奥林匹克数学竞赛培训班

高中数学讲座

AO LIN PI KE SHU XUE JING SAI PEI XUN BAN

GAO ZHONG SHU XUE JIANG ZUO

北京 天津 四川 安徽数学会

IMO

安徽教育出版社

奥林匹克数学竞赛培训班

高中数学讲座

GAO ZHONG SHU XUE JIANG ZUO

北京　天津　四川　安徽数学会

安徽教育出版社

责任编辑　杨晓原
装帧设计　牛　昕

奥林匹克数学竞赛培训班
高中数学讲座
安徽教育出版社出版
（合肥市金寨路283号）
安徽省新华书店发行　安徽新华印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：12　字数：210,000
1989年7月第1版　1989年7月第1次印刷
印数：6,700
中国标准书号：ISBN 7-5336-0436-9/G·932

定价：3.85元

出 版 说 明

中学数学竞赛是一项广大中学生所喜爱的活动。它不但能帮助广大中学生巩固和加强课本中所学到的知识，而且能进一步开拓视野，培养严密的逻辑推理能力和思维能力。

最近几年，广大青少年积极参加数学竞赛这一活动，各地数学竞赛活动蓬勃开展，各级奥林匹克数学竞赛培训班如雨后春笋破土而出。全国各地师生都热切地盼望着这一方面资料的编辑出版。目前，全国已有不少此方面的书籍相继出版。但是适合于地、市一级数学竞赛的培训材料还不多见。而恰恰参加这一层次数学竞赛的中学生人数最为广泛，这不能不说是件憾事。为了满足这一部分中学师生的需求，填补这一方面的空白，我们约请了北京数学会、天津数学会、四川数学会、安徽数学会中有丰富经验的教师与专家精心编写了这一本书，以满足广大青少年学生和教师的需求。

本书的读者对象是参加地、市一级数学竞赛的学生，以教材形式出现，因而在论述的方法上采取由浅入深，层层剖析，使读者易于接受。在例题解析中采取诱导启发的方式，避免囫囵吞枣，以利于理解。在习题部分，都随题附有提示与答案，便于自我练习。在题目的选择上避免怪、生、涩等偏题，针对参加地、市这一层次的学生水平而精选习题，从而更具有实用性、针对性、科学性。

参加本书编写的执笔人员：第1章是张景中，第2、14章是严镇军，第3章是陆征一，第4、7章是苏化明，第5章是刘裕文，第6章是白苏华，第8章是黄有度，第9章是唐贤江、刘裕文，第10、11、12章是魏有德，第13章是魏万迪，第15章是严镇军、陈吉范，第16章是胡炳生、胡礼祥。

目 录

第1章　几何解题的面积法与体积法

利用面积关系解题，古已有之，勾股定理的证明，是最好的例子．经过许多数学家、数学教师和其它数学爱好者的辛勤发掘，面积方法的内容日益丰富，成为几何解题的一种重要方法．

用面积法解题，常有直观易懂、简洁明快、易学易记之便．尤其重要的，它是解平面几何题的一种通用方法，几乎所有的平面几何证明题与计算题，都能用面积方法来解．不过，有些题目使用面积法要迂回一些，不为人常用．

这里把面积法的基本思想、基本手法作一浅近地介绍．

1. 基本公式与基本定理

用面积法解题，当然离不开面积计算方法．计算平面图形的面积，公式不少，但用处最大的，还是小学里就学过的．

三角形面积公式之一　三角形面积等于底乘高之半．即（图1）

$$S=\frac{1}{2}ah \qquad (1)$$

从这个公式可以推出：

推论1　等高三角形面积比等于底之比．

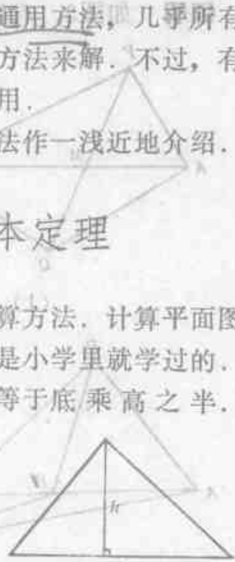


图 1

作为推论1的特款，又有：

推论2 若A、B、C、D在一条直线上，P是直线外任一点，则(图2)

$$\frac{\triangle PAB}{\triangle PCD}=\frac{AB}{CD} \tag{2}$$

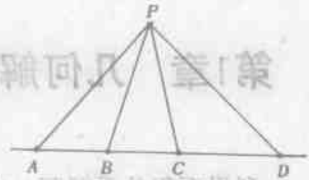


图 2

这里以及后面，记号$\triangle ABC$既表示三角形ABC本身，在不至于误解时，也表示$\triangle ABC$的面积.

