经济数学简明教程

胡立智 主编

华南理工大学出版社

经济数学简明教程

主　编　胡立智
副主编　林　瑜　莫传三

华南理工大学出版社
·广州·

图书在版编目(CIP)数据

经济数学简明教程/胡立智主编 .—广州:华南理工大学出版社,1999.8

ISBN 7-5623-1462-4

Ⅰ.经…
Ⅱ.胡…
Ⅲ.经济数学-高等学校
Ⅳ.F293

华南理工大学出版社出版发行
(广州五山　邮编 510640)
责任编辑　罗月花　欧建岸
各地新华书店经销
广州市新光明印刷厂印装
*
1999 年 8 月第 1 版　1999 年 8 月第 1 次印刷
开本:850×1168　1/32　印张:7.5　字数:189 千
印数:1～4000 册
定价:15.00 元

目　录

§1 函　　数

§1.1 数　　集

1.1.1 集合

一、集合的概念

“集合”是数学中重要的基本概念.

集合是一些确定的对象组成的整体.构成集合的各个对象,称为这个集合的元素.

例如:全体学生就是一个集合,而每一个学生都是这个集合的元素.

二、集合的表示法

表示集合常用列举法、描述法.习惯上用大写英文字母标记所讨论的集合.

1. 列举法:用花括号括起集合的所有元素,各元素之间用逗号分隔.元素排列顺序任意.

例1 由 a,b,c 三个元素组成的集合A 可表示为$\{a,b,c\}$记作

$$A=\{a,b,c\}$$

简记为 A.

注意,集合的列举法不考虑元素之间的顺序.即:集合$\{a,b,c\}$与$\{b,a,c\}$是表示同一个集合或称为相等的集合.

2. 描述法:在花括号中用一小写字母代表集合元素并用文字

或数学表达式描述元素应满足的条件.有时直接描述集合元素的属性.

例 2 不等式$|x+3|<5$的所有解的集合可表示为

$$\{x \mid |x+3|<5\}$$

例 3 所有直角三角形所组成的集合可表示为

$$\{\text{直角三角形}\}$$

或

$$\{a \mid a\text{ 是三角形且 }a\text{ 有一个角是直角}\}$$

若 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A,记作 $a\in A$;若 b 不是集合 A 的元素,就说 b 不属于 A,记作 $b\notin A$(或 $b\overline{\in}A$).

1.1.2 数集的概念

以数为元素的集合称为数集.

全体自然数所组成的集合称为自然数集,记作 $\mathbf{N}$;

全体整数所组成的集合称为整数集,记作 $\mathbf{Z}$;

全体有理数所组成的集合称为有理数集,记作 $\mathbf{Q}$;

全体实数所组成的集合称为实数集,记作 $\mathbf{R}$.

不含任何元素的集合称为空集,记作 $\varnothing$.

1.1.3 数集的表示

数集都是集合.所以,集合的表示方法都可用于表示数集.

例如,下列集合都是数集:

$$A=\{y \mid y\geqslant 2\}$$

$$B=\{3,7,4,11\}$$

$$C=\{2n+1 \mid n\in\mathbf{N}\}$$

由于实数可与数轴上的点一一对应,对于两个实数 a,b 且 $a<b$,数集$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$便对应于数轴上的一段线段,称之为闭区

间，记作$[a,b]$；类似地，数集$\{x|a<x<b\}$称为开区间，记作(a,b)；数集$\{x|a\leqslant x<b\}$和$\{x|a<x\leqslant b\}$称为半开半闭区间，分别记作$[a,b)$和$(a,b]$. 这里a,b称为区间的端点.

整个实数集$\mathbf{R}$也可表示为区间$(-\infty,+\infty)$. “∞”读作“无穷大”. “$-\infty$”、“$+\infty$”分别读作“负无穷大”、“正无穷大”. $\{x|x\geqslant a\}$可记作$[a,+\infty)$，$\{x|x>a\}$可记作$(a,+\infty)$；类似地$\{x|x\leqslant b\}$、$\{x|x<b\}$分别记作$(-\infty,b]$、$(-\infty,b)$.

§1.2 函数概念

1.2.1 函数定义

函数是数学中最重要的概念之一. 函数关系是量与量之间依从关系的表现，是客观事物之间相互联系相互制约的反映.

