

高等专科学校试用教材

高等 数学

吉林工学院数学教研室编

华中理工大学出版社

内 容 简 介

高等专科学校试用教材

高等数学

华中理工大学出版社

内 容 简 介

本书为高等专科学校高等数学教材。全书除包括微积分、微分方程等传统《高等数学》内容外，还包括矩阵、线性方程组等线性代数内容。书内各章附有习题，书后附有习题解答，便于教学和自学。

本书可供二年、三年不同学制专科选用，也可供中等专业学校选用。

高 等 数 学

吉林工学院数学教研室编

责任编辑 龙纯曼

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山)

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社沔阳印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：15.25 字数：324 000

1987年7月第1版 1989年3月第3次印刷

印数：10 001—15 000

ISBN 7-5609-0031-3/O·4

定价：3.10元

前 言

本书是根据我院专科班教材《高等数学讲义》修改而成的，可供高等工科院校专科班使用，也可供中等专业学校选用。内容包括一元函数微积分、空间解析几何与向量代数、多元函数微分积分、级数、微分方程和线性代数。本书内容深入浅出，并配备较多的例题，便于教学和自学。书中对超出基本要求的内容加了“*”号，供选用。全书教学可以用120学时完成。

本书由吴子陵、吴绪英（线性代数部分）执笔，刘正一、李玉亚担任原稿的主审，刘俊英、杜文思、陈义元和王承中参加了审稿。彭天华为习题核对了答案。

本书出版前，由华中工学院出版社委托程亚昆同志审阅了原稿，提出了许多宝贵的建设性的意见，谨致衷心谢意。

根据有关方面的意见，由王承中执笔对原稿进行了修改，并补写了部分内容。

由于编者水平有限，一定有许多不妥之处，诚恳地希望广大读者批评指正。

编 者

一九八六年七月

目 录

第一章 函数、极限、连续	(1)
§1 变量与函数	(1)
习题 1	(7)
§2 函数的几种特性	(8)
习题 2	(11)
§3 初等函数	(12)
习题 3	(19)
§4 极限概念	(20)
习题 4	(24)
§5 极限运算	(24)
习题 5	(27)
§6 极限存在准则 两个重要极限	(28)
习题 6	(33)
§7 无穷小和无穷大	(33)
习题 7	(38)
§8 函数的连续性	(39)
习题 8	(46)
第二章 导数与微分	(47)
§1 导数概念	(47)
习题 1	(53)
§2 导数的基本公式与运算法则	(54)
习题 2	(68)
§3 高阶导数	(70)
习题 3	(73)
§4 隐函数的导数 由参数方程所确定的函数的导数	(73)
习题 4	(79)

§5 微分	(80)
习题 5	(88)
第三章 中值定理与导数的应用	(90)
§1 中值定理	(90)
习题 1	(94)
§2 罗必塔 (L'Hospital) 法则	(94)
习题 2	(100)
§3 函数的增减性与极值	(101)
习题 3	(106)
§4 最大值、最小值问题	(107)
习题 4	(111)
§5 曲线的凹向与拐点 函数图象的描绘	(112)
习题 5	(117)
§6 曲线的曲率	(118)
习题 6	(125)
第四章 不定积分	(127)
§1 不定积分的概念与性质	(127)
习题 1	(131)
§2 换元积分法	(132)
习题 2	(139)
§3 分部积分法	(141)
习题 3	(145)
§4 有理函数、三角函数的有理式及简单 无理函数的积分举例	(145)
习题 4	(151)
§5 积分表的使用	(152)
习题 5	(154)
第五章 定积分及其应用	(155)
§1 定积分的概念及性质	(155)

习题 1	(161)
§2 微积分基本公式	(163)
习题 2	(165)
§3 定积分的换元法与分部积分法	(166)
习题 3	(171)
§4 广义积分	(172)
习题 4	(176)
§5 定积分的应用	(176)
习题 5	(189)
第六章 向量代数与空间解析几何 简介	(192)
§1 空间直角坐标系	(192)
习题 1	(195)
§2 向量及其线性运算	(195)
习题 2	(200)
§3 向量的坐标	(200)
习题 3	(204)
§4 向量的数量积	(205)
习题 4	(208)
§5 曲面	(209)
习题 5	(220)
§6 空间曲线	(221)
习题 6	(226)
第七章 多元函数微分法	(227)
§1 多元函数的基本概念	(227)
习题 1	(233)
§2 偏导数	(233)
习题 2	(238)
§3 全微分	(239)
习题 3	(242)

