经全国中小学教材审定委员会
2005年初审通过

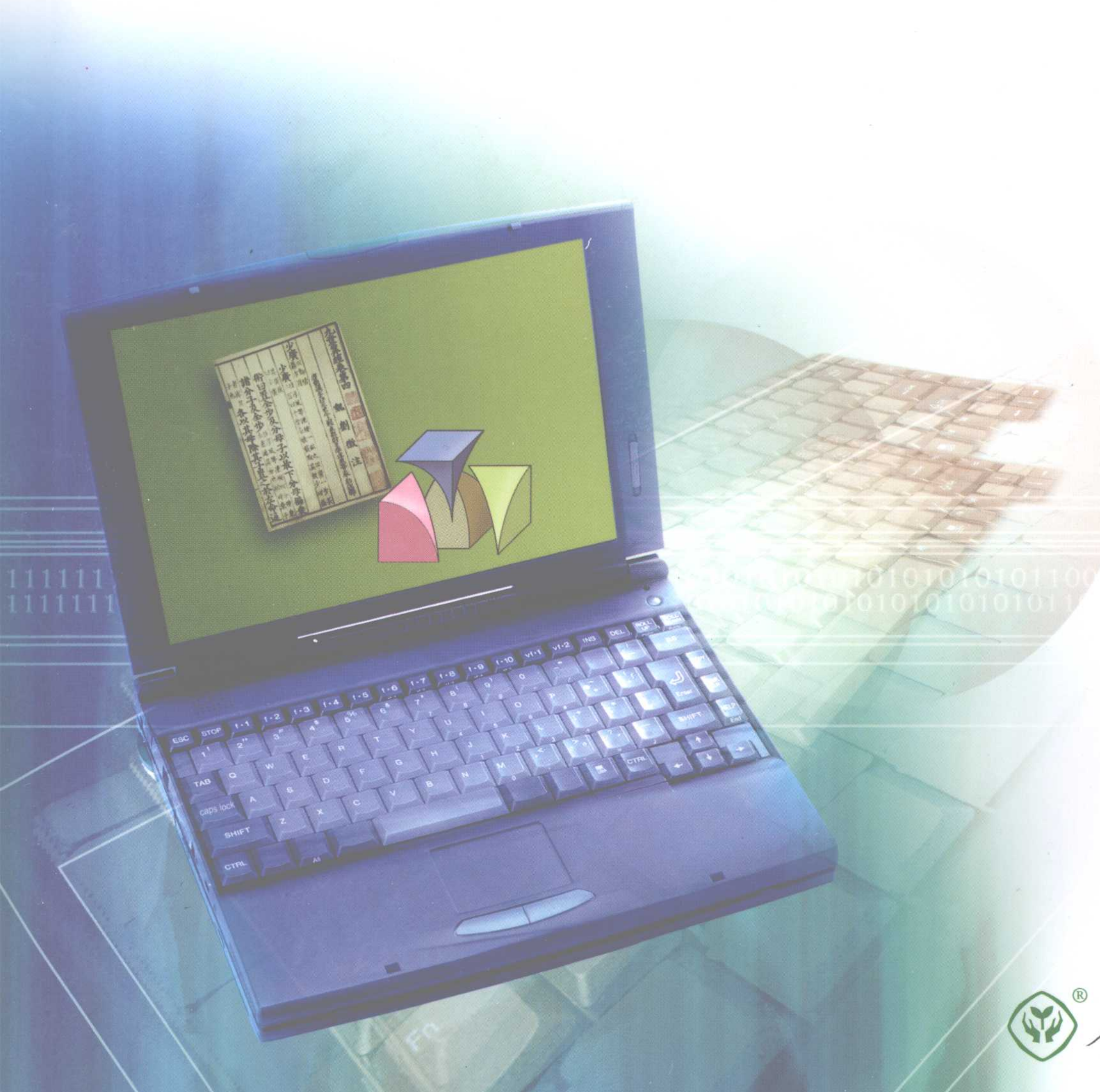
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 3-1

数学史选讲

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著



人民教育出版社

A版

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 3–1

数学史选讲

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

人民教育出版社

A版

普通高中课程标准实验教科书

数　学

选修 3 – 1

A 版

数学史选讲

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

*

人民教育出版社 出版发行

网址：http：//www.pep.com.cn

北京天宇星印刷厂印装　全国新华书店经销

*

开本：890 毫米 × 1 240 毫米　1/16　印张：6.25　字数：136 000

2007 年 1 月第 2 版　2008 年 6 月第 13 次印刷

ISBN 978 – 7 – 107 – 20283 – 4
G · 13333（课）　定价：7.70 元

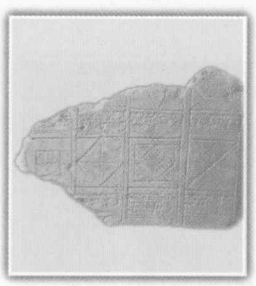
如发现印、装质量问题，影响阅读，请与本社出版科联系调换。

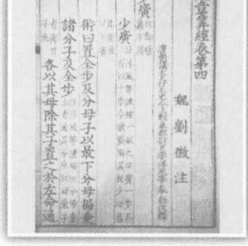
（联系地址：北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）