此外又可得到十分有用的下述推论.

推论3 （共边比例定理）若直线AB与直线PQ交于M，则

$$\frac{\triangle PAB}{\triangle QAB}=\frac{PM}{QM} \tag{3}$$

证明 如图3，有四种情况：

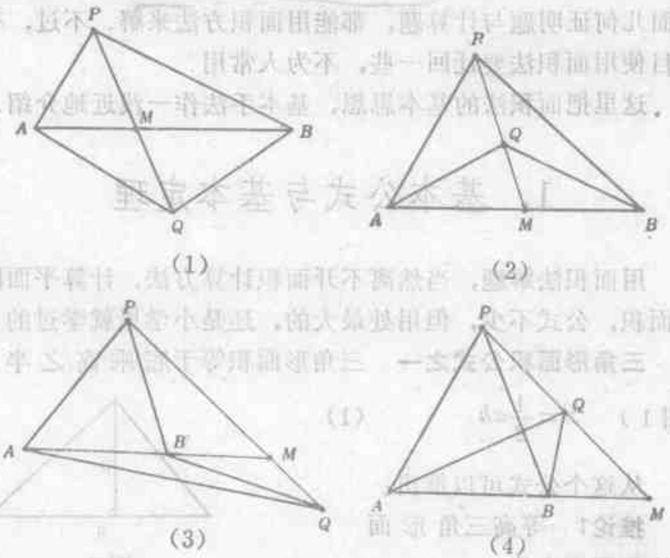


图 3

无论哪种情形，由推论2可知：

$$\frac{\triangle PAM}{\triangle QAM}=\frac{PM}{QM}=\frac{\triangle PBM}{\triangle QBM} \qquad (3)$$

对(3)用合比定律，在图3的(1)、(2)情形得：

$$\frac{\triangle PAB}{\triangle QAB}=\frac{\triangle PAM+\triangle PBM}{\triangle QAM+\triangle QBM}=\frac{PM}{QM} \qquad (4)$$

至于情形(3)、(4)，则可用分比定律：

$$\frac{\triangle PAB}{\triangle QAB}=\frac{\triangle PAM-\triangle PBM}{\triangle QAM-\triangle QBM}=\frac{PM}{QM} \qquad (5)$$

综合(4)与(5)，就证明了推论3.

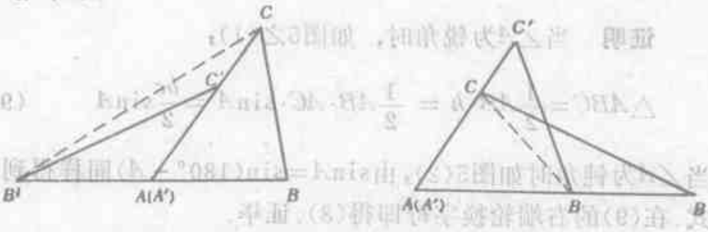
在$\triangle PAB$与$\triangle QAB$中，AB是它们的公共边．所以这样的一对三角形叫共边三角形．共边三角形十分常见，故共边比例定理很有用．

共边比例定理的姐妹定理是下面的

推论4 （共角比例定理）若在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中有$\angle A=\angle A'$或$\angle A+\angle A'=180°$，则：

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB\cdot AC}{A'B'\cdot A'C'} \qquad (6)$$

证明 不妨使A与A'重合，且使A、B、B'共线，A、C、C'共线，如图4



(1) (2)

图 4

在图4的两种情形之下，都有如下形式：

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{\triangle ABC}{\triangle AB'C}\cdot\frac{\triangle AB'C}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB}{A'B'}\cdot\frac{AC}{A'C'}\quad(7)$$

于是推论4得证。

今后，若两个三角形$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中有一对对应角$\angle A$与$\angle A'$相等或互补，则称它们是一对共角三角形.

如果学了下列由三角形两边及其夹角表示其面积的公式，共角比例定理就极显然了。

三角形面积公式之二 分别以a、b、c表示三角形ABC之三边BC、CA、AB，则

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C\quad(8)$$

图 5

证明 当$\angle A$为锐角时，如图5之(1)：

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}AB\cdot h=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=\frac{bc}{2}\sin A\quad(9)$$

当$\angle A$为钝角时如图5(2)，由$\sin A=\sin(180°-A)$同样得到(9)式.在(9)的右端轮换字母即得(8).证毕.