§ 4 多元复合函数的求导法则	(242)
习题 4	(247)
§ 5 多元函数的极值 最大值、最小值问题	(248)
习题 5	(255)
第八章 二重积分	(256)
§ 1 二重积分的概念与性质	(256)
习题 1	(261)
§ 2 利用直角坐标计算二重积分	(262)
习题 2	(273)
§ 3 利用极坐标计算二重积分	(274)
习题 3	(279)
第九章 曲线积分	(281)
§ 1 对弧长的曲线积分	(281)
习题 1	(284)
§ 2 对坐标的曲线积分	(285)
习题 2	(293)
* § 3 格林公式	(293)
习题 3	(300)
第十章 级数	(301)
§ 1 常数项级数的基本概念 幂级数及其收敛性	(301)
习题 1	(307)
§ 2 函数展开成幂级数	(308)
习题 2	(314)
§ 3 傅立叶级数	(314)
习题 3	(324)
第十一章 常微分方程	(325)
§ 1 微分方程的一般概念	(325)
习题 1	(328)
§ 2 可分离变量的微分方程 齐次方程	(328)

习题 2	(333)
§ 3 一阶线性微分方程及可降阶的高阶方程	(334)
习题 3	(339)
• § 4 二阶常系数齐次线性微分方程	(340)
习题 4	(345)
• § 5 二阶常系数非齐次线性微分方程	(345)
习题 5	(350)
第十二章 行列式	(351)
§ 1 二、三阶行列式	(351)
§ 2 三阶行列式的性质	(355)
§ 3 n 阶行列式	(361)
§ 4 克莱姆法则	(369)
习题	(372)
第十三章 矩阵及其运算	(376)
§ 1 线性变换与矩阵的概念	(376)
§ 2 矩阵的运算	(379)
§ 3 几个特殊形式的矩阵	(390)
§ 4 逆矩阵及其求法	(394)
习题	(405)
第十四章 矩阵的秩和线性方程组	(411)
§ 1 矩阵的秩	(411)
§ 2 用矩阵的初等行变换解非齐次线性方程组	(415)
§ 3 用矩阵的初等行变换解齐次线性方程组	(419)
习题	(423)
附录	(426)
习题答案	(452)

第一章 函数、极限、连续

§1 变量与函数

一、常量与变量

在观察某种自然现象或技术过程时，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中不起变化，也就是保持固定的数值，这种量叫做常量；还有一些量在过程中是变化着的，也就是可以取不同的数值，这种量叫做变量。例如，自由落体在下落过程中，它们所经过的路程 S 和速度 v 都随着时间 t 而变化，这里的路程 S 速度 v 和时间 t 都是变量，而它的重力加速度 g 不变，是个常量。

一个量是常量还是变量，要根据具体情况作出具体分析，例如，重力加速度 g ，就小范围区域来说，可以认为是常量，就大范围区域来说，则是变量。

常量通常用字母 a, b, c 等表示，变量用 x, y, z 等表示。

任何一个变量，总有一定的变化范围，例如，某天的最高温度是 8°C ，最低温度是 -6°C ，那么，这一天的气温 T 的变化范围就是 -6°C 到 8°C ，或者说 -6°C 到 8°C 是变量 T 的取值范围。

如果变量的变化是连续的，常用区间来表示变量的变化范围。关于区间的名称和记号，在中学数学中已经学过，这里不再重复。

以后，时常会遇到被称做邻域的一种开区间，其规定如下：

设 a 与 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$, 满足不等式

$$|x - a| < \delta$$

的实数 x 的全体叫作点 a 的 δ 邻域, 点 a 叫作这邻域的中心, δ 叫作这邻域的半径.

易知

$$|x - a| < \delta$$

$$\iff -\delta < x - a < \delta$$

$$\iff a - \delta < x < a + \delta,$$

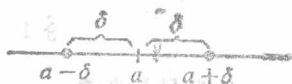


图1-1

因此, 以点 a 为中心的 δ 邻域就是开区间 $(a - \delta, a + \delta)$, 如图1-1.

二、函数概念

先看两个例子

例1 自由落体下落的距离 S 和时间 t 的关系是

$$S = \frac{1}{2}gt^2.$$

当 t 在其变化范围内变化时, S 也随之变化, t 有一确定值时, S 的值随之确定.

例2 金属圆板的面积 A 与半径 r 的关系是

$$A = \pi r^2.$$

当圆板受热膨胀时, 半径 r 发生变化, 面积 A 也随之变化, 当 r 在其变化范围内有一确定值时, 面积 A 的值也就确定.

