数学考研辅导教程（上册）

苏兆龙 主编 庞秀梅 郭妤 编

SHUXUE KAOYAN FUDAO JIAOCHENG

国防工业出版社
National Defense Industry Press

数学考研辅导教程

（上 册）

苏兆龙　主编
庞秀梅　郭 妤　编

国防工业出版社
·北京·

内容简介

本书涵盖了考研数学的全部内容，把本科中学过的所有内容有机地、交叉地融合在一起，重新编排了章节，紧扣考试大纲编纂而成的。本书分上、下册共10章，包括：极限和连续，一元函数导数和微分，多元函数的导数与微分·空间解析几何，积分，常微分方程，级数，向量·矩阵·方程组，特征值与特征向量，概率论，数理统计初步等内容。

本书适用于报考研究生需要考数学的考生使用，主要是针对"数学一"的考生写的，但删去了某些章节后可以适用于其它类型的考生。本书可供有关教员参考，也适用于大学一、二年级学生在学习时参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

数学考研辅导教程／苏兆龙主编．—北京：国防工业出版社，2008.8

ISBN 978-7-118-05704-1

Ⅰ．数… Ⅱ．苏… Ⅲ．高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第059703号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号　邮政编码100044)

腾飞印务有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 710×960　1/16　印张 35¼　字数 640 千字

2008年8月第1版第1次印刷　印数 1—4000 册　定价 92.00 元(上、下册)

国防书店：(010)68428422　　发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535　　发行业务：(010)68472764

前　言

作者从事考研辅导已有许多年了，讲授获得了听课学生的欢迎和好评，也获得了很好的成绩。在教学实践的基础上，作者于2000年曾编写了《数学考研辅导教程》(江苏教育出版社出版)，这是我们多年上辅导课的工作的总结，也是根据多年的备课笔记加以整理、提高、扩充而成的。主要目的是为了满足广大考研同学对考研辅导书面资料的要求，解决一部分考生不能参加我们辅导班面授的缺憾，同时也是希望有个机会将作者前一段所做的工作做一个小结。

今年有幸，国防工业出版社对该书组织再版。说是再版，实际上我们对内容作了重大调整，许多章节和内容都完全重写。有的章节的内容也做了扩充或者缩减，所以奉献给读者的可以说是一本新的教材。我们安排各章节的内容紧扣考纲，并有由历届考题(尤其是近几年)所反映出的考试重点，以此来指导我们的辅导过程，指导本书的编纂工作。当然，由于数学学科本身的特点，我们不能仅以考点而讲考点，但主要还是围绕着考点而展开的。

本书具有如下的特点：

(1)本书是综合型的、混合型的，并不拘泥于原教材中一章一节的讲述，而是把前、后的内容有机地、交叉地融合在一起，并重新编排了章节。本书特别适合于在大学一年级、二年级已经学过有关大学数学的学生作为复习资料阅读和使用。

(2)本书把必要的定义、定理、公式都罗列在有关章节之中，以便学生查阅。

(3)本书以考试大纲为原则，对凡是考纲中列举的内容都进行了复习，但在内容的安排上有简略、有详尽。对在考试中，容易考到且考生掌握相对比较困难的内容都作了详尽的讨论，并列举了大量的例子、分析了各种可能的变化，力争让学生感到“难点不难”。而对虽列在考纲中但不太可能考到的内容也作了适当的讨论，一方面使学生不至于牵涉过多的精力；另一方面，万一考到(小概率事件发生了)，考生也不会惊慌失措、无从应对。

(4)本书的难度是“中等”程度的，但要比课本中的内容更深、更概括、更系统全面。书中讨论了许多在课本中未见的题型及处理方法，更重要的是增加了综合讨论和题型。但内容还是紧紧围绕着考纲进行的。有些不可能考到的内容(如重积分中一般的坐标变换)则一概删去(虽然有些作者把这些内容列入到他们的书中)。对某些技巧性过强的题(甚至可以说是“一题一巧”)，我们也没有列举(其

实这样的题是最“抓”学生的)，因为对于考研的实用性不大。

(5)在讲到每一章节的内容时，我们都对该内容在考试中出现的可能性作一估计，并对整个试卷的构成也作了估计，也就是说对考研试题的内容、类型、范围作一猜测。作者每年都要进行这方面的工作，而且颇有成效，命中率较高。其体会是:要站在出题人的立场来考虑今年的考题会是什么样，即假如由我来出今年的考题，那么我应该会出什么样的题呢？有这样的换位思考，命中率就会提高了。

