全国奥数领队担纲　奥赛金牌教练主笔

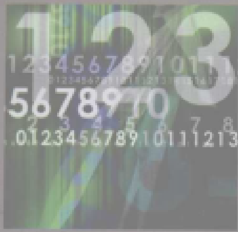
AOSHE JIANGYI

奥数讲义

高一年级下

◆ 主编 朱华伟

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社



全国奥数领队担纲　奥赛金牌教练主笔

★ 奥数讲义（高一年级上、下）

★ 奥数讲义（高二年级上、下）

★ 奥数讲义（高三年级上、下）

ISBN 978-7-308-05528-4

定价：18.00 元

奥数讲义

高一年级下

主编　朱华伟

编著　朱华伟　蒋太煌　张　雷

符开广　范端喜

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥数讲义．高一年级．下/朱华伟主编．—杭州：浙江大学出版社，2007.10
ISBN 978-7-308-05528-4

Ⅰ.奥… Ⅱ.朱… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 137316 号

奥数讲义(高一年级下)

主　　编　朱华伟

责任编辑　邹小宁
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
（杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028）
（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷　杭州金盾印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　14
印　　数　00001—10000
字　　数　370 千
版 印 次　2007 年 10 月第 1 版　2007 年 10 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-05528-4
定　　价　18.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88072522

前　言

数学被誉为科学的皇后。在人类文明的历史进程中，中华民族对数学的发展曾作出过卓越的贡献。勾股定理、祖冲之圆周率、九章算术等丰硕成果无不闪烁耀眼的光芒。新中国成立以后，中国的现代数学有了长足的发展，先后涌现出华罗庚、陈景润等一批著名数学家。数学大师陈省身教授曾预言："21世纪，中国必将成为数学大国。"从1985年我国第一次派队参加国际数学奥林匹克以来，中国代表队共122人参赛，取得92块金牌、23块银牌、5块铜牌，13次团体总分第一的好成绩。中学生在国际数学奥林匹克中的出色表现，使人们相信陈省身教授的这一"猜想"将在本世纪得到证明。

由于计算机的出现，数学已不仅是一门科学，还是一种普适性的技术。从航空到家庭，从宇宙到原子，从大型工程到工商管理，无一不受惠于数学技术。高科学技术本质上是一种数学技术。美国科学学院院士格里姆(J. Glimm)说："数学对经济竞争力至为重要，数学是一种关键的普遍使用的，并授予人能力的技术。"时至今日，数学已兼有科学与技术两种品质，这是其他学科少有的。数学对国家的贡献不仅在于富国，而且还在于强民。数学给予人们的不仅是知识，更重要的是能力，这种能力包括观察实验、收集信息、归纳类比、直觉判断、逻辑推理、建立模型和精确计算。这些能力的培养，将使人终身受益。这些能力的培养，必须从小抓起，从青少年抓起。而数学奥林匹克活动，则是培养这些能力的良好载体。

基于这样的想法，我们以国内外高中数学奥林匹克为背景，以《全日制高中数学课程标准》的新理念、新要求为准绳，兼顾"大纲"与"新课标"的过渡，根据多年培训数学奥林匹克选手的经验和体会，编写这套《奥数讲义》。通过这套讲义的学习，使学生发现数学的美丽和魅力，体会数学的思想和方法，感受数学的智慧和创造力，体验经过不懈的探索而获得成功的兴奋和快乐，进而激发学习数学的兴趣。她既为学有余力且对数学感兴趣的高中生提供一个施展才华和提高数学解题能力的有效指导，也为参加数学奥林匹克的高中生提供一套科学实用的培训教程。

本丛书设计新颖，方便老师、学生和家长使用，分高一、二、三年级上册和高一、二、三年级下册，共六册。

每册内容包括专题讲座篇、同步测试篇、全真测试篇。专题讲座篇的专题以讲义的形式编写，每讲的主要栏目有：

数学名言欣赏。以名人名言开宗名义，开始每讲的奥数学习之旅。

目录 contents

专题讲座篇

同步测试篇

全真测试篇

专题讲座篇

第1讲　三角函数的图象与性质

用几何图形去表达事情是极为有利的，因为没有什么东西比几何图形更容易进入人们的思维.

