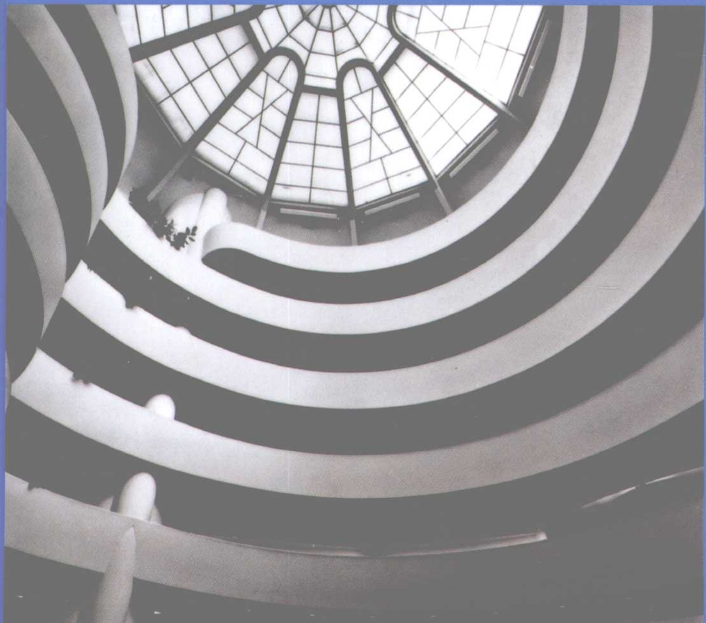
普通高等教育"十一五"规划教材

LINEAR ALGEBRA
AND
SPACE ANALYTIC GEOMETRY

线性代数与空间解析几何

陈东升 主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十一五”规划教材

线性代数与空间解析几何

主　编　陈东升
副主编　黄守佳　谭瑞梅
参　编　（以姓氏笔画为序）
全允战　陈东升　秦建国
郭晓丽　黄守佳　谭瑞梅

机 械 工 业 出 版 社

本书是作者在使用多年同名讲义的基础上，根据21世纪科技人才素质的要求，汲取国内外改革教材的长处修改而成。它整合了线性代数与空间解析几何两部分内容，把代数与几何有机地结合起来，内容包括行列式、向量代数、平面与直线、矩阵、线性方程组、特征值与特征向量、二次型与二次曲面等。本书条理清晰，论证严谨，例题丰富，并配有适量习题供各层次的读者练习。书中带“*”号部分可选讲。

本书可作为工科和其他非数学类专业的高等院校教学用书，也可作为各大专院校或成人教育学院的学生教材用，还可作为考研生、自学者和广大科技工作者的参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与空间解析几何/陈东升主编．—北京：机械工业出版社，2008.7
普通高等教育“十一五”规划教材
ISBN 978-7-111-24310-6

Ⅰ．线…　Ⅱ．陈…　Ⅲ．①线性代数-高等学校-教材②空间几何：解析几何-高等学校-教材　Ⅳ．O151.2　O182.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第087758号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：郑　玫　韩效杰
责任编辑：董　磊　版式设计：霍永明　责任校对：程俊巧
封面设计：张　静　责任印制：邓　博
北京京丰印刷厂印刷
2008年7月第1版·第1次印刷
169mm×239mm·17.25印张·333千字
标准书号：ISBN 978-7-111-24310-6
定价：28.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
销售服务热线电话：（010）68326294
购书热线电话：（010）88379639 88379641 88379643
编辑热线电话：（010）88379711