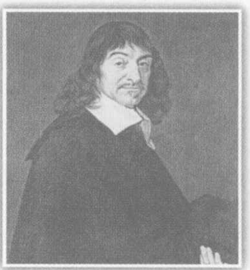
主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

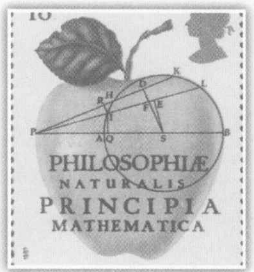
主要编者：林立军
责任编辑：王　嵘
美术编辑：高　巍　王　艾
封面设计：吴　敬

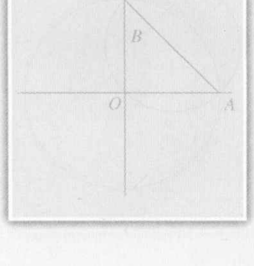
目录

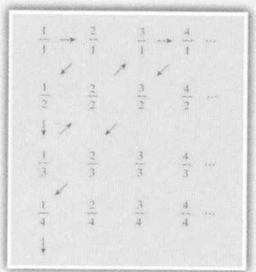


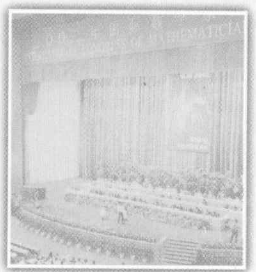


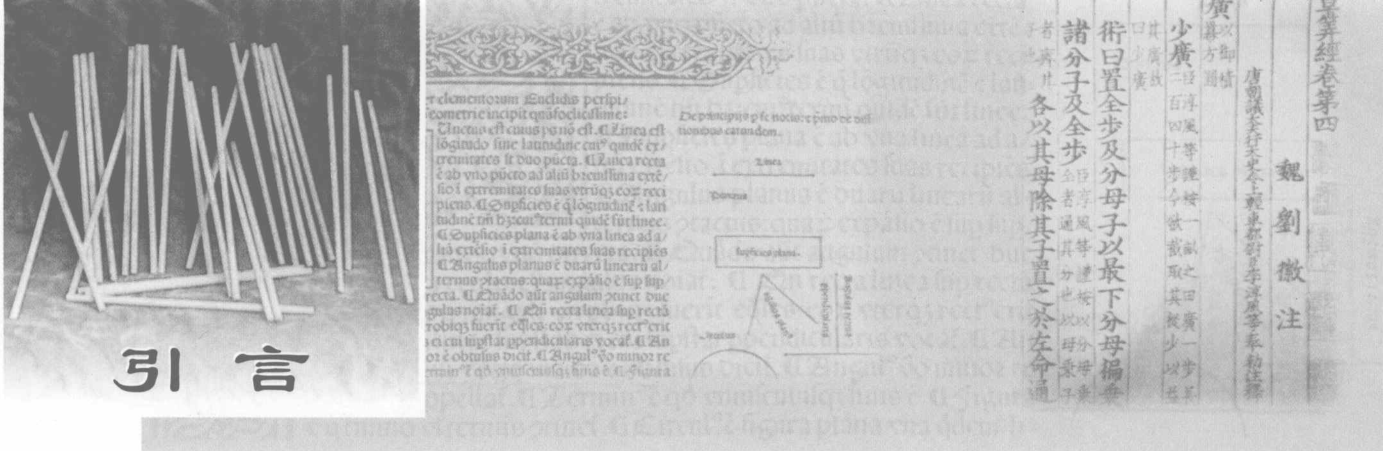



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA









引言

当我们开始认识这个世界时，数学就和我们在一起了．同学们在进入小学之前，就已经开始认识和使用阿拉伯数字，这是进入数学殿堂的开端，至今大家已经掌握了大量数学知识．那么，这些数学知识是如何产生和发展的呢？比如，最早的数学知识都诞生在哪些地方，为什么像$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$以及π这样的数称为无理数，几何问题为什么要进行推理证明，等等．这些问题你考虑过吗？你想了解数学家们是如何思考这些问题的吗？

数学知识的形成过程与人类认识自然的历史一样漫长，是随着人类社会的生活、生产活动而自然产生、发展和成熟的．现在看起来很自然的一些数学概念（例如无理数、负数、0等），历史上却经历了漫长的过程才被接受，它们是许多学者前赴后继、辛勤耕耘的结果．数学是一门历史性或积累性很强的学科．数学史记载了这门学科发生、发展的过程，展现了其深刻内涵和完美形式背后激动人心的灵感、睿智的思想和孜孜不倦的探索精神．