这个面积公式在目前的教科书中很不显眼，但它十分重要.因为它把长度、角度和面积这三种几何量联系在一起了.

面积公式之二(即(8))的一个重要应用是推出推论5.

推论5 (张角公式)若C在线段AB上，而P是直线外任一点，且$\angle APC=\alpha$、$\angle CPB=\beta$、$\angle APB=\alpha+\beta$，则

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{PC}=\frac{\sin\alpha}{PB}+\frac{\sin\beta}{PA} \qquad (10)$$

反之，若此等式成立，则C点在线段AB上.(图6)

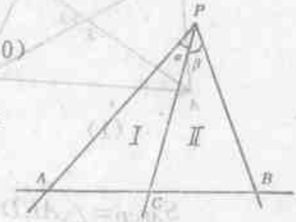


图 6

证明 若C在线段AB上，如图6有

$$\triangle ABP=\triangle \mathrm{I}+\triangle \mathrm{II} \qquad (11)$$

利用面积公式(8)得：

$$\frac{1}{2}PA\cdot PB\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}PA\cdot PC\sin\alpha+\frac{1}{2}PB\cdot PC\sin\beta \quad (12)$$

再用$\frac{1}{2}PA\cdot PB\cdot PC$除两端，即得(10)式.

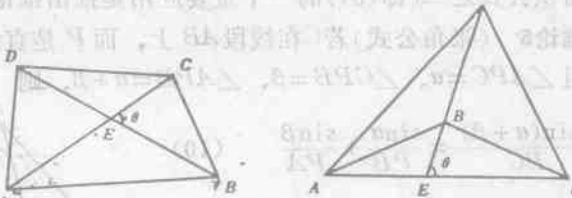
反过来，由(10)可得(11)，即$\triangle ABC=0$，这证明三点A、B、C共线.且由$\triangle ABP=\triangle \mathrm{I}+\triangle \mathrm{II}$可知$C$在$A$、$B$之间.

用面积方法解题，主要工具是两个面积公式((1)与(8))和三个推论——共边比例定理、共角比例定理、以及张角关系，有时也偶尔用到下面的一些面积公式：

推论6 简单四边形$ABCD$的对角线AC与BD交角为θ，则四边形$ABCD$之面积为

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\theta \qquad (13)$$

证明 如图7，简单四边形——即边与边不相交叉的四边形——分为凸四边形和凹四边形两种.前者(图7(1))有



(1)　　　　　(2)

图 7

$$S_{ABCD}=\triangle AED+\triangle DEC+\triangle AEB+\triangle BEC$$

关于后者(图7(2))有

$$S_{ABCD}=\triangle AED+\triangle DEC-\triangle AEB-\triangle BEC$$

关于点E对上两式右端使用三角形面积公式(8)，并整理并项，即得(13)式.

另几个三角形面积公式是：

三角形面积公式之三　(海伦公式)用s简记三角形周长之半，即$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则

$$\triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{14}$$

三角形面积公式之四　用r记$\triangle ABC$内切圆的半径，则

$$\triangle ABC=\frac{r}{2}(a+b+c) \tag{15}$$

三角形面积公式之五　用R记$\triangle ABC$外接圆的半径，则

$$\triangle ABC=\frac{abc}{4R} \tag{16}$$

还有很少用的一些公式，如：

三角形面积公式之六　R意义同上，则

$$\triangle ABC=2R^2\sin A\sin B\sin C \tag{17}$$

三角形面积公式之七

$$\triangle ABC=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}=\frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin(A+C)}=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin(A+B)} \quad (18)$$

2. 面积公式的简单应用

即使是简单地用一下三角形面积公式，也能证明不少题目.下面的几个例题虽然难度不大，也足以表明面积法的最基本的思想：

用不同的方法计算同一块面积，得到一个等式，从这个等式出发加以整理得到所要结论.

例1 若$\triangle ABC$的两边AB、AC上的两个高$BE=CD$. 求证：$AB=AC$(图8)

证明 由三角形面积公式(1)：

$$AB\cdot CD=2\triangle ABC=AC\cdot BE \quad (19)$$

再用$AB=AC$，即得$CD=BE$. 证毕.

这种证法比用全等三角形简洁.