定义 1.2.1 如果变量y随变量x的取值变化而变化，即对于x在数集D中的每一取值，按照对应法则f，y都有唯一确定的数值和它对应，那么y称为x的函数，记作$y=f(x)$. x叫做自变量，x的取值范围D叫做函数的定义域，y叫做因变量，y对应于x的值叫做函数值，全体函数值所组成的数集叫做这个函数的值域. 对应法则f又叫做函数关系或对应关系.

从上述定义可以看到，函数概念主要涉及到两个数集——函数的定义域和值域，还有这两个数集之间的一个对应法则. 若用V记值域，则定义域、对应关系、值域三者的关系可形象地表示为

$$D \xrightarrow{f} V$$

函数就是这三者的结合. 深入地分析可以知道：定义域D和对应关系f确定了，函数也就随之确定.

例如，对于一次函数$y=3x+1$，这个函数的定义域是$(-\infty,$

$+\infty)$,对应关系是“乘 3 再加 1”,值域也是$(-\infty,+\infty)$.

又如,对于函数 $y=\sqrt{x}+3$,这个函数的定义域是$[0,+\infty)$,对应关系是“取算术平方根再加 3”,值域是$[3,+\infty)$.

1.2.2 函数值

我们常用 $y=f(x)$表示 y 是 x 的函数.当 x 在定义域内取一确定的值 a 时,对应的函数值记作 $f(a)$或 $f(x)|_{x=a}$.

例如,函数 $f(x)=x^2-2x+1$,则 $f(x)$在 $x=0,x=1,x=-1$ 的函数值分别为 $f(0),f(1),f(-1)$,具体运算易得 $f(0)=1,f(1)=0,f(-1)=4$.

常用 f 表示函数关系,当函数不止一个时,也常用其它字母如:g,φ,ψ,F 等表示.

例 4 已知函数 $g(x)=x^2,f(x)=3x+2$,求 $g(2),f(2),f[g(2)],f[f(2)],g[f(2)]$.

解 $g(2)=2^2=4$

$f(2)=3\times2+2=8$

$f[g(2)]=f[4]=3\times4+2=14$

$f[f(2)]=f[8]=3\times8+2=26$

$g[f(2)]=g[8]=8^2=64$

应当注意,函数是数集到数集的对应,是变量之间的依从关系;而函数值是数值,是确定的数(常数).

1.2.3 函数的表示方法

前面已述,函数的定义域和对应关系确定了,函数就可确定.因此,要表示一个函数,把定义域和对应关系表示清楚就行了.由于人们习惯的原因,有时定义域的表示采用默认形式.对应关系则必须明确表示.通常采用的函数表示方法有如下三种:

一、解析法

解析法即用解析式表示对应法则.此法又称公式法、分析法.

例如:圆面积 $S=\pi R^2 \quad (R>0)$

二次函数 $y=ax^2+bx+c$

等,通过用含有自变量的解析式表示函数.

这种方法的优点是简明准确,便于理论分析,但不够直观.许多实际问题中遇到的函数很难写出其解析式.

二、图像法

图像法采用直角坐标平面中的曲线表示对应法则.如图 1-1 所示.

这种方法以自变量 x 作为横坐标,函数 y 的值作为纵坐标,于是函数以坐标平面中曲线的形式表示出来.表达直观、明确,能一眼看到变量之间的依从关系和变化趋势.缺点是精确度很有限,有时难以满足理论研究的需要.

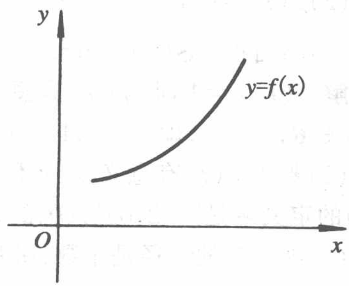

图 1-1

三、表格法

表格法把自变量的一系列值与其对应的函数值列成表格以表示函数.如:银行的利率表,常用对数表,三角函数表等.

表格法可从表中直接查到某些函数值,避免了运算求值,使用方便.这种方法尤其适用于定义域为有限集的函数;对于定义域为实数集 **R** 或实数轴上区间的函数,则无法把函数值一一列出,表中所列的有限个函数值也常常不够精确.

