李新洲　卢民强　编著

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

数学物理方程

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V(\Psi)$$

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

上海科学技术出版社

数学物理方程

李新洲　卢民强　编著

上 海 科 学 技 术 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程／李新洲，卢民强编著．—上海：上海科学技术出版社，2008.10
ISBN 978-7-5323-9438-8/O·294

Ⅰ.数… Ⅱ.①李…②卢… Ⅲ.数学物理方程 Ⅳ.O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 078499 号

上海世纪出版股份有限公司
上海科学技术出版社 出版、发行
（上海钦州南路 71 号　邮政编码 200235）
新华书店上海发行所经销
常熟市兴达印刷有限公司印刷
开本 850×1168　1/32　印张 5.375
字数：130 千字
2008 年 10 月第 1 版　2008 年 10 月第 1 次印刷
印数：1－1 500
定价：23.00 元

引　　言

数学与物理两者的关系，其中的奥秘并不能用寥寥数语说清。物理的发展离不开数学提供工具，数学又从物理的发展获得动力和思想，诚如陈省身所言，这种关系是“同气连枝，同胞共哺”。物理学以描述自然界为目的，它本质上是经验的，方法上是定量的，所以必须借助于数学，才能把物理现象提炼成物理规律。

许多物理问题和工程技术问题可以归结为一些数学偏微分方程，它们称为数学物理方程。数学物理方程可以认为是物理问题的一种数学模型。我们也经常说到物理模型，物理模型可以看成是涉及时空、物质及其相互作用的数学模型。现代物理学使人相信，自然界只有数量上少得令人惊讶的几条规律。然而，这些定律所允许的不同状态和结构，看起来有无穷多种。正如弈围棋那样，只有黑白两色棋子和少数几条规则，却可以弈出千变万化的对局。发现自然定律是一回事，了解自然定律的结果又是一回事。显然，自然定律的结果远比自然定律本身复杂，理由十分简单，自然定律满足对称性而自然定律的结果破坏了对称性。麦克斯韦方程满足洛伦兹不变性，而麦克斯韦方程的解却会破坏这个对称性。我们正站在宇宙的某个特定地点，但自然定律对于特定的地点和时刻没有任何偏爱。上述这个简单事实，告诉我们自然界可以用一组定律来描述，却又显示了极其复杂的非对称状态与结构的理由。一个复杂物理问题的数学模型可以认为是将一个物理系统与一个数学系统相对应，把一个物理问题抽象为一个数学问题，这个数学问题比一个实际的物理问题要单纯得多。

从自然定律的基本方程出发，采用一些近似的模型、近似的方法导出第二性的针对具体问题的方程，应是物理学各课程和数学物理课程的基本训练之一。数学是一种严密的逻辑推理，用一些数学模型来模拟物理自然现象使得一些物理现象变得可以理解。模型当然要不断修正使之逼近实际情况。模型理论是物理实在的近似描写，是我们认识真理的重要工具之一。

人们已对数学物理方程做了广泛深入的研究，并出版了不少关于这方面的著作。尽管如此，我们还是写了这本入门书，主要想根据各种定解问题及其有关解法来展开讨论。本书除了介绍数学物理方程的一般知识外，主要介绍方程的三种常用解法：分离变量法、积分变换法和格林函数法，还简明介绍了特征线法、平均值法、降维法和黎曼方法等一些其他求解方法。最后一章介绍一些实例，目的在于加强数学和物理的联系，为增强读者的应用能力服务。

本书编写的宗旨是让读者尽快地掌握相关的基本概念、基本知识和基本技能。所以本书与许多传统的教材不同，尽量避免手册式的罗列，因为这些供备查的公式和图表，读者尽可以直接点击网站 mathworld. wolfram. com。

本书得到上海市教育委员会第四期重点学科基金资助，特此表示感谢。

目　录

第 1 章　数学物理定解问题

§1.1　定解问题的提法

1. 物理方程的普适性

物理方程分为基本方程与导出方程，基本方程是第一性的，导出方程是第二性的。

基本方程直接来自实验，或是从实验事实出发经过推理、抽象归纳出来的方程，其正确性由其结论与实验事实的一致性来判断。这种方程有时是直接通过数学推演和物理的假设得到的，但纯数学的推算是得不到它们的，在数学推算中经常求助于物理假设，这些物理假设必须由经验进行检验。