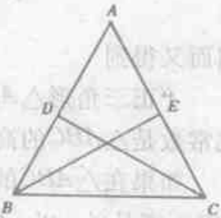


图 8

例2 在$\triangle ABC$内或周界上任取一点P，记P到三边a、b、c的距离顺次为x、y、z，则不论P取在何处，$ax+by+cz$是一个常数，这个常数是三角形ABC面积的二倍.试证明之.

证明 如图9，连PA、PB、PC把$\triangle ABC$分成三个三角形，则：

$$\triangle ABC=\triangle PBC+\triangle PCA+\triangle PAB$$

$$=\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}by+\frac{1}{2}cz \quad (20)$$

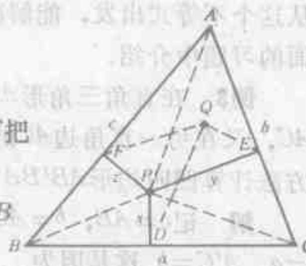


图 9

即 $$ax+by+cz=2\triangle ABC \tag{21}$$
证毕.

别看这个结论得来全不费工夫，它却有许多极其有趣的应用．例如，当 $b=c$ 时，$\triangle ABC$ 是等腰三角形．如果 P 在底边 BC 上，则 $x=0$，于是 $2\triangle ABC=by+cz$，但 $b=c$，故 $(y+z)=\dfrac{2\triangle ABC}{b}$．这就得到一条定理：

“等腰三角形底边上任一点到两腰距离之和是一个常数．此常数是这个三角形腰上的高．”

如果$\triangle ABC$是等边三角形，$a=b=c$，则得
$$x+y+z=\frac{2\triangle ABC}{a} \tag{22}$$
因而又得到

“正三角形$\triangle ABC$内任一点P到三边距离之和为一常数．此常数是$\triangle ABC$的高．”

如果在$\triangle ABC$的同平面上任取另一点Q，Q到诸垂足D、E、F之距离是x'、y'、z'，则显然有：（参看图9）
$$\begin{aligned} ax'+by'+cz' &> 2(\triangle QBC+\triangle QCA+\triangle QAB)\\ &\geqslant 2\triangle ABC=ax+by+cz \end{aligned} \tag{23}$$
从这个不等式出发，能解决一些有名的问题．我们将安排在后面的习题中介绍．

例3 在直角三角形ABC较大的直角边BC上取A'使$A'C=AC$，又在另一直角边AC的延长线上取B'使$B'C=BC$．用两种方法计算凹四边形$AB'BA'$之面积S，以证明勾股定理．(图10)

解 记$c=AB$，$b=AC$，$a=BC$，则显然有 $A'B'=c$，$B'C=a$，$A'C=b$．这是因为
$$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$$

之故．一方面

$$S=\triangle ACA'+\triangle BCB'$$

$$=\frac{1}{2}(b^2+a^2)\qquad(24)$$

图10

另一方面，延长$B'A'$交AB于D之后，由$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，故$\angle A'DB=\angle A'CB'=90°$，于是又有

$$S=\triangle AB'B-\triangle AA'B$$

$$=\frac{1}{2}(B'D\cdot c-A'D\cdot c)$$

$$=\frac{c^2}{2}\qquad(25)$$

比较(24)与(25)即得$a^2+b^2=c^2$，这证明了勾股定理．

勾股定理的面积证法很多，这是其中较直接的一个．如果直观地把图10说成："将直角三角形$\triangle ABC$绕直角顶点C旋转90°得$\triangle A'B'C''$"，证明时用四边形面积公式(13)，当更显简便．

例4 设直角三角形三边$a\leqslant b<c$，其内切圆半径为r，求证：$a>2r$，$b>3r$，$c>4r$．

证明 记$\triangle ABC$内心为O，如图11，显然有

$$\frac{ab}{2}=\triangle ABC$$

$$=\triangle OBC+\triangle OCA+\triangle OAB$$

$$=\frac{r}{2}(a+b+c)\qquad(26)$$

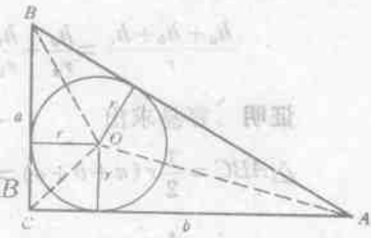


图11

于是

$$ab=r(a+b+c)>r(b+c)>2br\qquad(27)$$