(6)书中还有大量的例题，其中包含了众多的解题技巧。而许多技巧都是作者自创的(其它书中并没有)，对求解某些问题颇有奇效。经过多年考试实践，证明这些例题和技巧覆盖了整个考试范围，并无遗漏。

书中的例题的讲解非常详尽，目的就是为了解决部分考生不能面授的缺憾。每个例题都有分析、解答和附注，交待了如何入手，如何做好第一步，并讲解作者是如何想到用这个技巧的。例题中也详细交代了解题时要注意哪些要素。作者几乎每年都参加阅卷工作，根据历年阅卷的经验，特别注意指出学生容易出错的地方及出错的类型，甚至列出了错误的做法，以引起学生的重视和警惕。

(7)在各章后都列有一定数目的习题，这是作者经过多年揣摩，精心编撰而成的，而且习题的数量也是适当的(作者一向反对搞题海战术)。适当做一些题是可以的，也是应该的。但是如果整日沉陷在题海中，四处搜寻一些怪题和偏题来做，就不能深入钻研基本概念和基本运算技巧了，可以说是本末倒置。考研和高考有明显的不同。考研的试题(尤其是大题)一般不会见诸于任何已知的书籍，要求解它主要靠基本概念、基本理论和基本技巧的掌握。我们习题的数量虽说是中等，但覆盖面相当广泛，且适合考研学生使用，并且习题均有答案，便于学生查对。习题虽说列在各章的后面，但在求解过程中往往要用到其它各章的内容，因为很多的习题是综合性的。

考研的复习是一个系统工程，作者建议按以下步骤进行为宜。

第一步　首先，作者建议读者全面地、系统地阅读以下在一年级、二年级时用过的教科书：

(1)高等数学(同济大学编，第五版)上、下册。包括所有讲过的内容，凡是小字排印的、或者打“ * ”号的内容可以跳过不看。

(2)线性代数(同济大学编)。包括所有讲过的内容。但这本书内容相对较浅，读者可参考北京大学编的“高等代数”有关章节(凡是同济版未涉及的内容可以不看)以及习题。

(3)概率论与数理统计(浙江大学编，第三版)。前7章半内容(即第8章只需要前四节)。

读书的时候，要掌握各个基本概念、定义、定理、公式(基本极限、求导公式、积分公式、展开公式等要做到如数家珍般地熟练)，还要搞清重要概念(公式、定理)

之间的关系。关于课本后的习题，可以采用以下的原则：凡是感到熟悉的内容，所附习题可以不做或少做；感到不太熟悉的内容，所附习题可以多做，甚至全做。

第二步 参加我们的考研辅导班及详细阅读本书。阅读本书时不仅要注意所列的内容，还要认真注意书中所列的定理、公式的条件、适用范围及所针对的对象。仔细阅读例题，揣摩作者为什么要使用这些技巧和方法的（这些都是有规律可寻的）。

作者有个体会：读书的时候别做题，做题的时候别读书”。最忌讳的就是：读一点书，然后就开始做题。题不会做了，再到前面去翻书、找公式，完了再去做题。这样做收效甚微，就是白白浪费时间。待掩卷之后，你就会发现书上的内容在头脑中成了一锅粥，毫无头绪。因此，作者认为正确做法是：先读书，先理解内容，在自认为把基本概念、基本定义、基本定理（公式）、基本运算技巧都搞明白了的时候再来做题。

做题起着巩固、加深书本知识的目的，是为了熟身练手，是为了检验自己掌握书本知识的状况，决不能试图靠做题来达到学习的目的，这样就本末倒置了。

第三步 在读完本书后可以做一些书中的习题，题量不是很大，但覆盖面比较广，应付考试所需要的基本内容都已经包括其中。如果感觉所列习题的题量太大（主要是针对那些基础比较好的同学而言），可以挑选一些题做。

例题和习题有一部分是重复的，目的主要是照顾那些仅需要找题做的同学。

本书后还附有习题的答案，以供同学们参考，这也仅仅是参考而已。作者非常反对围绕着答案去做题，至少作者本人从不去查对后面的答案（包括作者在当学生的时候）。答案对了，并不意味着你的做法一定是对的；而答案错了，也并不意味着你的思路一定是错的（甚至不排除有些答案本身就不正确的可能性）。