前　言

本书是作者在使用多年同名讲义的基础上，根据21世纪科技人才素质的要求，汲取国内外改革教材的长处修改而成。它将线性代数与空间解析几何的内容结合在一起，用代数方法解决几何问题，为代数理论提供几何背景。整合线性代数与空间解析几何，可以借助几何的直观使一些抽象的代数概念和理论，容易理解也可以借助矩阵方法处理解析几何中一些原本比较困难的问题，例如直线问题、直线与平面的位置关系问题、二次曲面或平面二次曲线的化简问题等。在整合的方式上，本书不求水乳交融，而是在保持两部分内容相对独立的基础上，加强相互呼应、联系和渗透。本书力求做到代数方法和几何方法的统一，一方面通过矩阵方法研究和解决线性代数和解析几何中的问题，另一方面对代数方法的几何背景作了深入的阐述。

在编写过程中，本书以全国高校“线性代数与空间解析几何教学基本要求”为依据，以考研大纲为准则，借鉴了许多国内外优秀教材在处理问题上的思路和方法，在内容上争取精简够用，在表达上力求通俗易懂。本书重视例题和习题的设计与选配，除了选配巩固课程内容的基本题目外，还选配了部分提高题以及近几年的考研试题，以适应各层次学生的需求。

20世纪以来，由于科学技术的飞速发展，数学的应用范围急剧扩展，它不仅深入地应用于自然科学和工程技术中，而且更广泛渗透到诸如生命科学、经济与社会科学领域。数学建模是联系数学和实际问题的桥梁，是数学在各个领域广泛应用的具体体现。为此，本书最后一章增加了线性代数与空间解析几何的应用部分作为选讲内容。

全书由陈东升负责定稿，各位参编老师做了分配的工作。

由于经验不足，加之水平有限，书中缺点、错误在所难免，恳请广大读者同行批评指正。

编　者

2008年6月于郑州轻工业学院

目　　录

前言
第 1 章　行列式及其计算 …… 1
1.1　二阶和三阶行列式 …… 1
1.1.1　二阶行列式 …… 1
1.1.2　三阶行列式 …… 3
1.2　n 阶行列式 …… 4
1.2.1　排列与反序数 …… 4
1.2.2　n 阶行列式的定义 …… 7
1.3　行列式的性质 …… 10
1.3.1　行列式的性质 …… 10
1.3.2　利用性质计算行列式 …… 13
1.4　行列式按行（列）展开 …… 18
1.4.1　余子式、代数余子式的概念 …… 18
1.4.2　行列式按行（列）展开 …… 20
1.5　克莱姆（Cramer）法则 …… 25
1.5.1　克莱姆法则 …… 25
1.5.2　齐次线性方程组有非零解的条件 …… 28
习题一 …… 29
第 2 章　向量代数　平面与直线 …… 34
2.1　向量及其线性运算 …… 34
2.1.1　向量的概念及其表示 …… 34
2.1.2　向量的线性运算 …… 35
2.2　向量的投影及坐标表示 …… 38
2.2.1　向量的投影及其性质 …… 38
2.2.2　空间直角坐标系与点的坐标 …… 40
2.2.3　向量在坐标轴上的分量与向量的坐标 …… 42
2.2.4　向量的模、方向角和方向余弦 …… 45
2.3　数量积　向量积　混合积 …… 46
2.3.1　向量的数量积 …… 46
2.3.2　向量的向量积 …… 49
2.3.3　向量的混合积 …… 52
2.4　空间的平面和直线 …… 53