——笛卡尔

知识方法扫描

1. 正、余弦函数的有界性

(1) $|\sin x|\leqslant 1$　(2) $|\cos x|\leqslant 1$

2. 三角函数的单调性

(1) $y=\sin x$ 单调递增区间为$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$；单调递减区间为$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3}{2}\pi+2k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$；

(2) $y=\cos x$ 单调递增区间为$[-\pi+2k\pi,2k\pi]$；单调递减区间为$[2k\pi,2k\pi+\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$；

(3) $y=\tan x$ 单调递增区间为$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$；

(4) $y=\cot x$ 单调递减区间为$(k\pi,k\pi+\pi])$，$k\in\mathbf{Z}$.

3. 三角函数的周期性

(1) $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 与 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期为$\frac{2\pi}{|\omega|}$；

(2) $y=A\tan(\omega x+\varphi)$ 与 $y=A\cot(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期为$\frac{\pi}{|\omega|}$.

4. 三角函数的奇偶性

(1) 正弦函数 $y=\sin x$，正切函数 $y=\tan x$，余切函数 $y=\cot x$ 在其定义域上均为奇函数；

(2) 余弦函数 $y=\cos x$ 在其定义域上为偶函数.

经典例题解析

例1　(2000年全国高考·全国卷)已知函数 $y=\frac{1}{2}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x+1$，$x\in\mathbf{R}$.

(1) 当函数 y 取得最大值时，求自变量 x 的集合；

(2) 该图形可由 $y=\sin x(x\in\mathbf{R})$ 的图象经过怎样的平移和伸缩变换得到？

分析　先将函数表达式化简是必须的一步.

解 (1) $y=\frac{1}{4}(2\cos^2x-1)+\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sin x\cos x)+1=\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\frac{5}{4}$

$$=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{5}{4}$$

y 取最大值，只要 $2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$ 所以 $x=k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$

此时自变量 x 的集合为 $\left\{x\,\middle|\,x=k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$

(2) (i) 将 $y=\sin x$ 图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 图象；

(ii) 把 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 图象上各点横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变）得到 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 图象；

(iii) 把 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 图象上各点纵坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（横坐标不变）得到 $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 图象；

(iv) 把得到的图象向上平移 $\frac{5}{4}$ 个单位即得 $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{5}{4}$ 的图象.

综上，得到 $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{5}{4}$ 的图象.

评注 本题考查了三角函数的图象及其性质.

例2 (2003 年全国高考·江苏卷)已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，其图象关于点 $M\left(\frac{3}{4}\pi,\ 0\right)$ 对称，且在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调函数，求 ω 和 φ 的值.

分析 本题应充分利用其对称性，并随着解题不断观察、探索.

解 由 $f(x)$ 是偶函数及正、余弦三角函数性质知，

$f(0)=\pm1$ 即 $\sin\omega=\pm1$，又 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}$

又 $f(x)$ 图象关于 $\left(\frac{3}{4}\pi,\ 0\right)$ 对称及函数图象性质：$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0$ 即 $\sin\left(\frac{3}{4}\pi\omega+\frac{\pi}{2}\right)=0$

所以 $\frac{3}{4}\pi\omega+\frac{\pi}{2}=k\pi$ 所以 $\omega=\frac{2}{3}(2k-1)$

又 $\omega>0$ 所以 $k=1,2,3,\cdots$

当 $k=1$ 时，$\omega=\frac{2}{3}$，$f(x)=\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{2}\right)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上是减函数；

当 $k=2$ 时，$\omega=2$，$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是减函数；

当 $k\geqslant3$ 时，$\omega\geqslant\frac{10}{3}$，$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{2}\right)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上不是单调函数.