“历史使人明智”．学习一些数学史知识，可以使同学们了解数学的发展轨迹，更好地体会数学概念所反映的思想方法，感受数学家们刻苦钻研和勇于开拓的精神，这对开阔视野、启发思维以及学习和掌握数学知识都大有益处．

本书选取数学史中一些典型的、重要的专题，例如，早期算术与几何，中国古代数学瑰宝，微积分的产生，近代数学两巨星，康托尔的集合论等等，介绍了一些常见数学概念、理论和方法的来源、典故及历史演变过程，以此反映不同时期数学发展的水平和特点．

数学的历史源远流长，内涵丰富．希望同学们通过本书所展示的数学发展过程中若干重要事件、重要人物和重要成果，初步了解数学产生与发展的过程，体会数学对人类文明发展的作用，加深对数学的理解，感受数学家的严谨态度和锲而不舍的探索精神．

第一讲 早期的算术与几何
——记数与测量

尼罗河下游的古埃及、两河流域的古巴比伦、恒河与印度河畔的古代印度以及黄河与长江流域的古代中国并称“四大文明古国”，创造了灿烂辉煌的“河谷文明”，早期的数学就诞生在这些地方.

人类在长期的生产实践和与自然斗争的过程中，逐渐掌握了丰富的科学知识. 土地面积的丈量、商品的交易以及大规模宫殿的建造，无疑都要使用较高深的数学知识.

在大量的生产和生活实践活动的基础上，四个地区的古代先民们对数学——空间形式和数量关系的研究各具特色，成绩斐然. 就已有的数学史料看，古埃及与古巴比伦的数学历史最为久远.

一　古埃及的数学

古埃及位于非洲东北部的尼罗河两岸. 公元前 525 年，波斯入侵，埃及成为波斯帝国的一个郡. 公元前 332 年以后，该地区处于希腊人的统治之下，所创造的数学归入希腊数学的范围. 而古埃及数学一般指公元前 6 世纪以前这个地区所创造的数学.

1. 象形文字中的数字记法

古埃及最古老的文字是象形文，大约在公元前 3000 年就已形成，如图 1-1.

图 1-1　古埃及的象形文

在古埃及的象形文中已经出现代表数字的各种符号，各个符号所代表的数字如图 1-2 所示. 进位的基数是 10，每个数字可能有几种写法. 1 就是一个竖划，2 到 9 依次累加，10 像拱门，100 是一卷绳，1 000像荷花，10 000 是一个指头，有时向左弯，有时向右弯，100 000 有好几种写法，有时像青蛙或蝌蚪，有时像江鳕鱼或小鸟. 在古埃及的第 1 王朝

还出现过 10^6 的符号，像埃及的空间之神，最大的单位是 10^7，像初生的太阳．其他的数可以通过这些数的简单累积来表示，如数 12 345 可以写作．

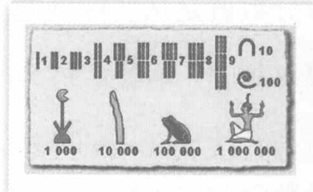


图 1-2　象形文中的数字

在这种记数方法中，每一个较高的单位都要创设一个新符号，记数时有多少单位就要重复多少次，上下左右书写均可．但符号毕竟是有限的，记太大的数就会显得捉襟见肘．

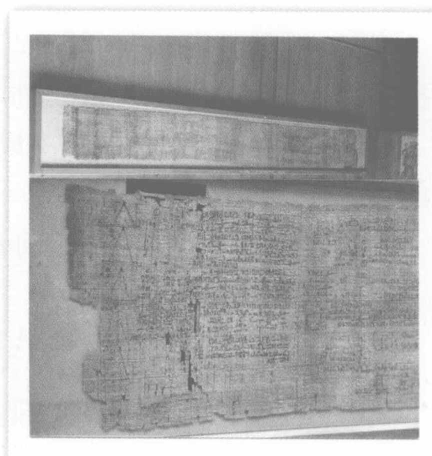
在远古时代，人们使用分数的需要还不迫切，但随着生产力的发展和人类文明的进步，特别是进入青铜时代以后，分数及分数符号的产生就显得尤为重要，而且不可避免．象形文中用一种特殊的记号来表示分子为 1 的分数，这样的分数又称为单分数：在表示整数的符号上画一个简单的椭圆，就表示该整数的倒数．如 $\frac{1}{5}$ 写成，$\frac{1}{10}$ 写成，$\frac{1}{15}$ 写成……在古埃及的另一种文字僧侣文中也有相应分数的记法．