2.4.1 平面方程 …… 54
2.4.2 空间直线的方程 …… 57
2.4.3 与直线、平面有关的一些问题 …… 62
习题二 …… 66
第 3 章 矩阵及其运算 …… 70
3.1 矩阵 …… 70
3.1.1 矩阵的概念 …… 70
3.1.2 几种特殊的矩阵 …… 73
3.2 矩阵的运算 …… 75
3.2.1 矩阵的加法 …… 75
3.2.2 数乘矩阵 …… 75
3.2.3 矩阵的乘法 …… 76
3.2.4 方阵的幂 …… 80
3.2.5 矩阵的转置 …… 81
3.2.6 方阵的行列式 …… 83
3.2.7 共轭矩阵 …… 84
3.3 矩阵分块法 …… 85
3.3.1 矩阵的分块 …… 85
3.3.2 分块运算 …… 86
3.3.3 按行分块与按列分块 …… 88
3.4 矩阵的初等变换 …… 90
3.4.1 初等变换 …… 90
3.4.2 初等矩阵 …… 92
3.5 逆矩阵 …… 96
3.5.1 逆矩阵的概念 …… 96
3.5.2 可逆矩阵的判定及其求法 …… 97
3.5.3 用初等变换法求解矩阵方程 …… 104
3.6 矩阵的秩 …… 107
3.6.1 矩阵秩的概念 …… 107
3.6.2 利用初等变换求矩阵的秩 …… 109
3.7 线性方程组的高斯消元法 …… 112
3.7.1 高斯消元法 …… 112
3.7.2 线性方程组有解的判定定理 …… 114
习题三 …… 119
第 4 章 *n* 维向量与线性方程组 …… 126
4.1 *n* 维向量 …… 126
4.1.1 *n* 维向量的定义 …… 126

4.1.2 向量的运算 …… 127
4.1.3 向量空间及其子空间 …… 129
4.2 向量组的线性相关性 …… 130
4.2.1 向量组的线性组合 …… 130
4.2.2 向量组的线性相关性 …… 134
4.2.3 线性组合与线性相关的关系 …… 138
4.3 向量组的秩 …… 140
4.3.1 向量组的极大线性无关组 …… 140
4.3.2 向量组的秩 …… 141
4.3.3 向量组的秩与矩阵的秩的关系 …… 143
4.4 齐次线性方程组的解 …… 148
4.4.1 向量空间的基、维数与坐标 …… 149
4.4.2 基变换与坐标变换 …… 150
4.4.3 齐次线性方程组的解空间 …… 153
4.4.4 齐次线性方程组的基础解系 …… 154
4.5 非齐次线性方程组解的结构 …… 160
4.5.1 非齐次线性方程组解的性质 …… 161
4.5.2 非齐次线性方程组解的结构 …… 162
4.5.3 直线、平面的相对位置 …… 166
习题四 …… 170
第5章 特征值与特征向量 …… 175
5.1 n维向量的内积 …… 175
5.1.1 内积 …… 175
5.1.2 标准正交基与施密特（Schimidt）方法 …… 179
5.1.3 正交矩阵和正交变换 …… 182
5.2 矩阵的特征值与特征向量 …… 183
5.2.1 特征值与特征向量的概念 …… 183
5.2.2 特征值与特征向量的计算 …… 185
5.3 相似矩阵 …… 189
5.3.1 相似矩阵的基本概念 …… 189
5.3.2 矩阵的相似对角化 …… 191
5.4 实对称矩阵的对角化 …… 192
5.4.1 实对称矩阵的特征值与特征向量的性质 …… 192
5.4.2 实对称矩阵的对角化 …… 193
习题五 …… 196
第6章 二次型与二次曲面 …… 201
6.1 二次型及其标准形 …… 201

6.1.1 二次型及其矩阵 …… 201
6.1.2 二次型的标准形 …… 204
6.2 正定二次型 …… 208
6.2.1 正定二次型的概念 …… 208
6.2.2 正定二次型的判定 …… 209
6.3 二次曲面 …… 213
6.3.1 球面 …… 213
6.3.2 柱面 …… 214
6.3.3 锥面 …… 216
6.3.4 旋转面 …… 217
6.3.5 空间曲线 …… 219
6.3.6 二次曲面的类型 …… 222
6.4 二次型在二次曲面研究中的应用 …… 226
习题六 …… 231
第7章* 线性代数与空间解析几何的应用模型 …… 235
7.1 行列式的应用模型 …… 235
7.2 线性方程组模型 …… 236
7.3 矩阵模型 …… 240
7.3.1 视图制作中的矩阵代数法 …… 240
7.3.2 平面型碳氢化合物分子结构简图邻接阵 …… 242
7.3.3 密码和解密模型 …… 243
7.3.4 矩阵在通讯网络中的应用 …… 244
7.4 线性方程组在量纲分析中的应用 …… 245
7.5 向量组的线性相关性在魔方中的应用 …… 248
部分习题参考答案 …… 251

