式子才能完全表示。后者称为分段函

数，例如，

$$y=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x, & x\geqslant 0; \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

再如，

$$y=\begin{cases} 1, & x>0; \\ 0, & x=0; \\ -1, & x<0. \end{cases}$$

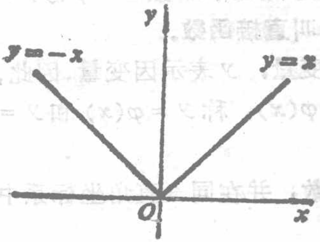

图1—2

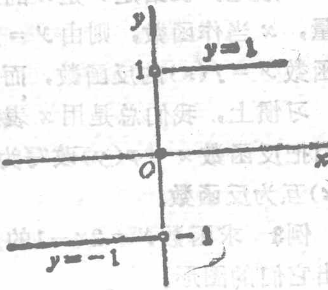

图1—3

2．表格法

将一系列的自变量值与对应的函数值列成表，如平方表、对数表、三角函数表等等，这种表示函数的方法叫做表格法。

3．图示法

用坐标系中直线或曲线表示函数的方法叫图示法。

四、反函数及其图形

在自由落体运动中，我们选定时间$t$为自变量，距离$S$为函数，则距离$S$与$t$的函数关系为

$$S=\frac{1}{2}gt^2.$$

我们也可选取距离$S$作为自变量，而时间$t$作函数，这时$t$与$S$的函数关系式为

$$t=\sqrt{\frac{2S}{g}}.$$

我们称$t=\sqrt{\frac{2S}{g}}$是$S=\frac{1}{2}gt^2$的反函数。当然$S=\frac{1}{2}gt^2$也是$t=\sqrt{\frac{2S}{g}}$的反函数，它们互为反函数。

一般地，设给定$y$是$x$的函数$y=f(x)$，如果把$y$当作自变量，$x$当作函数，则由$y=f(x)$所确定的函数$x=\varphi(y)$叫做函数$y=f(x)$的反函数，而$f(x)$叫直接函数。

习惯上，我们总是用$x$表示自变量，$y$表示因变量，因此，我们把反函数$x=\varphi(y)$改写为$y=\varphi(x)$，称$y=\varphi(x)$和$y=f(x)$互为反函数。

**例3** 求函数$y=2x-1$的反函数，并在同一直角坐标系中作出它们的图形。

**解** 由$y=2x-1$解出$x$，得所要求的反函数为

$$x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2},$$

再改写为

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.$$

直接函数$y=2x-1$的图形是通过点$\left(\frac{1}{2},0\right)$与点$(0,-1)$的直线，而反函数$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$的图形是通过点$\left(0,\frac{1}{2}\right)$与点$(-1,0)$的直线（图1—4）

从图1—4可以看出，直接函数$y=2x-1$的图形与反函数$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$的图形是关于直线$y=x$对称的。这结论具有

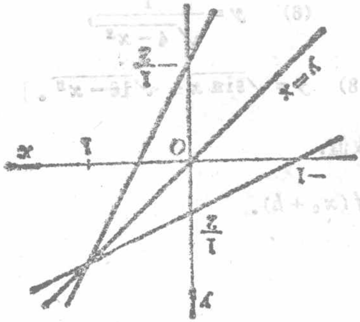


图1—4

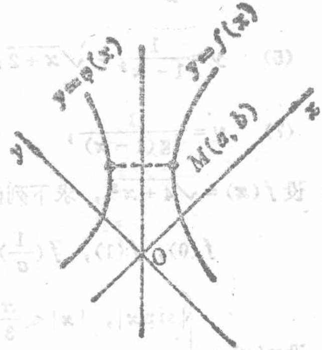


图1—5

普遍的意义，即我们可以证明：反函数$y=\varphi(x)$的图形与直较函数$y=f(x)$的图形对称于直线$y=x$（图1—5）。

## 习　题　1

1．下列各题中，函数$f(x)$和$\varphi(x)$是否相同？为什么？在哪一区间内它们是相同的？

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$\varphi(x)=1$；

(2) $f(x)=\lg x^2$，$\varphi(x)=2\lg x$；

(3) $f(x)=x$，$\varphi(x)=(\sqrt{x})^2$；

(4) $f(x)=x$，$\varphi(x)=\sqrt{x^2}$。

2．求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$；　　(2) $y=\sqrt{3x+4}$；

(3) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$; (4) $y=\sqrt{x^2-1}$;

(5) $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$; (6) $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

(7) $y=\frac{1}{\lg(1-x)}$; (8) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$。

3．设$f(x)=\sqrt{4+x^2}$，求下列函数值：

$$f(0),\ f(1),\ f\left(\frac{1}{a}\right),\ f(x_0+h).$$

4．设$\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\frac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\frac{\pi}{3},\end{cases}$

求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$。

5．若$F(x)=x^2+\cos x$，证明$F(x)=F(-x)$。

6．若$\varphi(x)=\sin x-5x^3$，证明$\varphi(-x)=-\varphi(x)$。

7．若$\psi(x)=2\sin x-3\cos x$，证明$\psi(x+2\pi)=\psi(x)$。

8．求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$； (2) $y=\frac{1-x}{1+x}$。

## §2 函数的几种特性

### 一、函数的奇偶性

如果函数$f(x)$对于定义域内的任何$x$，恒有$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为偶函数。

例如，函数$f(x)=x^2$，由于$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$，所以，$f(x)=x^2$是偶函数。

对于偶函数，因为$f(-x)=f(x)$，所以，如果点$M(x,$