这些数字散见于古埃及时代的陶片、石头、木头或纸草上，在坟墓内、庙宇的墙上及方尖塔上也能够见到．

2. 纸草书上的数学

在尼罗河三角洲地区盛产一种形如芦苇的水生植物——纸草．古埃及人用削尖的芦杆蘸上黑色或红色颜料把文字写在纸草上．

埃及的纸草文书为后世留下了大量珍贵的历史资料，其中与数学有关的纸草书有两本．一本称为“莱因德纸草书”，归伦敦大英博物馆所有，大约产生于公元前 1650 年．另一本称为“莫斯科纸草书”，收藏在莫斯科国立造型艺术博物馆．这本纸草书产生于公元前 1850 左右，比莱因德纸草书产生得早，但重要性要稍逊于莱因德纸草书．


莱因德纸草书(上为全景下为局部)

这两本数学纸草书都是用僧侣文写成的，全书共有 84 个题目，是我们认识古埃及数学的主要依据．莱因德纸草书的开头写到：“准确的计算，阐明一切黑暗的、秘密存在的事物的指南．”本书大概是当时一种实用的计算手册，记述千余年来的一些数学问题．

单分数

埃及数学中有一个独特现象：除 $\frac{2}{3}$ 用一个单独的符号表示以外，其他分数都要写成若干个单分数和的形式．莱茵德纸草书在前言之后就给出了形如 $\frac{2}{n}$（$n=5, 7, 9, \cdots, 101$）的分数分解为单分数和的表．利用这张表就可以把其他分数分解成单分数和的形式．

埃及人为什么如此偏爱单分数，这个问题至今仍是一个未解之谜．有一种观点认为，

单分数就是从实际问题中产生的．假定有两个面包，要平均分配给 5 个人，问怎样分？如果每人$\frac{1}{2}$，不够，每人$\frac{1}{3}$，余$\frac{1}{3}$，再将这$\frac{1}{3}$分成 5 份，每人得$\frac{1}{15}$，这样每人分得$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$．再者，按埃及人的除法，所得的商是单分数之和．也许由于这些原因，单分数就成为古埃及数学的一大特色．

算术运算

僧侣文的记数法属于分级符号制（详见第 11 页），整数的加减法很简单，只要将表示数目的符号累积起来，再转写成相应的符号即可．但分数的加减法却相当复杂，因为所有的分数都要化成单分数．

乘法是累加法，是以“倍乘”（即乘 2）及“平分”$\left(\text{即乘}\frac{1}{2}\right)$为基础进行的．以 25×18 为例（用现代的符号和术语）：

1	25	被乘数
＊2	50	
4	100	
8	200	
＊16	400	
乘数 18	450	积

先写 1　25（表示 1×25＝25）作为第 1 行，再写 2　50（表示 2×25＝50），以下同样逐次加倍，加到 16 可不必再加，因为再加下去就超过乘数 18 了．从左列数（1，2，4，8，…）中选出若干个，使其凑成 18．本例是 2 与 16，各打上＊号，再将右列中与＊号对应的数相加，即得 25×(2+16)＝50+400＝450．

除法的原理一样，只不过将步骤颠倒过来．

代数问题

书中有几个问题属于现在代数中的一元一次方程问题，其中一个是这样的：一个量，加上自身的七分之一等于 19．现在的解法很简单，列方程为 $x+\frac{x}{7}=19$，解得 $x=16\frac{5}{8}$．纸草书中的解法却非常烦琐，但结果却是正确的．

几何问题

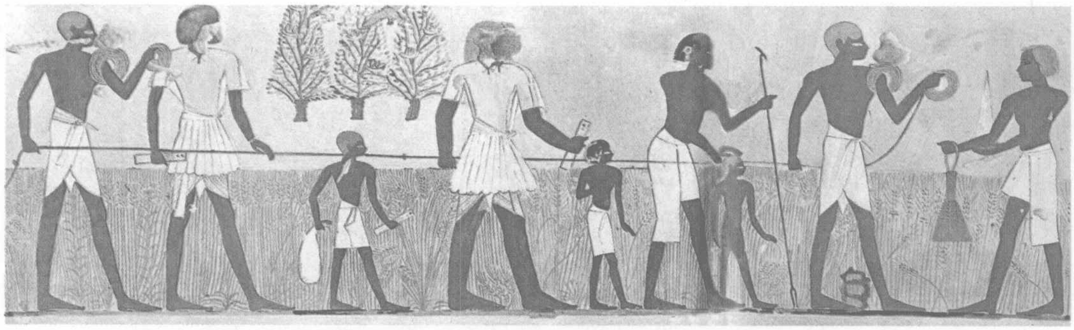
在纸草书上出现了一些求面积（如三角形、圆的面积）和体积（如四棱台体）的题，但得到的结果总体来说还不够精确．可以看出，尽管埃及是几何学的发源地，但其几何水平却不高，始终处在实验阶段，还没有将它发展为系统的、理论的学科．

