“希望杯”数学竞赛系列丛书 主编 周国镇

希望杯
数学能力培训教程 初二

吴其明
骆　华 等 编著

第2版

掌握美的数学

学会创新思考

登上更高境界

数学能力测评的高水准资料

为千千万万的青少年播种希望

气象出版社
China Meteorological Press

责任编辑：胡育峰

封面设计：博雅思企划

- 圆形，表示广阔的天空。
- 英文hope(希望)形如一只展翅飞翔的鸟。喻义："希望杯"全国数学邀请赛为广大的青少年在科学思维能力上的健康发展开辟了一个广阔的空间，任他们自由翱翔。
- "since 1990"字样表示："希望杯"全国数学邀请赛是从1990年开始创办的。

希望杯

XIWANGBEI **数学能力培训教程·初二（第2版）**

SHUXUE NENGLI PEIXUN JIAOCHENG·CHUER （DI–ER BAN)

ISBN 978-7-5029-4557-2

9 787502 945572 >

定价：18.00元

"希望杯"数学竞赛系列丛书　主编　周国镇

"希望杯"数学能力

培训教程

初　二

(第2版)

吴其明　骆　华等◎编著

气象出版社
China Meteorological Press

图书在版编目(CIP)数据

“希望杯”数学能力培训教程．初二/吴其明，骆华等编著．2版．—北京：气象出版社，2008.10

(“希望杯”数学竞赛系列丛书/周国镇主编)

ISBN 978-7-5029-4557-2

Ⅰ．希…　Ⅱ．吴…　Ⅲ．数学课-初中-教学参考资料　Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 131862 号

“Xiwangbei” Shuxue Nengli Peixun Jiaocheng, Chuer (Di-er Ban)

“希望杯”数学能力培训教程　初二(第 2 版)

吴其明，骆华等　编著

出版发行：气象出版社

地　　址：北京市海淀区中关村南大街 46 号　　邮政编码：100081

电　　话：总编室　010-68407112；发行部　010-68409199

网　　址：http://cmp.cma.gov.cn　　E-mail：qxcbs@263.net

责任编辑：胡育峰　　终　　审：林雨晨

封面设计：博雅思企划　　版式设计：吴庭芳

责任校对：赵　寒

印　　刷：北京京科印刷有限公司

开　　本：850 mm×1168 mm　1/32　　印　　张：11.75

字　　数：305 千字

版　　次：2008 年 10 月第 2 版　　印　　次：2008 年 10 月第 10 次印刷

印　　数：1～40000　　定　　价：18.00 元

前　　言

这套教程充分注意了新颁布的中小学数学教学大纲，力求充分体现“希望杯”的特色，为广大师生提供系统、全面、实用的数学内容、思想和方法，以“鼓励学好课本知识，适当拓宽知识面，激发学习数学的兴趣和热情，培养科学的思维能力、创新能力和实践能力”。

本教程中所有原始的素材都来源于历届“希望杯”全国数学邀请赛的试题和培训题，这些题目中绝大多数是由“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会的专家们命定的，其余则是由全国各地数学命题的研究人员编拟。这些题目，不但贴近现行的中小学数学课本，而且很有启发性、思考性和趣味性，寓科学于趣味之中，寓知识、能力的考查于数学的美育之中。学习和研究这些题目不仅能使学习者对数学课本的理解、掌握和应用能力达到高水平，并且能实实在在地提高科学思维素质，而这种素质对于有效地学习任何知识都是必需的。正因为如此，历届“希望杯”全国数学邀请赛的试题和培训题被多方人士看好：中考、高考命题人员经常从中吸取营养；有远见的数学教师大量地从中选取资料，来充实和丰富教学内容；众多的数学教学和培训机构则用来作为教材的主要内容之一。最有说服力的是千千万万的中小学生，正是通过对“希望杯”试题的学习、研究，提高了水平，大大加强了学数学的兴趣和信心，他们的数学素养明显地不同于没有接触过“希望杯”的学生们。值得一提的是，北大、清华等著名高校以及远赴国外大学的众多学子

中有不少人，在中学时代，都曾有参加过“希望杯”全国数学邀请赛并且获奖的经历。

“希望杯”全国数学邀请赛从1990年开始举办，至今已举办19届。19年来，参赛的初一、初二、高一、高二这四个年级，每个年级的试题、培训题累计近3000个，四个年级的题目则累计近1.2万个，几乎覆盖了中学数学的全部以及中学数学课本以外的很多内容，不仅如此，而且蕴涵了丰富的数学思想和方法。若要将这些题目全部做一遍，对于一位数学教师来说，确也值得和可能，但是对于一位中学生，则难度就很大了。因此如何从中提取最精彩最重要的部分，按数学的系统整理出来，就非常必要。本教程正是做了这样一件事：它从每个年级的近3000多个题目中各精选了四分之一左右，分为若干个专题，对每个专题，给出了相关的必备知识，再详细分析若干个题目，然后安排做少量的题，通过这样一个过程，一个专题就拿下来了。一个个专题，陆续学下来，中学数学的最主要的内容、思想和方法也就能熟悉和掌握，数学功底必然大大地得到加强。