自然界存在着四种基本相互作用，它们分别对应四种基本方程。引力作用由爱因斯坦方程描述，而余下三种相互作用可以用 $\mathrm{SU}(3)\times\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{U}(1)$ 规范场方程描述。描述自旋为 0 的微观粒子的方程是克莱因—戈登方程，描述自旋为 1/2 粒子的方程是狄拉克方程。U(1)规范场方程就是麦克斯韦方程。在宏观或低速极限下，上述方程便约化成薛定谔方程、牛顿方程等等。

导出方程是从自然定律出发分析具体物理过程，在适当的物理条件下，采用数学推算、适当的近似所得到的方程，一般是偏微分方程(有时为积分方程或微分积分方程)，也称为数学物理方程。这种方程的普遍性内涵与描述自然定律的基本方程有所不同，它们是基本方程在一些特定条件下的推论。在处理具体问题时，我们总是从基本方程出发推导得到具体的数学物理方程，然后求解方程。

出现在不同的物质形态中的数学物理方程经常有相似的数学形式。例如声波与电磁场是完全不同的物质形态，但两者涉及的数学物理方程却都是二阶双曲型方程，这是数学物理方程可贵的普适性。最常见的数学物理方程可以归为三种类型。

波动型或双曲型：波动方程，电磁波与声波的波动方程数学形式相同

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u \tag{1-1-1}$$

传导型或抛物型：热传导方程和扩散方程数学形式相同

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \nabla^2 u \tag{1-1-2}$$

稳定型或椭圆型：牛顿引力场方程、静电场方程与稳定的温度场方程数学形式相同

$$\nabla^2 u = f \text{ 或} \nabla^2 u = 0 \tag{1-1-3}$$

(1-1-3)式中的两个方程也称为泊松方程和拉普拉斯方程。

2. 实际问题的特殊性

数学物理方程是泛定方程，具有无数个解，但实际问题的解应当是唯一的，也就是说，方程是普遍的，实际问题是特殊的。单是数学物理方程还不足以解决实际问题，事实告诉我们，即使是同一类物理过程，方程一样，若历史情况和环境情况不同，具体的结果就会不一样。这就是说，要得知具体的、实际问题的解，除了知道方程外，还需要知道初始条件和边界条件。

由此可知，一个具体实际问题的提法，即定解问题的提法应当是：在给定的初始条件及边界条件下，求解该问题的数学物理方程。

3. 定解问题的适定性

一个定解问题包含泛定方程和定解条件，定解条件包括初始

条件和边界条件。从实际中来的定解问题还要回到实际中去，回答实际问题。这就要求定解问题必须是适定的，即解必须是存在的、唯一的、且是稳定的。存在性与唯一性容易理解，解的稳定性是指：若定解条件的数值有微小的改变，则解的数值也只有微小的改变，否则就是不稳定的，这是因为初始条件和边界条件的数值的测定总会有一定的误差范围，所以解的稳定性是一个合理的要求。若一个定解问题不是适定的，就应当修改这个定解问题（修改模型、修改方程、修改定解条件等）使其适定。

§1.2 数学物理方程的导出

数学物理方程通常可以用两种方法导出：(1)微分法。根据物理学基本方程，分析在时间元 dt 内，体积元 dV 与邻接部分的相互作用，在分析时应当抓住主要因素，略去次要的因素，从而导出微分形式的方程。(2)积分法。即考虑一个有限的区域及一段有限的时段，按物理学基本原理（如哈密顿原理），考察某一个积分，并使该积分相对于某个变量函数取极值，就可以得到关于该变量函数的数学物理方程。使某个积分取极值的方法也称为变分法。在现代物理学中常用变分原理来得到物理系统的运动方程。在本书中主要介绍用比较直观的微分法来推导出数学物理方程。

1. 均匀弦上横波的波动方程

一根完全柔软的弦，平衡时沿一直线绷紧，取这条直线为 X 轴，弦上各点以坐标 x 表示，弦的线密度记为 ρ。当弦作横振动时，用 $u(x, t)$表示弦上 x 处质点在 t 时刻的横向位移。由于弦是完全柔软的，弦上任一点的张力总是沿弦的切线方向，在 x 处弦的切线与 x 轴的交角为 $\alpha(x)$。考虑长度元 dx，对于弦的小振动，可设 α 很小，于是有 $\sin\alpha\approx\alpha$，$\cos\alpha\approx 1$，$\tan\alpha\approx\sin\alpha$。在这种近似下，弦的伸长可以忽略不计，所以弦长 ds 为

$$ds = \sqrt{dx^2 + du^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2}$$
$$= dx\sqrt{1 + \tan^2\alpha} \approx dx\sqrt{1 + \alpha^2} \approx dx$$