现在市场上有不少“仿真题”、“模拟题”类图书出售。同学们购买一些作为参考也是可以的，但希望考生要以平常心来对待这些“仿真题”，即不要让这些题来干扰自己的情绪和思路。这些仿真题做得很顺，不说明自己就复习得很好了；相反地，做得不顺也不必沮丧，因为这些仿真题毕竟也只是一家之言而已。

在做习题的时候，希望同学们能认真做，包括注意书写格式，要注意养成良好的习惯。作者不赞同仅用阅题和粗略思考来代替做题。读者应该清楚：“想”和“写”是有本质的区别。有些解题的关键步骤在“想”的时候可能会被忽略过去，只有在“写”的时候这些问题才会现露出来。同学们也要养成按正确格式书写的习惯。有时候思路虽然是正确的，但由于书写的颠倒和混乱，会让阅卷的老师读不懂，即使能读懂，也会因为不满意你的书写而扣分。

最后还要提醒一句：部分考生在复习时存在着只注意钻研一些难题，而忽略了对整个理论体系的回顾和对定义、概念的复习；只注意解题的技巧，而忽略了对基本计算能力的培养和基本求解程序复习的问题。这是万不可取的，是只见树木而

不见森林的做法。做任何一件事都要按它的内在规律系统地进行，复习也是如此。虽然这是老生常谈，但如果考生能注意到这一点，自当获益匪浅。

这本书是作者和同仁们多年心血所凝成的，可毕竟是一家之言，如有不当之处，敬请各位专家和使用本书的读者不吝指教，我们自当感激不尽。

编 者

2008 年春

目　录

第1章　极限和连续

1.1　函数的一般概念及讨论

函数的概念是高等数学中最重要的几个概念之一。所谓的数学分析（也就是高等数学的主要部分）就是研究函数在各种极限意义下变化的性态。

函数有一元函数及多元函数，它们的定义是相仿的，在各本教科书中都有详尽而严密的叙述，这里不再重复，仅仅强调以下几个要素。

（1）函数定义中的对应关系是预先给定的，而不是随机的。并没有人拿着一颗骰子，在给定 x 的值后，随机再掷一颗骰子以确定 y 的取值。

（2）给定一个 x 的值（自变量的值），只有一个唯一的 y 值（因变量的值）与之对应，换句话说，我们考虑的函数仅是单值函数。多值函数在这里并不认为是函数。

此外，函数所取的值应该是有意义的值，即不能取不确定的值，也不能取为无穷大。例如，工程上经常使用的 δ 函数，在这里并不认为是一个函数。

（3）函数自变量的取值范围，我们称之为定义域，考试中偶见这方面的题。确定函数的定义域，一般从以下几个方面来考虑。

① 分母不能是零值；

② 负数不能开偶次方根；

③ 对数中的真数必为真；

④ $y = \arcsin x, y = \arccos x$ 中的 x 有 $|x| \leqslant 1$。

一般的求定义域问题是几个原则的组合。

如果有两个函数，它们的表示形式是一样的，但定义域不一样，就不能认为它们是同一函数。例如，函数 $y = x^2 (x > 0)$ 和 $y = x^2$ 应该认为是两个不同的函数，因为前者的定义域是 $(0, +\infty)$，其反函数是存在的，而后者的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，其反函数不存在。

（4）函数的值域是函数的所有可能取值的集合。值域往往是通过对其反函数（如果反函数存在的话）的定义域的讨论来确定的。

（5）函数的表示形式是各种各样的，粗分为三种情况：表格法、图像法和解析法。解析法中又有显函数法、隐函数法和反函数法等。即使是显函数法还可以有多种表示方法。例如，函数可以直接用公式表示（如同大部分同学所理解的那样），也

可以用无穷极数求和、参变积分、极限等形式表示出来。

这里要特别指出一种表示形状、这就是分段表示形式。在分段函数中(尤其在分段点处),有一些特殊的性质会表露出来(例如,在讨论连续性或可导性时,我们主要讨论的是分段点的连续性或可导性)。