综上，$\omega=\frac{2}{3}$ 或 $\omega=2$，$\varphi=\frac{\pi}{2}$

评注 本题主要考查了三角函数的图象和单调性、奇偶性等基本知识.

例3 已知函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+a\cos x+b$ (a, $b\in\mathbf{R}$ 且均为常数)

(1) 求函数 $f(x)$的最小正周期;

(2) 若 $f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$上单调递增,且恰好能够取得 $f(x)$的最小值 2,试求 a,b值.

分析 利用三角公式对表达式化简是必要的步骤.

解 (1) $f(x)=\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}+\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}+a\cos x+b=\sqrt{3}\sin x+a\cos x+b=\sqrt{a^2+3}\sin(x+\theta)+b$,其中 $\sin\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+3}}$,$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+3}}$. 所以 $f(x)$ 的最小正周期为 2π.

(2) 由(1) 可知:$f(x)$ 最小值为 $-\sqrt{a^2+3}+b$,所以

$$-\sqrt{a^2+3}+b=2 \qquad ①$$

又 $f(x)$ 在区间$\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$上最小值 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$也为 2,所以

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{3}{2}+\frac{a}{2}+b=2 \qquad ②$$

由 ①、② 可得:$a=-1$,$b=4$

评注 三角函数的有界性是本题考查重点. 其中辅助角公式($a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$)是处理三角函数问题的重要工具之一.

例4 (2003 年全国高中数学联赛) 若 $x\in\left[-\frac{5}{12}\pi, -\frac{\pi}{3}\right]$,则 $y=\tan\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)-\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$的最大值是多少?

分析 观察到$\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)-\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}$是本题突破点之一.

解

$$\begin{aligned} y&=\tan\left(x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)-\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\\ &=-\left[\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cot\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\\ &=-\frac{2}{\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

又$\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}\right]$,$\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right]$. 由正、余弦函数单调性知:

$-\frac{2}{\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}$ 与 $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$在区间$\left[-\frac{5}{12}\pi, -\frac{\pi}{3}\right]$上同为单调递增函数.

在当 $x=-\frac{\pi}{3}$ 时,$f(x)$ 有最大值,即 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{2}{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}+\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{11}{6}\sqrt{3}$

评注 本题表达式无法统一成为同名三角函数,灵活利用三角函数的单调性则成为本

高一年级·下

题解决关键.此种思想在其他题目中也有重要应用.

例5 设 $x\in\mathbf{R}$,试比较 $f(x)=\cos(\cos x)$ 与 $g(x)=\sin(\sin x)$ 的大小.

分析 这两个函数均是三角函数的复合函数,因此,我们仍利用三角函数单调性、周期性、有界性等性质进行解题.

解 由于 $f(x+2\pi)=f(x)$ 及 $g(x+2\pi)=g(x)$,我们只要考虑 $x\in[-\pi,\pi]$ 时,$f(x)$ 与 $g(x)$ 大小关系.

当 $x\in[-\pi,0]$ 时,$f(x)>0$, $g(x)\leqslant 0$ 所以 $f(x)>g(x)$.

当 $x\in[0,\pi]$ 时,$\sin(\sin x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\sin x\right)$,$\cos(\cos x)=\cos|\cos x|$. 而 $\frac{\pi}{2}-\sin x$ 和 $|\cos x|$ 同属余弦函数单调减区间 $[0,\pi]$,并且由

$$|\cos x|+\sin x=\sqrt{1+2\sin x|\cos x|}=\sqrt{1+|\sin 2x|}\leqslant\sqrt{2}<\frac{\pi}{2}\text{ 知:}$$

$$|\cos x|<\frac{\pi}{2}-\sin x$$

所以 $\sin x(\sin x)<\cos(\cos x)$

即 $g(x)<f(x)$

综上可知:$g(x)<f(x)$

评注 本题充分运用了三角函数的有界性、奇偶性、周期性、单调性,是一道综合性的好题目.