考虑到弦无纵向运动，dx 弦段所受纵向合力为零

$$T(x + dx)\cos\alpha(x + dx) - T(x)\cos\alpha(x) = 0,$$

则有

$$T(x + dx) \approx T(x)$$

dx 弦段的横向运动服从牛顿方程

$$T\sin\alpha(x + dx) - T\sin\alpha(x) = (\rho dx)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \equiv \rho dx u_{tt}$$

其中 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 为质点横向振动的加速度，又 $\sin\alpha \approx \tan\alpha = \frac{\partial u}{\partial x} \equiv u_x$，则有

$$Tu_x\big|_{x+dx} - Tu_x\big|_x = \rho dx u_{tt} \text{ 或 } Tu_{xx}dx = \rho dx u_{tt}$$

整理得

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,\ a^2 = \frac{T}{\rho} \tag{1-2-1}$$

这就是弦上横波的波动方程，注意这是一个齐次的方程。

若弦在振动过程中还受横向外力的作用，弦的单位长所受的力为 $F(x, t)$，则微元 dx 的横向运动方程应修改为

$$T\sin\alpha(x + dx) - T\sin\alpha(x) + F(x, t)dx = \rho dx u_{tt}$$

或

$$Tu_{xx} + F(x, t) = \rho u_{tt}$$

记

$$f(x, t) \equiv \frac{F(x, t)}{\rho}, \text{则有}$$

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t) \tag{1-2-2}$$

将这个方程与上述齐次波动方程比较可知，它是一个非齐次波动方程，非齐次项 $f(x, t)$ 为单位长度、单位密度的弦所受的外力。

2. 均匀杆上的纵波方程

我们在平衡的均匀杆中取一段长度元 $\mathrm{d}x$,杆的密度为 ρ,截面为 S,杨氏模量为 E。杆作纵向振动,设杆形变时,x 端位移为 u,$x+\mathrm{d}x$ 端位移为 $u+\mathrm{d}u$,因而长度元 $\mathrm{d}x$ 的绝对伸长为 $\mathrm{d}u=u_x\mathrm{d}x$,相对伸长为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u_x$,相对伸长还随 x 而异。由描述弹性形变的胡克定律可知,相对伸长 u_x 与应力(压强)P 成正比

$$P=Eu_x$$

长度元 $\mathrm{d}x$ 的纵向运动服从牛顿方程

$$P\,|_{x+\mathrm{d}x}S-P\,|_{x}S=\rho S\,\mathrm{d}x u_{tt}$$

即

$$ESu_x\,|_{x+\mathrm{d}x}-ESu_x\,|_{x}=\rho S\,\mathrm{d}x u_{tt}$$

或

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\ a^2=\frac{E}{\rho} \qquad (1\text{-}2\text{-}3)$$

这就是均匀杆上的纵波波动方程,这个方程也是齐次方程。

杆在纵向外力作用下的波动方程将是一个非齐次的方程。我们看到,均匀弦的横向振动和均匀杆的纵向振动服从同样形式的波动方程。

3. 流体中的声波方程

我们在流体中取体积元 $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其质量为 $\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}V$,其中 $\rho(x,y,z,t)$为流体的密度。流体中的速度矢量为 $\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$,压强为 $P(x,y,z,t)$,单位体积所受外力为$\boldsymbol{F}(x,y,z,t)$。先考虑体积元在 x 方向的运动情况。按牛顿方程有

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\rho}F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}=f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}\quad\left(f_x=\frac{F_x}{\rho}\right)$$

将 x, y, z 三个方向的方程联合写成矢量形式为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}-\frac{1}{\rho}\nabla P$$

又因为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}[x(t),\ y(t),\ z(t),\ t]=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$，于是我们得到流体运动的欧拉方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{f}-\frac{1}{\rho}\nabla P \tag{1-2-4}$$