下面介绍几个分段函数。

符号函数 $y = \mathrm{sgn}x$,它的定义是

$$\mathrm{sgn}x = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

因此,有

$$|x| = x\mathrm{sgn}x \quad \text{或} \quad x = |x|\ \mathrm{sgn}x$$

经常用作反例的狄里克雷(Dirichlet)函数

$$D(x) = \begin{cases} 1 & (x\ \text{为有理数}) \\ 0 & (x\ \text{为无理数}) \end{cases}$$

根据后面的讨论知,此函数点点不连续。

还有一个函数经常用到,就是取整函数$[x]$,它定义为不超过x的最大整数。例如,$[2] = 2$,$[2.31] = 2$,$[-2.31] = -3$。注意,有

$$x - 1 < [x] \leqslant x$$

还应注意到,$x - [x]$(即x的小数部分)是个以1为最小周期的周期函数。

$\max(x,y)$ 和 $\min(x,y)$ 也是两个经常使用的二元函数。由于

$$\max(x,y) = \frac{1}{2}[x + y + |x - y|]$$

$$\min(x,y) = \frac{1}{2}[x + y - |x - y|]$$

据此可以讨论这两个二元函数的连续性和可导性。

下面讨论一些例题。这些例题所显示的方法时而可在考题中见到,希望加以适当的注意。

例 1.1 设

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leqslant 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

求$f\{f[f(x)]\}$。

[解] 分$|x| \leqslant 1$与$|x| > 1$两种情况讨论,总有$f(x) \leqslant 1$,于是$f\{f[f(x)]\} = 1$。

例 1.2 求函数 $u = \arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}, v = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$ 的定义域。

［解］根据前面的讨论，知 u 的定义域为

$$\begin{cases}\left|\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant 1 \\ x^2+y^2 \neq 0\end{cases}$$

它等价于

$$\begin{cases}z^2 \leqslant x^2+y^2 \\ x^2+y^2 \neq 0\end{cases}$$

从几何上来说，即为一个（等腰）圆锥的外部及其边界，但除去原点（原点是圆锥的顶点）。

函数 v 的定义域为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2} \geqslant 0 \\ 2x-x^2-y^2 \neq 0\end{cases}$$

它等价于 $\begin{cases}x^2+y^2-x \geqslant 0 \\ 2x-x^2-y^2 > 0\end{cases}$

或 $\begin{cases}x^2+y^2-x \leqslant 0 \\ 2x-x^2-y^2 < 0\end{cases}$

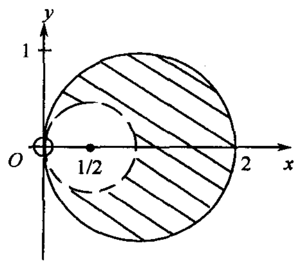

图 1－1

根据分析（或者从图 1－1 中也可以看出），第二不等式组是矛盾的，因而定义域即为第一组解所显示的区域，即为图 1－1 中的阴影部分，包括外圆的边界（画图时应画实线），不包括内圆的边界（画图时应画虚线），不包括原点（一般是空圈来表示）。

例 1.3 已知 $f(x) = e^{x^2}, f[\varphi(x)] = 1-x$，且 $\varphi(x) \geqslant 0$，求 $\varphi(x)$，并写出其定义域。

［解］把 $\varphi(x)$ 代入到 $f(x)$ 的表示式中，则有

$$1-x = e^{[\varphi(x)]^2}$$

于是 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$（开方取正号的理由是

$$\varphi(x) \geqslant 0)$$

$\varphi(x)$ 的定义域应满足

$$\begin{cases}\ln(1-x) \geqslant 0 \\ 1-x > 0\end{cases}$$

不等式组的解为 $x \leqslant 0$。

例 1.4 分别根据下列条件求 $f(x)$ 的解析表示式：

(1) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$

(2) $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=x$

(3) $3f(\sin x)+2f(\cos x)=\tan^2 x$

[解](1) 此题的求解是直接的，只要把表示式的右边化成以 $x+\frac{1}{x}$ 作为基本项的形式即可，这样，有

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$$

因而
$$f(x)=x^2-2$$

(2) 此题从形式上看，$f(x)$ 与 $f\left(\frac{1}{x}\right)$不易拆开，但是我们发现其中变量是以 x 本身及其倒数的形式写出的，于是稍做变形就可以得到另一个方程。具体做法是：在等式