第 1 章　行列式及其计算

行列式起源于解 n 元线性方程组，它是研究线性代数的一个重要工具，近代它又被广泛地运用到物理、工程技术等多个领域. 本章从解二元与三元线性方程组入手引进二阶与三阶行列式的概念，进而用排列的奇偶性把行列式的概念推广到 n 阶，讨论行列式的基本性质，并介绍 n 阶行列式的计算方法与一些技巧.

1.1　二阶和三阶行列式

1.1.1　二阶行列式

对二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1-1}$$

利用消元法，可得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}. \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，可得方程组(1-1)的唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1-2}$$

为了便于记忆上述解的公式，引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1-3}$$

称为**二阶行列式**. 其中数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式(1-3)的元素，元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表示该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列.

利用二阶行列式，式(1-2)可表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

其中分母是由方程组(1-1)中未知量的系数按原来的位置排列成的行列式，称为方程组(1-1)的**系数行列式**；分子则分别是将系数行列式的第一列和第二列换成方程组(1-1)右端的常数项所得到的行列式. 于是，若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

则当 $D \neq 0$ 时，方程组(1-1)有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

二阶行列式(1-3)中，等号右端的表示式又称为**行列式的展开式**，二阶行列式的展开式可以用所谓的**对角线法则**得到，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

其中，实线上两个元素的乘积带正号，虚线上两个元素的乘积带负号，所得两项的代数和就是二阶行列式的展开式.

称上式中的实线为**主对角线**，虚线为**副对角线**. 于是二阶行列式便是主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2, \\ x_1 + 4x_2 = 3. \end{cases}$$

解 由于方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0,$$

所以，方程组有唯一解，又由于

$$D_1=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=2,\qquad D_2=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=7,$$

因此方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{2}{10}=0.2,\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{7}{10}=0.7.$$

1.1.2 三阶行列式

为了得出三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{1-4}$$

的类似解法，引入**三阶行列式**

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

这是一个包括六项的代数和，每一项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积，其中有三项前面带正号，另三项前面带负号.

三阶行列式也可用对角线法则得到. 三阶行列式的对角线法则如图 1-1 所示。其中每一条实线上三个元素的乘积带正号，每一条虚线上的三个元素的乘积带负号，所得六项的代数和就是三阶行列式的展开式.

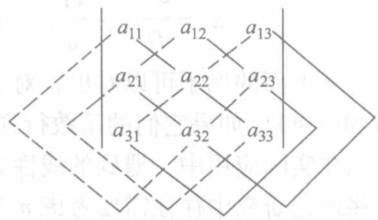


图 1-1

通过对类似于方程组(1-1)所作的讨论，可以得到方程组(1-4)的下述解法. 若线性方程组(1-4)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\neq 0\tag{1-5}$$

则方程组(1-4)有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\qquad x_2=\frac{D_2}{D},\qquad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},\qquad D_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}.$$

它们是将系数行列式(1-5)中的第 1，2，3 列分别换成方程组(1-4)中的常数项所得到的行列式.

例 2 解三元线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-4x_2+x_3=1,\\ x_1-5x_2+3x_3=2,\\ x_1-x_2+x_3=-1.\end{cases}$$

解 利用三阶行列式的对角线法则可求得

$$D=\begin{vmatrix}2&-4&1\\1&-5&3\\1&-1&1\end{vmatrix}=-8,\quad D_1=\begin{vmatrix}1&-4&1\\2&-5&3\\-1&-1&1\end{vmatrix}=11,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&3\\1&-1&1\end{vmatrix}=9,\quad D_3=\begin{vmatrix}2&-4&1\\1&-5&2\\1&-1&-1\end{vmatrix}=6.$$

于是，所求方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{11}{8},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{9}{8},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=-\frac{6}{8}.$$

从上面的例子可以看出，对于未知量个数与方程个数相等的线性方程组(1-1)和(1-4)，如果它们的系数行列式不等于零，用行列式求解是方便的.