这是一个矢量方程，对应三个分量方程，未知量有五个，$\boldsymbol{v}$(三个分量)、P、ρ。为求解流体运动方程还需要两个方程，其中一个方程为物态方程 $P=f(\rho)$，它描述流体的压强 P 与密度 ρ 之间的关系，另一个方程是流体质量守恒的连续性方程。

下面我们来推导连续性方程。考虑空间中固定的一个体积元 $\mathrm{d}V$，ρ 是流体密度，$\boldsymbol{v}$ 是流体速度，$\rho\boldsymbol{v}$ 就是单位时间内流过垂直于流动方向的单位面积的流体质量。单位时间内在 x 方向流入 $\mathrm{d}V$ 的流体质量为 $\rho v_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z|_x$，而流出 $\mathrm{d}V$ 的流体质量为 $\rho v_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z|_{x+\mathrm{d}x}$。所以在单位时间内，在 x 方向净流入 $\mathrm{d}V$ 的流体质量为

$$\rho v_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z|_x-\rho v_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z|_{x+\mathrm{d}x}=-\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

同样，可类似地写出在 y 方向、z 方向净流入 $\mathrm{d}V$ 的流体质量，因而，在单位时间内净流入 $\mathrm{d}V$ 的流体质量为

$$-\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

另一方面，在单位时间内，$\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 内流体质量的净增加应为 $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathrm{d}V)$，流体质量守恒意味着 $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0$，这就是流体的连续性方程，利用矢量分析记号，可以写成为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0 \tag{1-2-5}$$

现在考虑物态方程。当声波在流体中传播时，假设过程是绝热的，其物态方程为 $PV^{\gamma}=$ 常量，其中 $\gamma=C_p/C_v$，C_p 与 C_v 为等压热容与等容热容。也可以写成为 $P\rho^{-\gamma}=$ 常量，或 $P=P_0\rho^{\gamma}/\rho_0^{\gamma}$，其中

P_0、ρ_0 为标准状态下的压强、密度。我们把声波中流体(空气)的密度 ρ 的相对变化记为 S

$$S=\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0},\ \rho=\rho_0(1+S)$$

在 S 与 v 都很小的情形,我们可采用线性近似,略去高次项,则欧拉方程、连续性方程、物态方程分别线性化为

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\nabla P\ (\text{外力}\ \boldsymbol{f}\ \text{取为零})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho_0\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0\ \text{或}\frac{\partial s}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$$

$$\rho=\rho_0(1+S)^\gamma\ \text{或}\ \rho=\rho_0(1+\gamma S)$$

于是有

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\nabla P=-\frac{1}{\rho_0}P_0\gamma\nabla S$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}=-\nabla\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=\frac{P_0\gamma}{\rho_0}\nabla^2 S$$

这样,我们就得到了关于 S 的波动方程

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}-a^2\nabla^2 S=0,\ a^2=\frac{P_0\gamma}{\rho_0}\tag{1-2-6}$$

这就是声波方程。与上面两个例子相比,这是一个三维齐次波动方程。我们也从电磁学知道,可以从电磁场的麦克斯韦方程组推导出电磁波的三维波动方程。

4. 扩散方程

单位体积中的粒子数称为浓度,由于浓度的不均匀,物质将从浓度高的地方向浓度低的地方迁移,称为扩散现象。

描述扩散现象有两条物理定律:一是粒子数守恒或质量守恒定律,由连续性方程(1-2-5)描述;二是扩散的斐克定律。斐克定律告诉我们,单位时间内流过垂直于粒子流动方向的单位面积的

粒子数或质量$\rho \mathrm{d}v$与粒子浓度梯度$\nabla \rho$成正比

$$\rho \boldsymbol{v} = -D \nabla \rho$$

其中D为扩散系数。将斐克定律的关系式代入连续性方程即得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - a^2 \nabla^2 \rho = 0,\ a^2 = D \tag{1-2-7}$$

这就是关于ρ的扩散方程。若所研究的物质粒子是放射性的，衰变的半衰期为τ，则单纯由衰变导致的浓度随时间变化的速率为$-\frac{\ln 2}{\tau}\rho$，扩散方程应约化为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - a^2 \nabla^2 \rho + \frac{\ln 2}{\tau}\rho = 0$$