$$2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=x$$

中将 x 用$\frac{1}{x}$ 取代，则得

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\frac{1}{x}$$

将它和上面方程联立，得

$$f(x)=\frac{1}{3}\left(2x-\frac{1}{x}\right)$$

(3) 此题的技巧和上题类似。具体做法是：在等式

$$3f(\sin x)+2f(\cos x)=\tan^2 x$$

中将 x 用$\frac{\pi}{2}-x$ 来替代，则得

$$3f(\cos x)+2f(\sin x)=\cot^2 x$$

将它和上面方程联立，得

$$f(\sin x)=\frac{1}{5}(3\tan^2 x-2\cot^2 x)$$

于是 $$f(x)=\frac{1}{5}\left[\frac{3x^2}{1-x^2}-\frac{2(1-x^2)}{x^2}\right]$$

例 1.5 设$f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$,求$f(x,y)$。

[分析] 这样的题一般有两种做法:一种是较死板的做法,即令$x+y=u,\frac{y}{x}=v$,也许运算量稍大一些,但肯定是可以做出来的;另一种是将右边的式子进行推演,化成用$(x+y)$和$\frac{y}{x}$来表示的形式,这样做有一定的技巧,但速度较快。

[解一] 令$x+y=u,\frac{y}{x}=v$,解之则得

$$x=\frac{u}{1+v},y=\frac{uv}{1+v}$$

代入原式,于是

$$f(u,v)=\left(\frac{u}{1+v}\right)^2-\left(\frac{uv}{1+v}\right)^2=\frac{u^2(1-v)}{1+v}$$

即 $$f(x,y)=\frac{x^2(1-y)}{1+y}$$

[解二] 有

$$f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

$$=(x+y)^2\frac{x-y}{x+y}=(x+y)^2\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$

于是 $$f(x,y)=\frac{x^2(1-y)}{1+y}$$

例 1.6 求$y=\sin x|\sin x|\left(|x|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$的反函数。

[分析] 由表示式可知x和y的符号相同,因而$\operatorname{sgn}x=\operatorname{sgn}y$。这题应该将符号函数加入进去才能正确处理。如不用符号函数,则要分区间进行讨论。

[解一] 由于

$$y=\sin x|\sin x|=|\sin x|^2\operatorname{sgn}x=\sin^2x\cdot\operatorname{sgn}y$$

于是 $$\sin^2x=y\cdot\operatorname{sgn}y=|y|$$

因而 $$\sqrt{|y|}=|\sin x|=\sin x\cdot\operatorname{sgn}x=\sin x\cdot\operatorname{sgn}y$$

故可推出 $$\sin x=\sqrt{|y|}\operatorname{sgn}y$$

因而所求的反函数为(x,y两字母交换)

$$y=\arcsin\sqrt{|x|}\cdot\operatorname{sgn}x=\begin{cases}\arcsin\sqrt{x} & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ -\arcsin\sqrt{-x} & (-1\leqslant x<0)\end{cases}$$

[解二] 当 $x\geqslant 0$ 时,$y\geqslant 0$,此时

$$y=\sin^2 x$$

于是

$$x=\arcsin\sqrt{y}$$

当 $x<0$ 时,$y<0$,此时

$$y=-\sin^2 x$$

因而

$$x=-\arcsin\sqrt{-y}$$

于是所求的反函数为

$$y=\begin{cases}\arcsin\sqrt{x} & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ -\arcsin\sqrt{-x} & (-1\leqslant x<0)\end{cases}$$

1.2 一元极限的定义和性质

1. 极限的定义

若按 x 趋向的方式和 y 趋向的结果来分,极限的定义有许多种形式,但是常用的只有两种。

(1)
$$\lim_{n\to\infty}a_n=A \tag{1.1}$$

设 $\{a_n\}$ 是一个数列,A 是一个给定的数。若对任意的 $\varepsilon>0$,存在一个正整数 N,使得对任意的正整数 $n>N$,都有 $|a_n-A|<\varepsilon$。则称当 n 趋于无穷时,a_n 的极限是 A,记为式(1.1)。

(2)
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \tag{1.2}$$

设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的一个去心邻域内有定义,A 是一个给定的数。若对任意的 $\varepsilon>0$,存在一个正数 δ,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$,总有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称当 x 趋于 x_0 时,$f(x)$ 的极限是 A,记为式(1.2)。