考虑到大部分中小学生只是希望能很好地掌握学校里数学课本上的内容，另一方面又有不少中小学生并不满足于此，他们对课本以外的数学也有强烈的求知欲，所以我们的教程分课本以内的和课本以外的两部分。前者占教程的大部分，后者只占小部分。

《“希望杯”数学能力培训教程》由气象出版社于2005年12月开始出版，此后多次重印，现在为改编后的第2版，包括初一、初二、高一、高二、小学四、五、六年级，共七册。该教程在内容上贴近新的中小学数学教学大纲，更突出对科学思维能力的培养，而且在行文上力求简明易懂。

随着“希望杯”试题的不断更新和学校数学教学的需要，本教程将逐年修订，不断优化，力求将教、学和应试三者融为一体。衷心希望本套教程能引导更多的中小学生走向热爱数学、掌握数学

的成功道路。

教程的作者主要是“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会的成员，有的作者是多年带领学生参加“希望杯”全国数学邀请赛，并对“希望杯”试题深有研究的数学教师。

真诚的欢迎读者指出书中不妥之处。

周国镇

2008年9月1日

注：**周国镇**　数学教育专家，《数理天地》杂志社社长兼总编；中国优选法统筹法与经济数学研究会常务理事，数学教育委员会主任；“希望杯”全国数学邀请赛组委会秘书长，命题委员会主任。

目　　录

第一部分

基础篇

第 1 讲　因式分解

一、知识提要

1. 概念

将一个多项式化成几个最简整式的乘积的形式，就叫做将这个多项式因式分解，也可称为将这个多项式分解因式.

2. 因式分解的基本方法

(1)提公因式法

如果多项式的各项有公因式，可以把这个公因式提到括号外面，将多项式写成因式乘积的形式.

(2)运用公式法

平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$；

完全平方公式：$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$；

立方和公式：$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$；

立方差公式：$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

另外两个常用公式：

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$；

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$

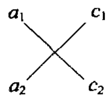
(3)分组分解法

将一个多项式分成二组或三组，各组分别提公因式后，彼此又有公因式可提出.

3. 因式分解的技巧

(1)十字相乘法

将二次三项式 ax^2+bx+c 的系数 a 分解成 a_1a_2，常数项 c 分解成 c_1c_2，并且把 a_1,a_2,c_1,c_2 排列如下：



这里按斜线交叉相乘，再相加，得到 $a_1c_2+a_2c_1$，如果它正好等于 b，那么 ax^2+bx+c 就可以分解成 $(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$.

(2)双十字相乘法

对于某些二元二次六项式 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$，可以看做关于 x 的二次三项式 $ax^2+(by+d)x+cy^2+ey+f$. 先用十字相乘法将“常数项”cy^2+ey+f 分解，再利用十字相乘法将关于 x 的二次三项式分解.

(3)换元法

将一个较复杂的代数式中的某一部分看做一个整体，用一个新字母替代它，从而简化运算过程，分解后要注意将新字母还原.

(4)拆项、添项

将多项式中的某一项拆成两项或多项，或者在多项式中添上两个符号相反的项，再用分组分解法或其他分解法进行分解因式.

(5)待定系数法

若能断定多项式可分解为某几个因式，而这几个因式中的某些系数尚未确定，就可以用一些字母来表示待定的系数. 将这几个因式相乘后，与多项式的系数进行比较，就可以求出待定的系数.

(6)利用因式定理

如果 $x=a$ 时，关于 x 的多项式的值为零，那么 $x-a$ 是该多项式的一个因式.

4. 因式分解的步骤

如果多项式的各项有公因式，应先提公因式；如果各项没有公因式，再看能否直接运用公式或用十字相乘法分解；如还不能，就试用分组分解法或其他方法. 因式分解，必须进行到每一个多项式因式都不能再分解为止.

二、例题

1. 怎样进行因式分解

例 1　分解因式：$a^3b+ab+30b$ 的结果是__________.

第 11 届(2000 年)初二第 1 试

解　原式

$=b(a^3+a+30)$

(提公因式)

$=b[(a^3+27)+(a+3)]$

(拆项、分组分解)

$=b[(a+3)(a^2-3a+9)+(a+3)]$

(运用公式)

$=b(a+3)(a^2-3a+10)$

(提公因式).