3. 几何学的诞生

尼罗河是埃及的母亲河，通常在每年的 7 月中旬定期泛滥，11 月后洪水逐渐消退，留下肥沃的淤泥．这样来年就容易耕作，庄稼的丰收也就有了保障．埃及的几何学就起源于尼罗河泛滥后的土地测量，这种说法最早出自古希腊的历史学家希罗多德（Herodotus，

约公元前 484—前 424)，他说："塞索斯特里斯在全体埃及居民中把埃及的土地作了一次划分. 他把同样大小的正方形土地平均分配给所有人，而土地持有者每年向他缴纳租金，作为他的主要收入. 如果河水冲走了某人分得土地的任何一部分，这个人就可以将此事告知国王，国王就会派人前来调查并测量损失地段的面积. 今后的租金就要按照减少后的土地面积来征收了. 我想正是由于有了这样的做法，埃及才第一次有了几何学，而希腊人又从那里学到了它."

埃及由土地的测量促使几何学的兴起，那些从事土地测量的人员有一个专名，叫做"拉绳者"，可以说，这些拉绳者就是当时的几何学家.



古埃及的"拉绳者"

古希腊的亚里士多德（Aristotle，公元前 384—前 322）则从另一个角度说明几何学起源于埃及，他在《形而上学》中写道："在实用的技术发明之后，那些并不直接为生活的需要或满足的科学才会产生出来. 它首先出现在人们有闲暇的地方，数学科学最早在埃及兴起，就是因为那里的祭司阶层享有足够的闲暇."

从纸草书中记载的三角形、圆以及棱台体积的计算内容看，虽然埃及是几何学的发源地，但始终停留在实验阶段，几何学知识是零碎的、片段的，尚未形成完整的体系，还缺乏逻辑因素，基本上看不到命题的证明，似乎还不知道勾股定理. 直到公元前 4 世纪希腊人占领了该地区以后，情况才发生了根本的变化.

二 两河流域的数学

亚洲西部的底格里斯河与幼发拉底河之间的地带，通常叫做美索布达米亚平原，美索布达米亚语出希腊文，意思是"两河之间的地区"，故而这个地区也称为两河流域（今伊拉克境内）. 像尼罗河一样，两河流域也是人类文明的摇篮. 从公元前 3000 年到前 200 年，这一地区（在今伊拉克和伊朗西部）所创造的数学，习惯统称为巴比伦数学.

早在公元前四、五千年，两河流域的苏美尔人用削尖的芦苇杆或木棒在软泥板上写字，泥板晒干后坚硬如石. 由于这样的字形状像楔子，所以这种文字称为楔形文. 苏美尔人后，各民族继续使用楔形文，只是不同时期所使用的有所不同.

1. 楔形文字中的记数法

19 世纪初开始，两河流域陆续出土了大约 50 万块泥板. 从内容看，几十万块泥板中属于数学的仅 300 块左右，其中约 200 块是各种数表，包括乘法表、倒数表、平方表和立方表等.

苏美尔人创造了楔形文字，后来传给了巴比伦人. 巴比伦人发展成一套记数方法，是 10 进和 60 进的混合物. 60 以下用 10 进的简单累数制，60 以上用 60 进的位值制.

在巴比伦的楔形文字中，数码符号只有两个：𒁹 表示 1，𒌋 表示 10. 一个 𒁹 表示 1，两个 𒁹 表示 2……九个 𒁹 表示 9. 超过 9 的，一个 𒌋 表示 10，两个 𒌋 表示 20……大于 59 的数，巴比伦人则采用 60 进的位值记法. 同一记号，根据它在数字表示中相对位置的不同赋予不同的值. 图 1-3 给出了 1 到 130 的数字符号.

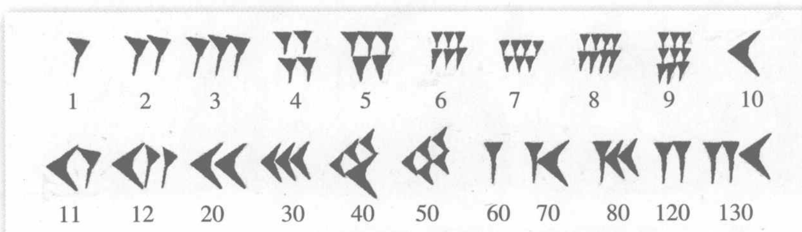


图 1-3 楔形文中的数字

其中，𒁹𒁹𒌋 $=60\times2+10=130$.

2. 泥板上的代数

从泥板的数学内容可以看出，古巴比伦人不但能计算各种复杂的算术问题，而且给出了乘法表，并能求解一元二次方程.