1.2.4 函数的定义域

函数的定义域与函数关系两者结合就确定了一个函数.当且仅当两个函数定义域与函数关系都相同时,这两个函数相等.

给出一个函数,应当明确其定义域和函数关系.在用解析法表示函数时,人们习惯于有时明确写出函数的定义域,而有时采用默认函数定义域的方式.默认函数定义域的原则是:函数定义域就是使函数关系解析式有意义的所有自变量实数值的集合。当研究实际问题时,自变量取值不仅要使函数关系解析式有意义,还要使该实际问题本身也有意义.

例 5 求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$;

(2) $g(t)=\sqrt{4-t^2}+\dfrac{1}{t}$;

(3)圆面积 $S(r)=\pi r^2$.

解 (1) $x\neq 1$ 时, $f(x)$ 有意义,所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x \mid x\in\mathbf{R}, x\neq 1\}$,即 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$;

(2)要使 $g(t)$ 有意义, t 应不为零且满足 $4-t^2\geqslant 0$.所以函数 $g(t)$ 的定义域是 $[-2,0)\cup(0,2]$;

(3)因为圆的半径是正数,函数 $S(r)$ 的定义域是 $\{r \mid r>0\}$,即 $(0,+\infty)$.

例 6 某运输公司规定货物的吨公里运价为:在 20 吨公里内,每吨公里 5 元;超过 20 吨公里,超过部分每吨公里 4 元.求运价 m 与吨公里数 x 之间的函数关系.

解 依题意可知当 $0<x\leqslant 20$ 时, $m=5x$;当 $x>20$ 时, $m=100+4(x-20)$.可列出函数如下:

$$m=\begin{cases}5x & \text{当 } 0<x\leqslant 20\\ 100+4(x-20) & \text{当 } x>20\end{cases}$$

注意,此例函数关系是用分段函数表示的.分段函数的特点是其定义域含有若干区间或数集,函数关系在各个区间(或数集)上分别表示为不同的表达式.

例 7 下列函数中,有两者相等的吗?

(1) $H(x)=x$　　(2) $f(x)=\sqrt{x^2}$

(3) $G(x)=\dfrac{x(x+1)}{x+1}$　　(4) $\varphi(u)=u$

(5) $\psi(t)=(\sqrt{t})^2$

解　$H(x)$、$f(x)$、$\varphi(u)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，$G(x)$的定义域为$\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq-1\}$，$\psi(t)$的定义域为$[0,+\infty)$. 定义域不同则函数不可能相等. 以下只需讨论$H(x)$、$f(x)$、$\varphi(u)$的对应法则. 易见$f(x)$把自变量对应到其绝对值，$H(x)$、$\varphi(u)$则都是把自变量对应到自身. 于是$H(x)$与$\varphi(u)$是相等的函数.

注意，函数相等由它们的定义域相同、对应法则相同决定，而它们的自变量用什么字母代表、函数关系用什么字母代表与函数定义无关.

§1.3　函数的几种简单形态

研究给定的函数，以下几种简单形态值得留意. 讨论一个函数是否具有下述特性，对深入研究该函数很有帮助.

1.3.1　奇偶性

定义 1.3.1　如果对于函数$f(x)$的定义域内任意x，$f(-x)$有定义且$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为偶函数.

定义 1.3.2　如果对于函数$f(x)$的定义域内任意x，$f(-x)$有定义且$-f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为奇函数.

容易验证：函数$y=\cos x$及$y=x^2$都是偶函数；$y=\sin x$及$y=x^3$都是奇函数.

许多函数既非偶函数也非奇函数. 例如函数$y(x)=x^2+x$，$y(2)=6$，$y(-2)=2$，易见$y(2)\neq y(-2)$且$y(2)\neq-y(-2)$.

从偶函数、奇函数的定义可以知道：奇函数、偶函数的定义域

都是关于原点对称的;偶函数的图像是关于坐标平面的 y 轴对称的;奇函数的图像是关于坐标平面的原点对称的.

1.3.2 有界性

定义 1.3.3 如果存在常数 $M>0$,使得函数 $f(x)$在其定义域 D 内,不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

恒成立,则称 $f(x)$在 D 内是有界的.否则,称 $f(x)$在 D 内是无界的.