例 2　把代数式 $(x+y-2xy)(x+y-2)+(xy-1)^2$ 分解成因式的乘积，应当是__________.

第 9 届(1998 年)初二第 2 试

解　原式

$=(x+y)^2-2xy(x+y)-2(x+y)+4xy+x^2y^2-2xy+1$

$=(x+y)^2-2(x+y)(xy+1)+(xy+1)^2$

(提公因式、运用公式)

$=(x+y-xy-1)^2$

(运用公式)

$=[(x-1)+(y-xy)]^2$

(分组分解)

$=[(x-1)\cdot(1-y)]^2$

(提公因式)

$=(x-1)^2\cdot(y-1)^2$.

例 3 分解因式:$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=$________.

第 13 届(2002 年)初二培训题

解 原式

$=x^3(x^2+x+1)+(x^2+x+1)$

(分组分解)

$=(x^2+x+1)(x^3+1)$

(提公因式)

$=(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

(运用公式).

例 4 在有理数范围内分解因式:

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)+x^2=$________.

第 16 届(2005 年)初二第 2 试

解 原式$=[(x+1)(x+6)][(x+2)(x+3)]+x^2$

(重新分组)

$=(x^2+7x+6)(x^2+5x+6)+x^2$

(展开运算)

$=[(x^2+6x+6)+x][(x^2+6x+6)-x]+x^2$

(寻找规律)

$=(x^2+6x+6)^2-x^2+x^2$

(运用公式)

$=(x^2+6x+6)^2$.

例 5　分解因式：$a^5+a+1=$__________.

第 13 届(2002 年)初二培训题

解　原式

$=a^5-a^2+a^2+a+1$

（添 $-a^2$ 和 $+a^2$ 两项）

$=a^2(a^3-1)+(a^2+a+1)$

（前两项提公因式 a^2）

$=a^2(a-1)(a^2+a+1)+(a^2+a+1)$

（用立方差公式）

$=(a^2+a+1)(a^3-a^2+1)$

（提公因式 a^2+a+1）.

例 6　若 $(x-a)(x-b)-k$ 中含有因式 $x+b$，则 $k=$__________.

第 12 届(2001 年)初二培训题

解　$(x-a)(x-b)-k=x^2-(a+b)x+ab-k$.

由题意可设它的另一个因式为 $(x+c)$，于是

$$x^2-(a+b)x+ab-k=(x+b)(x+c)=x^2+(b+c)x+bc,$$

所以
$$\begin{cases}-(a+b)=b+c & ① \\ ab-k=bc & ②\end{cases}.$$

由①式，得　$c=-a-2b$，　代入②式，得　$k=2b(a+b)$.

2. 因式分解的应用

例 7　7328^2-7325^2 等于　（　　）

(A) 47249.　　(B) 45829.　　(C) 43959.　　(D) 44969.

第 3 届(1992 年)初二第 2 试

解　$7328^2-7325^2=(7328-7325)(7328+7325)=43959$.

选(C).

例 8 若 $a+b+c=0$,则 $a^3+a^2c-abc+b^2c+b^3$ 的值是 ( )

(A)-1. (B)0. (C)1. (D)2.

第 9 届(1998 年)初二第 2 试

解 $a^3+a^2c-abc+b^2c+b^3$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)+c(a^2-ab+b^2)$

$=(a^2-ab+b^2)(a+b+c)$

$=0$.

选(B).

例 9 化简 $1+x+x(1+x)+x(1+x)^2+\cdots+x(1+x)^{1995}$,得到________.

第 6 届(1995 年)初二第 1 试

解 原式

$=(1+x)(1+x)+x(1+x)^2+\cdots+x(1+x)^{1995}$

$=(1+x)^2(1+x)+\cdots+x(1+x)^{1995}$

……

$=(1+x)^{1996}$.

例 10 已知 n 是正整数,且 n^4-16n^2+100 是质数,那么 $n=$ ________.

第 12 届(2001 年)初二第 1 试

解 原式

$=n^4+20n^2+100-36n^2$

$=(n^2+10)^2-36n^2$

$=(n^2+6n+10)(n^2-6n+10)$.

因为 n^4-16n^2+100 是质数,且 n 是正整数,

又 $n^2+6n+10\neq 1$,

所以 $n^2-6n+10=1$,即$(n-3)^2=0$,

所以 $n=3$.

例 11 $y-2x+1$ 是 $4xy-4x^2-y^2-k$ 的一个因式,则 k 的

值是 ( )

(A)0. (B)-1. (C)1. (D)4.