在实际应用中，遇到的线性方程组所包含的未知量常常是多于三个，而且在某些理论研究中往往需要考虑 n 个未知量的线性方程组的求解问题. 为了能把上面二元和三元线性方程组的解法推广到包括 n 个未知量 n 个方程的线性方程组，下面首先把二阶和三阶行列式加以推广，引入 n 阶行列式的概念.

1.2 n 阶行列式

对角线法则只适用于二阶与三阶行列式，为研究四阶及更高阶行列式，下面先介绍有关排列的知识，然后引出 n 阶行列式的概念.

1.2.1 排列与反序数

把 n 个不同的元素按一定的顺序排成一行($n\geqslant 2$)，称为这 n 个元素的一个**排列**，为了方便起见，这里只用到前 n 个自然数 1，2，…，n 的排列.

定义 1 由 1，2，…，n 组成的有序数组称为一个 **n 阶排列**. 通常用 $j_1\ j_2\cdots j_n$ 表示 n 阶排列.

如 2341 是一个四阶排列，25134 是一个五阶排列.

n 个不同元素的所有排列的种数，通常用 P_n 表示，从 n 个元素中任取一个放在第一个位置上，有 n 种取法；又从剩下的 $n-1$ 个元素中任取一个放在第二个位置上，有 $n-1$ 种取法；这样继续下去，直到最后只剩下一个元素放在第 n 个位置上，只有一种取法．于是 $P_n = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$．如1，2，3这三个自然数组成的所有三阶排列：123，132，213，231，312，321，其种数 $P_n = 3! = 3\times 2\times 1 = 6$．$12\cdots n$ 是一个 n 阶排列，它具有自然顺序，称为**自然排列**（或**标准排列**），在这个排列中的任何两个数，小的数总排在大的数前面．

定义2 一个排列中，如果一个大的数排在小的数之前，就称这两个数构成一个**反序**．一个排列的反序总数称为这个排列的**反序数**．用 $\tau(j_1\ j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1\ j_2\cdots j_n$ 的反序数．

反序数为奇数的排列叫做**奇排列**，反序数为偶数的排列叫做**偶排列**．

例3 在四阶排列2341中，共有反序21，31，41，即 $\tau(2341)=3$，所以2341是奇排列．

在五阶排列25134中，共有反序21，51，53，54，即 $\tau(25134)=4$，所以25134是偶排列．

例4 自然排列 $1\cdot 2\cdots n$ 的反序数 $\tau(123\cdots n)=0$，所以 $12\cdots n$ 是偶排列；而 n 阶排列 $n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ 的反序数 $\tau(n(n-1)\cdots 321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{1}{2}n(n-1)$，所以，当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，$n(n-1)\cdots 21$ 是偶排列，而当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，$n(n-1)\cdots 21$ 是奇排列．

求反序时，可以从前到后将相邻的两个数进行比较，求出反序及反序数，也可从首位数开始找出每个数与其前面数的反序．（此时首位数的反序为0），这些反序相加即为反序数．

在一个排列中，交换其中某两个数的位置，而其余各数的位置不动，就得到另一个同阶的新排列．对排列施行的这样一个交换称为一个**对换**，将相邻两个数对换，叫做**相邻对换**．如例3中五阶偶排列25134经过2，5对换变成排列52134，容易计算 $\tau(52134)=5$，所以52134是奇排列．一般地，我们有如下结论：