上述二例具有共同的本质, 那就是: 在某一变化过程中有两个变量, 其中一个发生变化, 另一个就跟着变化, 而且当其中一个取定了某个确定的值时, 另一个按着一定的法则总有确定的值和它对应. 这时我们说变量 x , y 之间具有函数关系, 称 y 是 x 的函数. 其定义如下:

定义 设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y , 如果当变

量 x 在其变化范围内任意取定一个数值时, 变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应, 则称 y 是 x 的函数。记作

$$y = f(x)$$

其中 x 叫自变量, y 叫因变量

函数的定义包括三个内容:

1. 函数的定义域

自变量 x 的变化范围叫做函数的定义域。

如果自变量取某一数值 x_0 时, 函数有确定的值和它对应, 那么就说函数在 x_0 处有定义。这时的函数值记作 $f(x_0)$ 。因此函数的定义域可以说成是使函数有定义的实数的全体。

定义域不同, 函数就不相同, 例如

$$y = 2\log_0 x \text{ 与 } y = \log_0 x^2,$$

前者的定义域是 $(0, +\infty)$, 后者的定义域是 $(-\infty, 0)$ 与 $(0, +\infty)$ 。

2. 对应关系

定义中“变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应”一语, 表明了 y 与 x 之间的关系是按照一定的法则联系起来的。这个“一定的法则”就是 x 与 y 之间的对应关系, 即函数关系。因此, 对应关系不同就是不同的函数; 给出 y 与 x 间的对应关系就是给出了函数。

函数记号 $y = f(x)$ 中的字母 f 是表示 x 与 y 之间对应关系的, 也就是定义中的“一定的法则”。因此, 当同时考察几个不同函数时, 为了避免混淆, 就要用不同的字母来表示。例如

$$y = x \text{ 与 } y = \sqrt{x^2},$$

虽然定义域相同, 但对应关系不同, 仍是两个不同的函数。如果同时讨论它们, 应当记作

$$y = f(x) = x \text{ 与 } y = F(x) = \sqrt{x^2}$$

3. 函数的值域

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I ，那么对于 I 中的每一个 x 值，函数 y 就有确定的值 $f(x)$ 和它对应，所有函数值的全体叫做函数的值域。

例如， $y = x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$ ，值域是 $(-\infty, +\infty)$ ；

$y = \sqrt{x^2}$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$ ，值域是 $(0, +\infty)$ ；

$y = \sin x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$ ，值域是 $[-1, 1]$ 。

此外，对于函数的定义域还应注意的是：自变量在定义域内任意取定一个数值时，“变量 y ……总有确定的数值和它对应”，至于函数 y 有几个数值和自变量取定的那个数值相对应，由概念的内涵可知，至少一个，多则不限。如果对于自变量的每一个值，函数都只有一个确定的值和它对应，这种函数叫单值函数，否则叫多值函数。例如， $y^2 = x$ ，函数 y 在 $[0, +\infty)$ 内是 x 的双值函数，即对于 x 的每一个数值， y 有两个数值和它对应。

在函数定义中，并不要求在自变量变化时函数一定要变，只要求有确定的函数值和它对应即可。因此在此种意义下，常量可以当作函数来看待，即常量是这样一个函数，它对于自变量的一切值来说，函数恒取相同的数值，其图象是平行于 x 轴的一条直线。

三、函数的表示法

常用来表示函数的方法有三种：

1. 公式法

这是用数学式子表示自变量和因变量之间对应关系的方法。有些函数在其定义域内用一个式子就可完全表示，有些函数在其定义域内要用几个式子才能完全表示。后者称为分段函

数，例如，

$$y = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

再如，

$$y = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

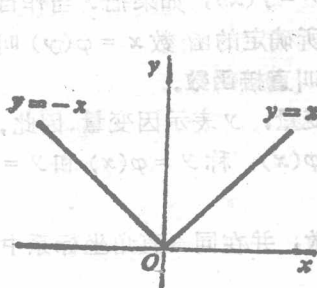


图1-2

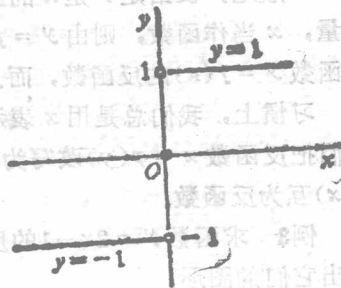


图1-3

2. 表格法

将一系列的自变量值与对应的函数值列成表，如平方表、对数表、三角函数表等等，这种表示函数的方法叫做表格法。

3. 图示法

用坐标系中直线或曲线表示函数的方法叫图示法。

四、反函数及其图形

在自由落体运动中，我们选定时间 t 为自变量，距离 S 为函数，则距离 S 与 t 的函数关系为

$$S = \frac{1}{2}gt^2.$$

我们也可选取距离 S 作为自变量,而时间 t 作函数,这时 t 与 S 的函数关系式为

$$t = \sqrt{\frac{2S}{g}}.$$

我们称 $t = \sqrt{\frac{2S}{g}}$ 是 $S = \frac{1}{2}gt^2$ 的反函数,当然 $S = \frac{1}{2}gt^2$ 也是

$t = \sqrt{\frac{2S}{g}}$ 的反函数,它们互为反函数.