函数 $f(x)$有界的几何意义很明确,那就是 $y=f(x)$在坐标平面上的图像被框在 $y=-M$ 和 $y=M$ 两条直线界定的范围之内.

例如,$y=\sin x$ 在其定义域$(-\infty,+\infty)$内,$|\sin x|\leqslant 1$ 恒成立,所以 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$是有界的.

函数 $y=x^2$ 在其定义域$(-\infty,+\infty)$则是无界的.

函数 $y=\dfrac{1}{x}$在其定义域$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$是无界的.

定义 1.3.4 如果存在常数 $M>0$,使得函数 $f(x)$在区间(a,b)上有定义且不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

恒成立,则称 $f(x)$在(a,b)有界.

例如,函数 $y(x)=\dfrac{1}{x}$在其定义域无界.但在区间$(1,+\infty)$,$|y(x)|\leqslant 1$,所以 $y(x)=\dfrac{1}{x}$在区间$(1,+\infty)$有界.

1.3.3 单调性

定义 1.3.5 设 $y=f(x)$对于区间(a,b)内的任意两个值 x_1,x_2,只要 $x_1<x_2$,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$在区间$(a,

b)内单调递增.

定义 1.3.6 设 $y=g(x)$ 对于区间 (a,b) 内任意两点 x_1, x_2,当 $x_1<x_2$,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $g(x)$ 在区间 (a,b) 内单调递减.

单调递增也称单调增加,单调递增的函数称为增函数;单调递减也称单调减少,单调递减的函数称为减函数.

单调递增的函数,其图像是沿 x 轴正向上升的曲线(参看图 1-2);减函数的图像是沿 x 轴正向下降的曲线(参看图 1-3).

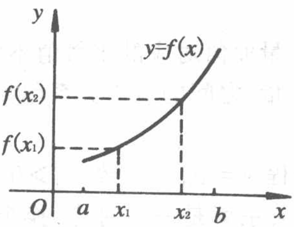

图 1-2

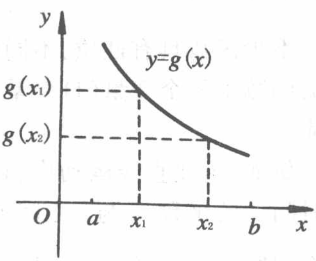

图 1-3

例 8 证明函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内是增函数.

证 在 $(0,+\infty)$ 任意选取 x_1,x_2 且 $x_1<x_2$,则

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1{}^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)$$

由于 $x_1<x_2, x_1+x_2>0$,所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$,于是知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

1.3.4 周期性

定义 1.3.7 对于函数 $f(x)$,如果存在一个非零常数 T,使得对定义域内任意一点 x, $f(x+T)=f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,常数 T 叫做 $f(x)$ 的周期.

由此定义可知:周期函数的定义域是无界数集;当 T 为 $f(x)$

的周期，则对任一非零整数 n，nT 也是 $f(x)$ 的周期.

若周期函数 $f(x)$ 的周期中，有一个最小的正数 T，那么 T 称为 $f(x)$ 的最小正周期. 不少书把最小正周期称为周期，请读者留意.

例如：$\sin x$ 的最小正周期为 2π；$\mathrm{tg}x$ 的最小正周期是 π.

§1.4 反函数与复合函数

1.4.1 反函数

不少函数具有性质：不同的自变量取值对应的函数值不同. 这样的函数中两个变量(自变量和因变量)之间的对应关系称为一一对应.

例如：匀速直线运动中，运动路程 $s=v_0t$（常数 $v_0>0$）是运动时间 t 的函数. s 与 t 之间的对应关系就是一一对应. 换个角度考察问题，运动时间 t 也可视为运动路程 s 的函数 $t=\dfrac{s}{v_0}$. 这个新函数以 s 为自变量，t 为因变量，它被称为函数 $s=v_0t$ 的反函数.

一般地，函数的对应关系为一一对应，则这个函数有反函数.