定理1 对换改变排列的奇偶性．即经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列．

证 先证相邻对换的情形，即考虑对换排列中相邻的两数 l 和 m，也即排列

$$\cdots lm\cdots \tag{1-6}$$

经对换 l 和 m 变成了

$$\cdots ml\cdots \tag{1-7}$$

其中“…”表示在对换下保持不动的数，容易看出，m与这些数和l与这些数以及这些数之间构成的反序在式(1-6)与式(1-7)中并未改变，故计算式(1-6)与式(1-7)的反序数只需考虑l与m的次序．显然式(1-6)与式(1-7)的反序数相差1，故排列的奇偶性改变．

再证一般对换的情形，即考虑对换排列中不相邻的两数l和m，即排列

$$\cdots l j_1\ j_2 \cdots j_s m \cdots \tag{1-8}$$

经对换l和m变成了

$$\cdots m j_1\ j_2 \cdots j_s l \cdots \tag{1-9}$$

不难看出这种对换可以通过$2s+1$次相邻的对换来实现．如在式(1-8)中将m与j_s对换，再与j_{s-1}对换，…，逐步将m向左方移动，经$s+1$次相邻的对换变成

$$\cdots m l j_1\ j_2 \cdots j_s \cdots \tag{1-10}$$

接着又在式(1-10)中将l与j_1对换，再与j_2对换，…，逐步将l向右方移动，经s次相邻对换变成了

$$\cdots m j_1\ j_2 \cdots j_s l \cdots$$

由于对换相邻两数改变排列的奇偶性，故通过奇数$2s+1$次相邻对换使排列奇偶性改变．

推论　在全部$n(n\geqslant 2)$阶排列中，奇、偶排列各占一半，即各有$\frac{n!}{2}$个．

证　设奇、偶排列各有p、q个，则$p+q=n!$．对每一个奇排列对换数码1与2，依定理1必变成偶排列，p个不同的奇排列变成p个不同的偶排列，但总共只有q个偶排列，因此$p\leqslant q$；同样可得$q\leqslant p$，所以$p=q=\frac{n!}{2}$．

定理2　任意一个n阶排列可经过一系列对换变成标准排列，并且所作对换次数的奇偶性与这个排列的奇偶性相同．

证　对排列的阶数n作数学归纳法．当$n=1$时，结论显然成立．设对$n-1$阶排列结论成立，现在考虑n阶排列的情形．

设$j_1\ j_2\cdots j_n$是任意一个n阶排列，若$j_n=n$，则$j_1\ j_2\cdots j_{n-1}$是一个$n-1$阶排列．根据归纳假设，排列$j_1\ j_2\cdots j_{n-1}$可经过一系列对换变为自然排列；若$j_n\neq n$，则在排列$j_1\ j_2\cdots j_n$中先对换j_n和n，使排列$j_1\ j_2\cdots j_n$变成$j_1{}'j_2{}'\cdots j_{n-1}{}'n$，这就归结为前面的情形．由前面的结论可知，排列$j_1\ j_2\cdots j_n$也可经过一系列对换变成自然排列．

根据归纳法原理，对任意自然数n，结论成立．

由于$12\cdots n$是偶排列，且对换改变排列的奇偶性，所以将一个偶(奇)排列j_1

$j_2 \cdots j_n$ 变为自然排列需作偶(奇)数次对换. 即将排列 $j_1\ j_2 \cdots j_n$ 变成自然排列所作对换次数的奇偶性与排列 $j_1\ j_2 \cdots j_n$ 的奇偶性相同.

例如 $32154 \xrightarrow{1,\ 3\text{对换}} 12354 \xrightarrow{5,\ 4\text{对换}} 12345$，对换两次成为标准排列，因此 32154 是偶排列. 事实上，经计算知 $\tau(32154)=4$. 对换的方法不唯一，$32154 \xrightarrow{2,\ 1\text{对换}} 31254 \xrightarrow{1,\ 3\text{对换}} 13254 \xrightarrow{3,\ 2\text{对换}} 12354 \xrightarrow{5,\ 4\text{对换}} 12345$，还是偶数次互换.