我们知道，代数与算术的根本区别在于代数引入了用符号表示的未知数，根据已知条件列出方程，对未知数加以运算，最后解方程求出未知数. 如果说未知数、符号和方程是代数学的基本特征，那么代数只能说开始于法国数学家韦达（F. Vieta，1540—1603）等人引进代数符号的 16、17 世纪. 如果放宽条件，把引入未知数，可对未知数进行运算都归入到代数的范畴，那么代数学至少在古埃及的纸草书和古巴比伦的泥板上就已经出现了.

在现藏美国耶鲁大学的一块古巴比伦数学泥板上，有一个典型的代数问题：已知两数的积为 $60'$，差为 $7'$，求这两个数. 将泥板正反两面的楔形文字翻译过来就是计算过程.

这个计算过程，除进位制不同之外，和现代的二次方程的求根公式完全一致. 在数学泥板中，这种二次方程的例子数以百计. 这充分说明，虽然不具备现代的形式，但巴比伦人已经知道二次方程的求根公式. 不过他们还不知道负数，因此，也不知道二次方程有两个根.

更加令人不可思议的是，巴比伦人甚至已经知道如何求解指数方程. 例如有这样一个复利问题：有一笔钱，年利率为 20%，问经过多长时间后利息与本金相等？这实际上是求

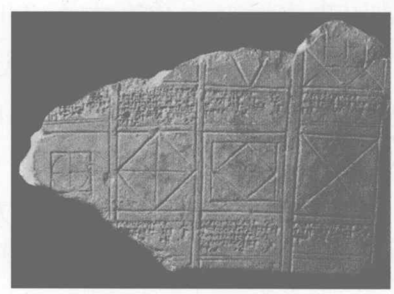
指数方程：

$$1.2^x=2.$$

解的结果 x 为 4 年减去 $\left(2+\frac{33}{60}+\frac{20}{60^2}\right)$ 月．古巴比伦人的数学水平，不能不令人赞叹．

3. 泥板上的几何

泥板上已经出现了各种几何问题，从中可以看出古巴比伦的几何已经达到了较高的水平．



泥板上的几何图形

$\sqrt{2}$的计算

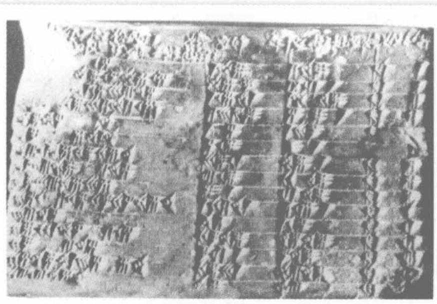
在勾股定理和勾股数的计算与研究方面，巴比伦人的成就遥遥领先于其他三个文明古国．泥板数学中，有许多涉及到勾股定理应用的问题．特别是在一块公元前 1700 年左右的圆饼状泥板上，刻有一个正方形，并画出了对角线．对角线上写了一行数字，即 1，24，51，10，化为 10 进小数就是

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}=1.414\ 212\ 96\cdots.$$

显然，这就是$\sqrt{2}$的近似值，与真值的差不超过 6×10^{-7}，正是按勾股定理推算出来的单位正方形对角线的长．

在古印度也有对$\sqrt{2}$的记载．《测绳的法规》给出了$\sqrt{2}=1.414\ 215\ 68\cdots$，误差是 2.1×10^{-6}，比泥板上$\sqrt{2}$的近似值的误差大得多，并且时间已经晚了一千多年．

勾股数



普林顿 322 号数学泥板

纽约哥伦比亚大学的珍本图书馆藏有一块年代为公元前 1900—前 1600 的泥板，称为普林顿 322 号数学泥板．泥板上用楔形文刻有 4 列数字，共 15 行，最初人们以为是一种普通的商业账单，没有引起太多的注意．后来经过研究才发现，这竟然是一个勾股数表．所谓勾股数，就是满足不定方程

$$a^2+b^2=c^2$$

的正整数组（a，b，c），也叫毕达哥拉斯三元数组．巴比伦最令人吃惊的数学成就，就是在很古老的年代就给出了大量的、数目巨大的勾股数．普林顿 322 泥板还有许多未解之谜等着人们去研究．

巴比伦数学在某些方面取得了惊人的成就，最突出的是勾股定理和勾股数，领先于其他国家千年以上．还有二次方程、复利问题及位值制记数法的思想都是领先于时代的，但 60 进制却不是很理想的进位制度．