一般地,设给定 y 是 x 的函数 $y = f(x)$,如果把 y 当作自变量, x 当作函数,则由 $y = f(x)$ 所确定的函数 $x = \varphi(y)$ 叫做函数 $y = f(x)$ 的反函数,而 $f(x)$ 叫直接函数.

习惯上,我们总是用 x 表示自变量, y 表示因变量,因此,我们把反函数 $x = \varphi(y)$ 改写为 $y = \varphi(x)$,称 $y = \varphi(x)$ 和 $y = f(x)$ 互为反函数.

例3 求函数 $y = 2x - 1$ 的反函数,并在同一直角坐标系中作出它们的图形.

解 由 $y = 2x - 1$ 解出 x ,得所要求的反函数为

$$x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2},$$

再改写为

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

直接函数 $y = 2x - 1$ 的图形是通过点 $(\frac{1}{2}, 0)$ 与点 $(0, -1)$ 的直线,而反函数 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ 的图形是通过点 $(0, \frac{1}{2})$ 与点 $(-1, 0)$ 的直线(图1-4)

从图1-4可以看出,直接函数 $y = 2x - 1$ 的图形与反函数 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ 的图形是关于直线 $y = x$ 对称的.这结论具有

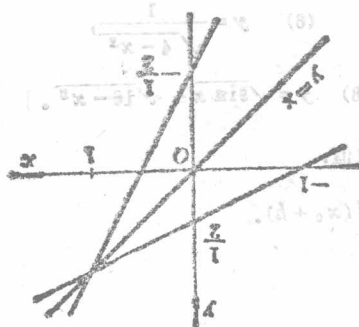


图1-4

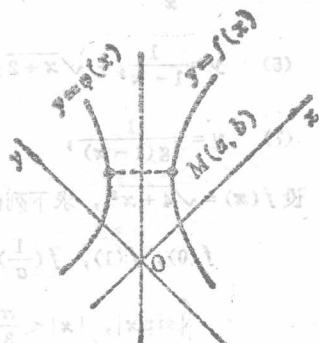


图1-5

普遍的意义，即我们可以证明：反函数 $y = \varphi(x)$ 的图形与直接函数 $y = f(x)$ 的图形对称于直线 $y = x$ (图1-5)。

习 题 1

1. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 是否相同？为什么？在哪一区间内它们是相同的？

(1) $f(x) = \frac{x}{x}, \varphi(x) = 1;$

(2) $f(x) = \lg x^2, \varphi(x) = 2 \lg x;$

(3) $f(x) = x, \varphi(x) = (\sqrt{x})^2;$

(4) $f(x) = x, \varphi(x) = \sqrt{x^2}.$

2. 求下列函数的定义域。

(1) $y = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2};$

(2) $y = \sqrt{3x + 4};$

$$(3) \quad y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2},$$

$$(4) \quad y = \sqrt{x^2-1},$$

$$(5) \quad y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2},$$

$$(6) \quad y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}},$$

$$(7) \quad y = \frac{1}{\lg(1-x)},$$

$$(8) \quad y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16-x^2}.$$

3. 设 $f(x) = \sqrt{4+x^2}$, 求下列函数值:

$$f(0), f(1), f\left(\frac{1}{a}\right), f(x_0+h).$$

$$4. \text{ 设 } \varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3}, \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3}, \end{cases}$$

$$\text{求 } \varphi\left(\frac{\pi}{6}\right), \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right), \varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right), \varphi(-2).$$

5. 若 $F(x) = x^2 + \cos x$, 证明 $F(x) = F(-x)$.

6. 若 $\varphi(x) = \sin x - 5x^3$, 证明 $\varphi(-x) = -\varphi(x)$.

7. 若 $\psi(x) = 2\sin x - 3\cos x$, 证明 $\psi(x+2\pi) = \psi(x)$.

8. 求下列函数的反函数:

$$(1) \quad y = \sqrt[3]{x+1},$$

$$(2) \quad y = \frac{1-x}{1+x}.$$

§2 函数的几种特性

一、函数的奇偶性

如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任何 x , 恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

例如, 函数 $f(x) = x^2$, 由于 $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, 所以, $f(x) = x^2$ 是偶函数.

对于偶函数, 因为 $f(-x) = f(x)$, 所以, 如果点 $M(x,$