定义 1.4.1 设函数 $y=f(x)$ 定义域为 D，对应法则 f 是一一对应，值域为 V；函数 $x=\varphi(y)$ 定义域为 V，对任意 $\bar{y}\in V$，因为 V 是 $f(x)$ 的值域，必有 $\bar{x}\in D$，使 $f(\bar{x})=\bar{y}$，φ 把 $\bar{y}$ 就对应到 $\bar{x}$. 这样定义的函数 $x=\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

注意，反函数 $x=\varphi(y)$ 的定义域是 $y=f(x)$ 的值域，φ 实际上是 f 的逆向对应. 为了表示这种联系，人们习惯上用 f^{-1} 表示 f 的逆(向)对应，反函数 $x=\varphi(y)$ 常写作 $x=f^{-1}(y)$. 应当注意，作为一个符号，f^{-1} 是一个整体，不能理解为 $\dfrac{1}{f}$.

由于函数由定义域和对应关系确定，自变量、因变量用什么字

母代表无关本质.人们也常把 $x=f^{-1}(y)$写成 $y=f^{-1}(x)$.

按照定义 1.4.1,函数 $y=f(x)$与 $x=f^{-1}(y)$互为反函数.即,$y=f^{-1}(x)$的反函数是 $y=f(x)$.

例 9 求下列函数的反函数:

(1)$y=3x-1$; (2)$y=x^3+1$.

解 (1)由 $y=3x-1$ 得 $x=\dfrac{y+1}{3}$.

$\therefore y=3x-1$ 的反函数为 $y=\dfrac{x+1}{3}$.

(2)由 $y=x^3+1$ 得 $x=\sqrt[3]{y-1}$.

$\therefore y=x^3+1$ 的反函数为 $y=\sqrt[3]{x-1}$.

函数 $y=f(x)$与其反函数 $x=f^{-1}(y)$在(x,y)直角坐标平面中是同一条曲线.当把反函数按习惯记为 $y=f^{-1}(x)$时,则由于坐标变换的关系,在(x,y)直角坐标平面中它的图像与函数 $y=f(x)$的图像对称于直线 $y=x$(如图 1-4 所示).

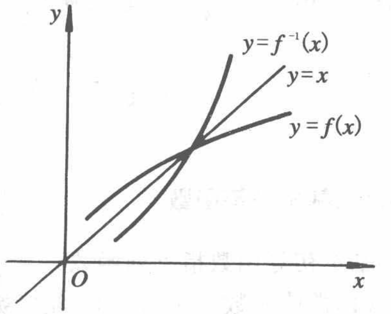

图 1-4

1.4.2 复合函数

定义 1.4.2 设函数 $y=f(u)$的定义域为 D,函数 $u=\varphi(x)$值域的一部分或全部在 D 中,则称函数 $y=f[\varphi(x)]$为复合函数.x 为自变量,y 为因变量,u 为中间变量.

利用复合函数的概念,可以将一个较复杂的函数看成由几个较简单的函数复合而成,便于对函数进行研究.

例如函数 $y=\sin^3 x$ 可以看成由 $y=u^3$,$u=\sin x$ 复合而成;函数 $y=e^{\sin x}$可以看成由 $y=e^u$,$u=\sin x$ 复合而成.

应当注意,复合函数 $y=f[\varphi(x)]$的定义域常常比 $u=\varphi(x)$的定义域要小(当然也可能相等),这是因为受到 $y=f(u)$的定义域的限制.

例 10 求复合函数 $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$的定义域.

解 $y=\arcsin u$, $u=\dfrac{2x-1}{3}$,须$|u|\leqslant 1$,即

$$\frac{2x-1}{3}\leqslant 1$$

因此

$$-1\leqslant x\leqslant 2$$

于是 $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$的定义域为$[-1,2]$.

§1.5 初等函数

1.5.1 基本初等函数

基本初等函数指下列函数:

(1)常值函数 $y=c$ (c 是常数);

(2)幂函数 $y=x^{\alpha}$ ($\alpha\in\mathbf{R}$);

(3)指数函数 $y=a^{x}$ (a 是不等于 1 的正数);

(4)对数函数 $y=\log_a x$ (a 是不等于 1 的正数);

(5)三角函数

$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$,

$y=\cot x$, $y=\sec x$, $y=\csc x$;

(6)反三角函数

$y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$,

$y=\operatorname{arccot} x$, $y=\operatorname{arcsec} x$, $y=\operatorname{arccsc} x$.