例6 设 $x\geqslant y\geqslant z\geqslant\frac{\pi}{12}$,且 $x+y+z=\frac{\pi}{2}$,求乘积 $\cos x\sin y\cos z$ 的最大值和最小值.

分析 将其中一个变量固定,进而转化为两个变量的最值问题是常用的转化手段.

解 我们先固定 z,则 $\cos x\sin y\cos z=\frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]\cos z=\frac{1}{2}[\cos z-\sin(x-y)]\cos z=\frac{1}{2}\cos^2 z-\frac{1}{2}\sin(x-y)\cos z$. 由于 $x-y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 易知:$\cos z$ 为正数,则当 $x=y$ 时,$\cos x\sin y\cos z$ 有最大值 $\frac{1}{2}\cos^2 z$. 又 $z\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$ 由余弦函数单调性知:原式最大值为

$$\frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{1}{4}\left(1+\cos\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2+\sqrt{3}}{8}.$$

此时,$x=y=\frac{5\pi}{24}$, $z=\frac{\pi}{12}$

类似,可得到 $x=\frac{\pi}{3}$, $y=z=\frac{\pi}{12}$ 时原式有最小值为 $\frac{1}{8}$.

综上,原式最大值为 $\frac{2+\sqrt{3}}{8}$,最小值为 $\frac{1}{8}$.

评注 本题应用了函数的单调性调整法,也是一种重要的思想方法.

例7 已知:$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,且 $\sin(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha+\sin^2\beta$. 求证:$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

分析 直接利用三角公式比较困难,我们巧妙利用三角函数的单调性.

解 若 $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$ 则 $\alpha>\frac{\pi}{2}-\beta$.

又 α，$\frac{\pi}{2}-\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，由余弦函数单调性知：

$$\cos\alpha<\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\sin\beta$$

同理：$\cos\beta<\sin\alpha$

所以　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta<\sin^2\alpha+\sin^2\beta$，这与 $\sin(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha+\sin^2\beta$ 矛盾.

所以　$\alpha+\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$

若 $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$，则 $\alpha<\frac{\pi}{2}-\beta$

又 α，$\frac{\pi}{2}-\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，由余弦函数单调性可知：

$$\cos\alpha>\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\sin\beta$$

同理：$\cos\beta>\sin\alpha$

所以　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta>\sin^2\alpha+\sin^2\beta$，也与已知矛盾.

所以　$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

评注　利用函数单调性是灵活解题常用的方法.

例8　(2000 年中国数学奥林匹克) 已知 a，b，c 为 $\triangle ABC$ 的三边，$a\leqslant b\leqslant c$，R 和 r 分别为 $\triangle ABC$ 外接圆和内切圆半径. 令 $f=a+b-2R-2r$，试用角 C 的大小来判定 f 的符号.

分析　我们将表达式统一成角的关系.

解　由于 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

所以　$$r=2\frac{S_{\triangle ABC}}{a+b+c}=\frac{4R^2\sin A\sin B\sin C}{2R(\sin A+\sin B+\sin C)}$$

$$=2R\frac{\sin A\sin B\sin C}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

所以　$$f=2R\left(\sin A+\sin B-1-4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$=2R(\sin A+\sin B-\cos A-\cos B-\cos C)$$

$$=2R\left[\left(2\sin\frac{A+B}{2}-2\cos\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}-\left(\cos^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\right)\right]$$

$$=2R\left(\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)\left(2\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

由 $a\leqslant b\leqslant c$ 及余弦函数的单调性知：

$$\cos\frac{A-B}{2}>\cos\frac{C}{2}，\cos\frac{A-B}{2}>\cos\frac{A+B}{2}$$

所以　$2\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{A+B}{2}>0$

若 $\cos\frac{C}{2}<\sin\frac{C}{2}$ 即 $\tan\frac{C}{2}>1$，$C\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时 $f<0$