对于工科类的考生,极限的定义,尤其是利用定义来求极限的值,是一个不易掌握的内容。不过在考试大纲中并不作为重点要求,在历届考题中也从未出现过,因而只需要对概念准确理解即可。

2. 极限的性质

关于极限的性质,希望熟练掌握。不过从历年阅卷的情况来看,考生对这一部

分掌握还是比较好的。现选择其若干重要的性质列举如下(按照序列极限的语言来写)。

(1) 极限是唯一的。在后面有的例题中,有时候极限值要通过解方程而求得,可能会得到多个解,这时务必要舍弃多余的,只能保留一个合理准确的解。

(2) 极限存在的数列(有时候称这样的数列是收敛的) 是有界的。

注意:这一条我们时常用到。

在这里要强调一下,极限是无穷的数列也是发散的,即我们不认为这样的数列的极限是存在的。

(3) 任何收敛的数列,其子列也收敛,且极限值相同。

注意:对于一个数列,即使可以找到许多子列都收敛,而且极限值都相同,我们也不能就下结论说原数列收敛。

这一条性质可用来说明数列的不收敛(发散)。如果能找到一个子列是发散的,则原数列一定发散;或者如果能找到两个收敛子列,但它们的极限值是不相同的,则原数列也发散(这一部分也不是考试的重点)。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$

(5) 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$,则

① $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$

② $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = cA$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \circ b_n) = AB$

④ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$(此时要求 $b_n \neq 0, B \neq 0$)

注意:上面几个公式成立的前提条件是极限存在,例如第一个公式,$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$,$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 都必须存在,然后才能拆开。类似问题较多。例如,众所周知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ 是收敛的,且和为 1。但如写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

则立即算错。又如

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)} = \ln \frac{x}{1+x}\Big|_1^{+\infty} = \ln 2$$

是收敛的,但如写成

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \cdots$$

则立即算错。

(6) 如果 $a_n \leqslant b_n(n=1,2,3,\cdots)$,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$,则$A\leqslant B$。

(7) 如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$,且$A<B$,则存在正整数$N$,当$n>N$时恒有$a_n<b_n$。

后两条性质使用频率并不高。

3. 左、右极限

在讨论函数极限时,还有左、右极限的概念。

设函数$f(x)$在$x=x_0$的一个右邻域$(x_0,x_0+\delta_0)$内有定义,A是一个给定的数。若对任意的$\varepsilon>0$,存在一个正数δ,使得当$x_0<x<x_0+\delta(\delta\leqslant\delta_0)$时,总有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称当x趋于x_0时$f(x)$的右极限为A,记为

$$A=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0+)$$

右极限即是当x从x_0的右侧趋向于x_0时$f(x)$的极限。

相仿地,设函数$f(x)$在$x=x_0$的一个左邻域$(x_0-\delta_0,x_0)$内有定义,A是一个给定的数。若对任意的$\varepsilon>0$,存在一个正数$\delta\leqslant\delta_0$,使得当$x_0-\delta<x<x_0$时,总有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称当x趋于x_0时$f(x)$的左极限为A,记为

$$A=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0-)$$

左极限即是当x从x_0的左侧趋向于x_0时$f(x)$的极限。

显然有这样的结论:极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的充要条件是左极限$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$和右极限$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$都存在且都等于$A$。

这一条结论经常用来证明某些极限的不存在。例如:

由于$\lim\limits_{x\to0^-}[x]=-1,\lim\limits_{x\to0^+}[x]=0$,故$\lim\limits_{x\to0}[x]$不存在;

由于$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{|x|}=-1,\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{|x|}=1$,故$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{|x|}$不存在;

由于$\lim\limits_{x\to0^-}\mathrm{e}^{1/x}=0,\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{1/x}=+\infty$,故$\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{1/x}$不存在(甚至也不为无穷);

由于$\lim\limits_{x\to0^+}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2},\lim\limits_{x\to0^-}\arctan\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$,故$\lim\limits_{x\to0}\arctan\dfrac{1}{x}$不存在。

例 1.7 计算极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{1/x}}{1+\mathrm{e}^{4/x}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$。

[分析] 第一步利用“和的极限等于极限的和”的性质,将原极限拆成

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{1/x}}{1+\mathrm{e}^{4/x}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0}\frac{2+\mathrm{e}^{1/x}}{1+\mathrm{e}^{4/x}}+\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{|x|}$$