第 14 届(2003 年)初二第 2 试

解 很显然,$x=0,y=-1$ 满足不定方程 $y-2x+1=0$,

而 $y-2x+1$ 是 $4xy-4x^2-y^2-k$ 的一个因式,

所以 $x=0,y=-1$ 必能满足方程 $4xy-4x^2-y^2-k=0$.

代入后解得 $k=-1$. 选(B).

例 12 若$\triangle ABC$ 的三条边 a,b,c 满足关系式:$a^4+b^2c^2-a^2c^2-b^4=0$,则$\triangle ABC$ 的形状是________.

第 6 届(1995 年)初二第 2 试

解 由已知得

$$(a^2+b^2)(a^2-b^2)-c^2(a^2-b^2)=0,$$

所以 $$(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0,$$

所以 $$a^2+b^2=c^2 \text{ 或 } a=b.$$

所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形(自然不排除等腰直角三角形).

例 13 已知多项式 ax^3+bx^2+cx+d 除以 $x-1$ 时,所得的余数是 1,除以 $x-2$ 时所得的余数是 3,那么多项式 ax^3+bx^2+cx+d 除以$(x-1)(x-2)$时,所得的余式是 ( )

(A)$2x-1$. (B)$2x+1$. (C)$x+1$. (D)$x-1$.

第 12 届(2001 年)初二第 2 试

解 用待定系数法.

(1)ax^3+bx^2+cx+d

$=ax^2(x-1)+(b+a)x(x-1)+(c+b+a)(x-1)+(a+b+c+d)$

$=[ax^2+(a+b)x+(a+b+c)](x-1)+(a+b+c+d)$.

由题意得

$$a+b+c+d=1. \quad ①$$

(2)ax^3+bx^2+cx+d

$=ax^2(x-2)+(2a+b)x(x-2)+$
$(c+2b+4a)(x-2)+(d+2c+4b+8a)$
$=[ax^2+(2a+b)x+(4a+2b+c)](x-2)+(8a+4b+2c+d).$

由题意得

$$8a+4b+2c+d=3. \quad ②$$

(3) ax^3+bx^2+cx+d
$=ax(x-1)(x-2)+(b+3a)(x-1)(x-2)+$
$(c+3b+9a-2a)x+(d-2b-6a).$

所求余式为 $(7a+3b+c)x+(-6a-2b+d).$

由②－①，得

$$(8a+4b+2c+d)-(a+b+c+d)$$
$$=7a+3b+c=2. \quad ③$$

由①－③，得

$(a+b+c+d)-(7a+3b+c)=-6a-2b+d=-1.$

故所求余式为 $2x-1$. 选(A).

另解

设 ax^3+bx^2+cx+d
$=(x-1)(x-2)(ax+m)+px+q,$

则 当 $x=1$ 时，$p+q=1$；

当 $x=2$ 时，$2p+q=3$，

解得 $p=2, q=-1$，故所求的余式是 $2x-1$.

例 14 已知 a,b,c 均为实数，且多项多式 x^3+ax^2+bx+c 能够被 x^2+3x-4 整除.

(1)求 $4a+c$ 的值；

(2)求 $2a-2b-c$ 的值；

(3)若 a,b,c 为整数，且 $c\geqslant a>1$，试确定 a,b,c 的大小.

第 8 届(1997 年)初二第 2 试

解 (1)因为 $x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$，

所以 $x-1, x+4$ 都能整除 x^3+ax^2+bx+c，

因为 $(x-1)\mid x^3+ax^2+bx+c$,

所以 $1+a+b+c=0$,

因为 $(x+4)\mid x^3+ax^2+bx+c$,

所以 $-64+16a-4b+c=0$,

整理得 $\begin{cases}a+b+c=-1 & ①\\16a-4b+c=64 & ②\end{cases}$.

$4\times$①+②,得 $20a+5c=60$,

所以 $4a+c=12$. ③

(2)由③得 $a=3-\frac{c}{4}$, ④

将④代入①得 $3-\frac{c}{4}+b+c=-1$,

所以 $b=-4-\frac{3}{4}c$. ⑤

将④,⑤代入 $2a-2b-c$ 中,得

$$2a-2b-c=6-\frac{c}{2}+8+\frac{3}{2}c-c=14.$$

(3)因为 a,b,c 是整数且 $c\geqslant a>1$,

又 $a=3-\frac{c}{4}<3$,

由 a 为整数知 $a=2$,

代入③得 $c=4$,再一起代入①,得 $b=-7$.

例 15 实数 $m=2005^3-2005$,下列各数中不能整除 m 的是 ( )

(A)2006. (B)2005. (C)2004. (D)2003.

第17届(2006年)初二第1试

解 $m=2005^3-2005$

$=2005(2005^2-1)$

$=2005(2005+1)(2005-1)$

$=2005\times2006\times2004$.