总的来说，古巴比伦的数学与古埃及的数学一样，主要是解决各类具体问题的实用知识，处于原始算法积累时期．尽管在古埃及的纸草书和巴比伦的泥板上都有求几何图形面

积的问题，但本质上都是算术的应用，几何学作为独立的学科还不存在．数学的进一步的飞跃要等待古希腊来完成．

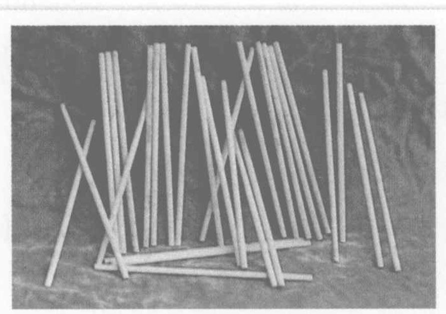
三　丰富多彩的记数制度

我们现在普遍使用的 0，1，2，…，9 称作阿拉伯数码，任何一个数字都可以用这 10 个数码来表示．当数字大于 9 时，无需创造新的数码，只要在表示十位的地方写 1，在表示个位的地方写 0 就可以了，这样就写出了数字 10．由此可以看出，上述十个阿拉伯数码放在不同的数位上，它所表示的意义是不一样的．拿 1 为例，放在个位表示 1，放在十位表示 10，放在百位表示 100……这样的记数制度叫做“十进位值制”．

用十进位值制记数法非常方便，写出的数字简洁明了．古代的先民采用十进可能与人有 10 个手指有关．十进位值制包含两个要素：一个是**十进**，一个是**位值**，两者缺一不可．在这两个要素中，位值的思想比进位的思想更具实际意义．

1. 中国古代的算筹记数

中国古代用算筹来进行计算，而中国古代的算筹记数法就是现代的十进位值制．算筹的功用和后世的算盘珠大致相仿，5 以下的数码是几就用几根算筹表示，6、7、8、9 四个数码用一根放在上面，余下的数，每根算筹表示 1．算筹是将几寸长的小竹棍（或用木、玉、金属制造）摆在平面上进行运算，算筹的摆放形式有纵横两种方式，如图 1-4．那么，算筹的摆放形式为什么采用纵横两种方式呢？



西汉象牙算筹

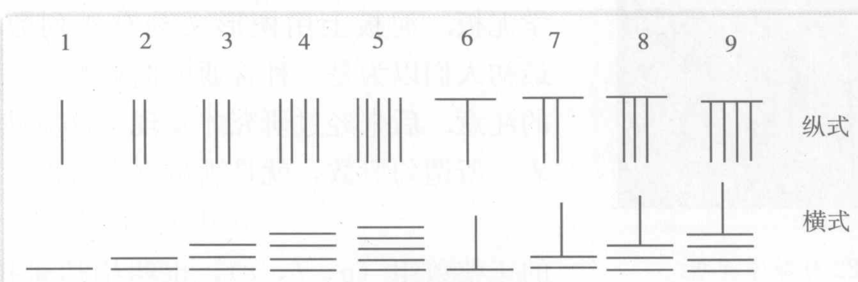


图 1-4　中国古代的算筹数码

表示一个多位数时，像现在用阿拉伯数码记数一样，把各位的数码从左到右横着排列，但各位数码的筹式需要纵横相间，个位数用纵式表示，十位数用横式表示，百位、万位用纵式，千位、十万位用横式……例如 6 614 用算筹表示出来就是𝍮𝍥𝍩𝍣；数字有空位时，如 86 021 用算筹表示就是𝍧𝍮　𝍪𝍠，百位上是空位不放算筹，又如10 340用算筹表示出来就是𝍠　𝍢𝍬　，千位和个位都不放算筹．因为布置算筹需要纵横相间，这个数

字有没有空位是很容易辨别的.《孙子算经》中清晰地记载了算筹的纵横相间制“一纵十横，百立千僵. 千、十相望，万、百相当. 满六以上，五在上方. 六不积算，五不单张”. 算筹记数的纵横相间制传到宋元时期都没有改变.

算筹记数是中国古人在生产实践中创造出来的一种方法. 用极简单的算筹，纵横布置，就可以表示任何自然数（和小数）. 虽然没有表示空位的符号，但确实能够实行位值制记数法，为加减乘除等运算建立起良好的条件. 算筹记数方法除了数码形式不同之外，和现在的十进位值制并无两样. 我国古代数学在数字计算方面有辉煌的成就，应当归功于遵循十进位值制的算筹记数法.

算筹作为计算的工具，它的起源很早，大约可以上溯到公元前 5 世纪，有证据足以说明，春秋末期以前，人们早已利用算筹来计算了. 后来写在纸上变成为算筹记数法. 在纸上为了明确起见，用 O 表示空位，这就是中国的零号. 正是由于古代中国人使用算筹非常普遍，所以留下了后世的名句“运筹帷幄之中，决胜千里之外”，而从事数学研究的人在古代则被称作“筹人”.