若 $\cos\frac{C}{2}>\sin\frac{C}{2}$ 即 $\tan\frac{C}{2}<1$，$C\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$时，$f>0$，又 $c\geqslant b\geqslant a$ 知：$C\in\left[\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}\right)$

若 $\cos\frac{C}{2}=\sin\frac{C}{2}$ 即 $\tan\frac{C}{2}=1$，$C=\frac{\pi}{2}$ 时，$f=0$

综上所述：$C\in\left[\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}\right)$时，$f>0$；$C=\frac{\pi}{2}$ 时，$f=0$；$C\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$时，$f<0$

评注 本题主要考察三角函数的变形能力，其中三角函数单调性起到了辅助作用.

原版赛题传真

Problem Find the period of the function $f(x)=8\sin(7\pi x)$

Solution For the function $f(x)=8\sin(7\pi x)$ to run through a full cycle, the angle $7\pi x$ should run from $7\pi x=0$ to $7\pi x=2\pi$

and hence x should run from

$x=0$ to $x=\frac{2}{7}$. The period of $f(x)$ is then $\frac{2}{7}$.

英汉小词典

function 函数 period 周期

同步训练

一、选择题

1. (2004 年全国高考・辽宁卷)若 $\cos\theta>0$，且 $\sin 2\theta<0$，则角 θ 终边所在象限是 ( )

A. 第一象限 B. 第二象限

C. 第三象限 D. 第四象限

2. (2004 年全国高考・江苏卷) $y=2\cos^2 x+1(x\in\mathbf{R})$ 的最小正周期为 ( )

A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. 2π D. 4π

3. (2004 年全国高考・天津卷)定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$既是偶函数，又是周期函数. 若 $f(x)$的最小正周期为 π，且当 $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$时，$f(x)=\sin x$，则 $f\left(\frac{5}{3}\pi\right)$的值为 ( )

A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题

4. (2004 年全国高考・全国卷)函数 $y=\sin x-\frac{1}{2}\cos x(x\in\mathbf{R})$最大值为________.

5. 已知 $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. 若 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，则 $f(\cos\alpha)+f(-\cos\alpha)$可化简为________.

6. 若 $f(x)=2\sin\omega x(0<\omega<1)$在区间$\left[0,\ \frac{\pi}{3}\right]$上最大值为$\sqrt{2}$，则 $\omega=$________.

7. 将函数 $f(x)=\sin 2x$ 图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，再将所得图象上各点横坐标压缩到原来的 $\frac{1}{2}$，则所得函数的解析式为________.

三、解答题

8. 已知：$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\sin x<x<\tan x$. 比较 x 与 $\frac{1}{2}(\sin x+\tan x)$ 的大小，其中 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

9. $a>0$，$b>0$. 证明：$y=\frac{a\sin x+b}{a\sin x-b}$ 之值不可能介于 $\frac{a-b}{a+b}$ 与 $\frac{a+b}{a-b}$ 之间.

10. (2004 年高中联赛辽宁赛区初赛)已知实数 x、y 满足 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，求函数 $U=x+y$ 的最大值.

第2讲　三角恒等式与三角不等式

大自然这本书是用数学语言写成的……天地、日月星辰都是按照数学公式进行的.

——伽利略

知识方法扫描

1. 常用三角恒等式

(1) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

(2) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

(3) $\sin 3\alpha = 4\sin\alpha\sin(60^\circ - \alpha)\sin(60^\circ + \alpha)$

(4) $\cos 3\alpha = 4\cos\alpha\cos(60^\circ - \alpha)\cos(60^\circ + \alpha)$

2. 与△ABC三个内角相关的恒等式

(1) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

(2) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(3) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$

(4) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$

(5) $\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A = 1$

(6) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$

(7) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A\cos B\cos C)$

(8) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$

3. 三角不等式

(1) 设 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,则 $\sin x < x < \tan x$.