若所研究的物质粒子由于链式反应而增加，浓度增加的时间变化率为$b^2\rho$，则扩散方程约化为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - a^2 \nabla^2 \rho - b^2 \rho = 0$$

5. 热传导方程

与粒子从浓度高的区域向浓度低的区域扩散相似，热量从温度高的地方向温度低的地方迁移，称为热传导现象。描述热传导有两条定律，一是能量守恒定律，二是关于热传导的傅里叶定律。能量守恒定律的数学表述与质量守恒相似，即连续性方程(1-2-5)，只要把ρ理解为能量密度，$\rho \boldsymbol{v}$理解为单位时间内流过垂直于热流方向的单位面积的能量，也称为热流强度$\boldsymbol{q} = \rho \boldsymbol{v}$。傅里叶定律告诉我们，热流强度$\boldsymbol{q} = \rho \boldsymbol{v}$与温度梯度成正比

$$\boldsymbol{q} = \rho \boldsymbol{v} = -k \nabla u$$

其中u为温度，k为导热系数。将傅里叶定律的关系式代入能量的连续性方程得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}-k\nabla^2 u=0$$

又因为热能密度 ρ 的改变 $\mathrm{d}\rho=c\rho_m\mathrm{d}u$，其中 c 为比热，ρ_m 为质量密度，于是

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=c\rho_m\frac{\partial u}{\partial t}$$

所以上述方程可改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\nabla^2 u=0,\ a^2=\frac{k}{c\rho_m} \tag{1-2-8}$$

这就是热传导方程，它与扩散方程有一样的数学形式。

还有一个重要方程是薛定谔方程，它是非相对论量子力学的核心方程。记波函数为 $\Psi(x,\ y,\ z,\ t)$，势函数为 $V(x,\ y,\ z)$，则有

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi+V\Psi \tag{1-2-9}$$

它与扩散方程、传导方程有相似的数学形式，但两者有本质的差异，薛定谔方程中的虚数 i 至关重要，正是 i 使得看上去像扩散方程的薛定谔方程本质上描述了概率波，其解波函数蕴涵着微观系统的全部信息。数学家阿达玛早就说过："实域中两个真理的最短路径是通过复域。"复的薛定谔方程将微观世界与观测者的宏观世界联系起来了。

6. 拉普拉斯方程与泊松方程

扩散过程一旦达到稳定状态，则浓度的空间分布不再随时间变动，此时 $\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$，于是扩散方程变为 $\nabla^2\rho=0$，此方程为拉普拉斯方程，描述扩散过程达到稳定的浓度分布。

同样，热传导过程一旦达到稳定状态，则温度的空间分布不再

随时间变动，此时 $\frac{\partial u}{\partial t}=0$，于是热传导方程变为拉普拉斯方程 $\nabla^2 u=0$，描述热传导过程达到稳定的温度分布。

在静电学中，我们知道静电场$\boldsymbol{E}$满足两个方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0},\ \nabla\times\boldsymbol{E}=0$$

其中ρ为电荷密度，ε_0为介电常数，由$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$得知，存在一个称为电势的势函数$\varphi$，$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$，于是可得电势$\varphi$的方程

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1-2-10}$$

这个方程称为泊松方程，在无电荷存在的区域$\rho=0$，(1-2-10)约化为$\nabla^2\varphi=0$，它描述无电荷存在区域的电势分布。泊松方程可以看成是非齐次的拉普拉斯方程。

§1.3　定解条件

仅有方程还不足以确定具体的物理过程，因为方程仅表示同一类现象的共同规律。例如杆的纵振动问题，将其一端固定或让其一端自由，所产生的具体振动是不同的。又如固体的导热问题，将其表面绝热或让其表面保持恒温，所得结果是不同的。上述的一端或表面的特定条件称为边界条件。此外，初始情况如何对于同一类物理过程也有很大的影响，这就是初始条件的作用。

1. 初始条件

稳定场方程如拉普拉斯方程和泊松方程，无初始条件。扩散方程和传导方程只需要一个初始条件：$u(x,y,z,t)\big|_{t=0}=\phi(x,y,z)$。波动方程需要两个初始条件：$u\big|_{t=0}=\phi(x,y,z)$，$u_t\big|_{t=0}=\Psi(x,y,z)$。

注意，初始条件需指明初始时刻整个系统各点的u及u_t值，