2. 印度—阿拉伯数码

现在国际通用的数码常称为阿拉伯数码，这是历史遗留下来的不确切名称，其实叫做印度—阿拉伯数码更为恰当. 这种数码采用十进位值制，它的演变，有一段漫长而复杂的历史.

印度—阿拉伯数码最早可以上溯到婆罗米文字，这种文字形成于公元前 7、8 世纪，是印度文字的祖先. 婆罗米数字在分类上属于分级符号制，以后逐渐向位值制发展. 大约在公元前 600 年已过渡到位值制记数法. 最初用空一格表示零，后来用小点表示. 完成位值制必须有零号，根据目前掌握的史料，印度最早的确凿无疑的零号“0”出现在瓜廖尔地方的一块石碑上，年代是公元 876 年.

公元 773 年，印度数码开始传入阿拉伯国家. 由于当时没有印刷术，数码全凭手写，字体因人因地而异，变化很大. 东西阿拉伯的写法就很不相同. 西部较接近现代的写法，但没有零号. 东部字体逐渐固定下来，至今许多伊斯兰国家仍在使用. 有人顾名思义，认为“阿拉伯数码”就是阿拉伯人创造的数码，这是误解.

13 世纪，欧洲的著名数学家斐波那契（L. Fibonacci，1170—1250）写了一本书，名为《算盘书》，这是第一部向欧洲人介绍印度数码的著作. 这本书的一开头就写到：“这是印度的九个数码：

9　8　7　6　5　4　3　2　1，

还有一个阿拉伯人称之为零的符号 0，这样任何数都可以表示出来.”

从那时起，又经过数百年的改进，到 16 世纪，终于形成了当今国际通用的数码. 在欧洲人的印象中，这些数码来自阿拉伯国家，所以称之为阿拉伯数码，这个名称就这样沿用下来.

在古代，一些国家或地区采用了位值制但不是十进的记数法，也有些地区使用十进的记数法，但却不是位值的. 而中国的算筹记数法却是最早的既是十进制又是位值制的记数

方法，这是我国古代数学的一大创造.

3. 其他记数制度

历史上，在不同的时代，不同的地域，不同的文化中产生的记数制度可以说五花八门，不一而足. 除了上述的十进位值制记数制度外，主要还有如下的几种.

简单累数制

这种制度的特点是每一个较高的单位，都用一种新的符号来表示，比如古埃及象形文中的数字；在巴比伦楔形文中，60 以下的数采用的也是简单累数制.

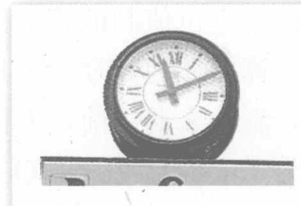


图 1-5　罗马街头的钟

另外，12 世纪以前盛行欧洲的罗马数码采用的也是简单累数制，现在某些场合还在使用，如书本的卷数，章节的序号，正文前的页码，老式的钟表盘（图 1-5）等. 罗马数字用大写的拉丁字母（有时也用小写）表示数目：

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1 000

一个简单的数要写成长长的一串，如

$$3\,888 = \mathrm{MMMDCCCLXXXVIII},$$

从左向右书写，单位从大到小排列. 但如果较小的单位写在较大单位之左，要用“减法原则”. 如：IV＝5－1＝4，IX＝10－1＝9 等. 这个原则在历史上时兴时废，直到中世纪还未固定下来，有时 IV 也写成 IIII. 一般只允许减去一个单位，但古代并不完全遵守这一原则.

分级符号制

和简单累数制比起来，分级符号制不但对每一个较高的单位都要另立符号，而且对较高单位的倍数也要设新符号.

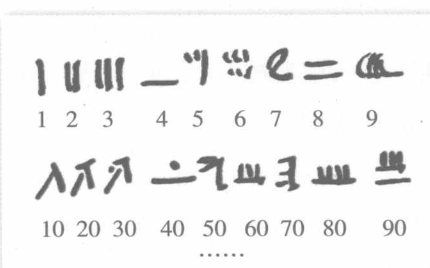


图 1-6

古埃及僧侣文中的数码就属于十进的分级符号制. 除了 1，2，…，9 各有符号表示外，10，20，…，90 以及 100，200，…，900 等等都有特殊符号表示，如图 1-6.

使用这种记数制度需要记住很多符号，这是缺点，但写起来很紧凑，如 4 997 写作 ，其中前两个符号分别表示 4 000 和 900. 由于这样的特殊符号毕竟是有限的，所以在表示太大的数字时，这种记数制度就无能为力了.

古希腊的字母记数法，犹太民族的希伯来字母记数法以及阿拉伯字母记数法都属于分级符号制.

乘法累数制

简单累数制也可叫做加法累数制，原理是将各个数码所表示的数加起来. 600 要把 100 重复写 6 次，这是很麻烦的. 乘法累数制是将重复书写改用乘法表示. 最具代表性的