(2) 函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 在 $(0, \pi)$ 上为减函数.

(3) 若 $A + B + C = \pi$,则对 $x, y, z \in \mathbf{R}$ 有

$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 2yz\cos A + 2zx\cos B + 2xy\cos C$,称为嵌入不等式.

经典例题解析

例1　(2002年全国高考)已知 $\sin^2 2\alpha + \sin 2\alpha\cos\alpha - \cos 2\alpha = 1$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,求 $\sin\alpha$ 与 $\tan\alpha$ 的值.

分析　利用三角公式消去1,将关系式化为角 α 的关系,进一步求解.

解 由倍角公式 $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$，$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

原式可化为：$4\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos^2\alpha - 2\cos^2\alpha = 0$

即 $\cos^2\alpha(2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1) = 0$

$\cos^2\alpha(2\sin\alpha - 1)(\sin\alpha + 1) = 0$

因为 $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\alpha + 1 \neq 0$，$\cos\alpha \neq 0$

所以 $2\sin\alpha - 1 = 0$，所以 $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$，$\alpha = \dfrac{\pi}{6}$，所以 $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

综上：$\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$，$\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

评注 本题考察了三角函数的基本公式.

例2 已知函数 $f(x) = \dfrac{m - 2\sin x}{\cos x}$ 在区间 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，试求实数 m 的取值范围.

分析 我们要将表达式化为同名三角函数关系式.这里试用万能公式.

解 设 $\tan\dfrac{x}{2} = t$，则 $t \in (0, 1)$. 原式 $= \dfrac{m - 2\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = -m + \dfrac{2m - 4t}{1 - t^2}$

不妨设 $0 < t_1 < t_2 < 1$，由 $f(x)$ 单调性及 $\tan\dfrac{x}{2}$ 单调性可知：

$$\frac{m - 2t_1}{1 - t_1^2} > \frac{m - 2t_2}{1 - t_2^2}$$

整理得：$m < \dfrac{2t_1t_2 + 2}{t_1 + t_2}$. 由 t_1，t_2 任意性可知：

$t_1 \to 1$，$t_2 \to 1$ 时，$\dfrac{2t_1t_2 + 2}{t_1 + t_2} \to 2$，并且

$$\frac{2t_1t_2 + 2}{t_1 + t_2} > 2 \Leftrightarrow t_1t_2 + 1 > t_1 + t_2 \Leftrightarrow (t_1 - 1)(t_2 - 1) > 0$$

而 t_1，$t_2 \in (0, 1)$

所以 不等式成立. 即 $\dfrac{2t_1t_2 + 2}{t_1 + t_2}$ 值为 $(2, +\infty)$，所以 $m \leqslant 2$ 即可.

所以，m 的取值范围是 $(-\infty, 2]$.

评注 利用万能公式统一变量是本题解题关键.

例3 (2003年匈牙利数学竞赛)已知 $\triangle ABC$ 外接圆半径为 R，若 $\dfrac{a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma}{a\sin\beta + b\sin\gamma + c\sin\alpha} = \dfrac{a + b + c}{9R}$，其中 a，b，c，为 $\triangle ABC$ 三边长；α，β，γ 分别为 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的度数. 求 α，β，γ.

分析 利用正弦定理将恒等式统一化为角的关系后再进行处理.

解 由正弦定理：$a = 2R\sin\alpha$，$b = 2R\sin\beta$，$c = 2R\sin\gamma$，则

$$\frac{2R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)}{9R} = \frac{2}{9}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$$

$$\frac{a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma}{a\sin\beta + b\sin\gamma + c\sin\alpha} = \frac{2R(\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta + \sin\gamma\cos\gamma)}{2R(\sin\alpha\sin\beta + \sin\beta\sin\gamma + \sin\gamma\sin\alpha)}$$

$$= \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}{2(\sin\alpha\sin\beta + \sin\beta\sin\gamma + \sin\gamma\sin\alpha)}$$