1.2.2 n 阶行列式的定义

在给出 n 阶行列式的定义之前，先观察三阶行列式的结构，在三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

的展开式中，可以发现：

(1) 它的每一项都是3个元素的乘积，并且这三个元素位于三阶行列式的不同行、不同列，所以，除符号外，每一项可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，而 $j_1\ j_2\ j_3$ 是一个三阶排列.

(2) 当 $j_1\ j_2\ j_3$ 取遍了三阶排列(123，231，312，321，213，132)时，即得到三阶行列式的所有项(符号除外)，共 $3!=6$ 项.

(3) 每一项的符号，是每一项中元素的行标按自然顺序排列时，如果对应的列标构成偶排列时取正号，为奇排列时取负号.

综上所述，作为三阶行列式的展开式中的一般项可表示为：$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$. 从而，三阶行列式可简写成：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 是对所有的三阶排列求和. 类似地，二阶行列式可写成 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum\limits_{j_1j_2} (-1)^{\tau(j_1j_2)} a_{1j_1}a_{1j_2}$，其中 $\sum\limits_{j_1j_2}$ 是对所有的二阶排列求和.

由此，归纳出一般 n 阶行列式的定义.

定义3 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 n 行 n 列的算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n **阶行列式**. 其中横排称**行**，纵排称**列**. 它表示所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和，其中 $j_1\ j_2\cdots j_n$ 是数 1，2，…，n 的一个排列，每项前面带有符号 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$，即当 $j_1\ j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，该项带正号，否则带负号，共有 $n!$ 项. 记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-11}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和. n 阶行列式简记为 $|a_{ij}|$.

由上述定义可知，$n=2$ 时，式(1-11)即为二阶行列式，$n=3$ 时，式(1-11)即为三阶行列式. 一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$，注意不要与数的绝对值相混淆. 显然，如果行列式有一行(列)元素全为零，则行列式等于零. 主对角线以下(上)的元素都为零的行列式叫做**上(下)三角形行列式**(主对角线是指从左上角到右下角的对角线).

例 5 计算下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

解 由 n 阶行列式的定义

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

显然，这个代数和中必有很多项为零. 根据 n 阶行列式的定义不难分析出 D 中不为零的项，即一般项中 a_{1j_1} 必取自第一行，而第一行中只有 a_{11} 不为零，所以 $j_1=1$. 一般项中 a_{2j_2} 必取自第二行，而第二行中只有 a_{21}，a_{22} 可能不为零，然而，a_{11} 已取自第一列，所以 a_{2j_2} 不能再取第一列，这样，只能取第二列元素 a_{22}，故 $j_2=2$. 依此类推，可得 $j_3=3,j_4=4,\cdots,j_n=n$. 因此，D 中除 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项外，其余各项均为零，于是

$$D=(-1)^{\tau(123\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理，可计算上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

这个例子说明下(上)三角形行列式等于主对角线上元素的乘积.

作为上三角形行列式的特例，有**对角行列式**(除主对角线上的元素外其余元素全为零)

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

与例 5 相仿，根据行列式的定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 21)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 21)}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

作为本节的结束，给出 n 阶行列式的等价定义：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \tag{1-12}$$

实际上，式(1-11)和式(1-12)右端都有 $n!$ 项，根据数的乘法交换律，式(1-11)右端的任一项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 总可以通过因子的有限次交换写成列标是标准排列 $a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$ 的形式. 在每一次交换因子时，行标所成排列及列标所成排列都经历了一个对换，因此行标排列的反序数与列标排列的反序数之和的奇偶性不变. 所以经历有限次的因子交换后，上述反序数之和的奇偶性不变. 于是有

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(12\cdots n)}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}.$$

所以断定式(1-11)右端任一项总对应着式(1-12)右端的某一项. 类似地，式(1-12)右端的任一项也对应着式(1-11)右端某一项，所以式(1-12)成立.