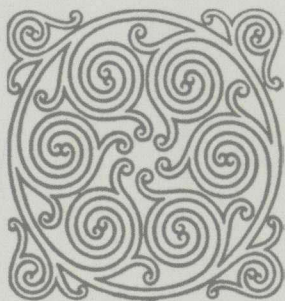


高等院校哲学专业核心课程教材

# 符号逻辑讲义



*Symbolic Logic*

徐明 编



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

高等院校哲学专业核心课程教材

# 符号逻辑讲义



*Symbolic Logic*

徐明 编



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

符号逻辑讲义/徐明编. —武汉: 武汉大学出版社, 2008. 9

高等院校哲学专业核心课程教材

ISBN 978-7-307-06553-6

I. 符… II. 徐… III. 数理逻辑—高等学校—教材 IV. O141

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 148880 号

责任编辑:王军风

责任校对:黄添生

版式设计:马 佳

---

出版发行: **武汉大学出版社** (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件: wdp4@whu.edu.cn 网址: www.wdp.com.cn)

印刷: 湖北省通山县九宫印务有限公司

开本: 720 × 1000 1/16 印张: 37.25 字数: 534 千字 插页: 1

版次: 2008 年 9 月第 1 版 2008 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-307-06553-6/O · 391 定价: 58.00 元

---

版权所有, 不得翻印; 凡购我社的图书, 如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请与当地图书销售部门联系调换。

# 序



这份讲义是当代逻辑入门课程的教材，内容大约是一阶逻辑的前部，可作为教科书或参考书，用于哲学、数学、计算机科学和语言学等院系的当代逻辑课程。希望了解一点当代逻辑的各科学学生，也可以把它当作课外读物。

无论在国内还是国外，可用于一阶逻辑课的教材不少，导论性的教材更多；但两类教材的脱节是个老问题。国外一些教材在导论性内容后增加些一阶逻辑的内容（如完全性定理），其中有的已被国内学者介绍或模仿。但这类教材通常仍只能用于导论课。编写本书的目的之一，就是想把脱节的教材连起来。

说到西方人写的当代逻辑入门教材，不能不提一种现象：越来越多的这类教材是由逻辑界之外的人撰写的。有一次，美国哲学界的几位同事谈起部分学生逻辑水平很低，其中一人开玩笑说，那是你们逻辑学家的过错——谁让你们不写几本好的初级教科书呢？西方人写的逻辑教科书，有的很好，有的也很糟。所以，选用这类教材时要慎重，决不是西方人写的就一定好。

作为学科和知识体系，当代逻辑并没有理科当代逻辑、工科当代逻辑和文科当代逻辑之分。任何人若想掌握当代逻辑的基础知识，应该学习的决不会比其他学科的人更少。编写本书时，在基本内容的选择上对各学科读者一视同仁，但为了使没经过理论数学的严格训练的人也能学好，在写法上力求从接近直观的东西入手，循序渐进。

本书共分四编：命题逻辑、命题演算、谓词逻辑和谓词演算（这些只是各编的名称，请勿当真把符号逻辑划分成这样四个部分）。每一编都从简单的问题和不太严格的讨论开始，逐渐过渡到较复杂的问题和较严格的讨论。全书内容涉及符号化、语义学、费奇式推演、弗雷格-希尔伯特式系统和简单的元定理及其证明。与导论性教材相比，这份讲义对符号化和演绎的要求更高。据我观察，学生学习中的最大难关不是演绎，而是语义学的严格表述、运用以及元定理的证明。与此相应，本书中语义讨论的篇幅比较大，不太难的元定理也比较多。在一学期时间里，是否要把本书内容讲完，取决于教师

的教学理念和选课学生的状况。在多数情况下，建议教师把书中的部分内容留给学生，让他们自己搞懂，尤其是各种例子。

就学生而言，大学期间最重要的或许就是学会自学。高等教育“转型”后，传统的一刀切式的课程设计已显露出越来越多的弊端。对希望真有所学的学生来说，与其成天抱怨无所学，不如学会自学。编写本书时，我试图兼顾课程讲义和自学教材两方面的需要，编入书中的例子格外多，部分原因是为帮助自学者克服学习过程中的困难。本书中在标题处标有“†”样符号的，大多属于第一次接触时稍难的内容。自学者可以有选择地阅读，甚至可以暂时跳过这些内容，只须记住：暂时跳过它们决不意味着它们不重要。

证明是演绎科学的特征。在这样的学科里，仅仅记住几个命题的叙述，并不足以明白它们之间的关系，甚至不足以明白这些命题。学习当代逻辑和学习任何一门演绎科学一样，没有绕过证明的捷径。这份讲义除第一章外，每章后面都有习题，希望读者重视解题，尤其是证明题。解证明题固然没有“标准答案”，但若想得要领，就需要一定的训练，而解证明题正是这种训练的一部分。少量习题标有“\*”，附录中有它们的提示或参考答案。

应试教育环境下的学生，特别是一些文科学生，虽有各种长处，但科学素养、理性精神和分析能力明显不足。既适应这种学生特点又使他们能真懂一点当代逻辑的教材，是很不容易写的，本书只是一次尝试。对理论数学训练较好的读者来说，本书中的某些内容过于死板和琐细；而对希望学习当代逻辑的文科学生来说，同样的内容可能显得过于简练。对前者我表示歉意，对后者我想多说几句。

对文科生来说，当代逻辑似乎不是很容易学。不过，值得学的都不容易。当年老师的一番话使我受益匪浅：在某种意义上说，数学书和逻辑书是最容易读的，因为这种书讲道理讲得最清楚。从大学毕业起，我就一直认为，准备做理论工作的文科生，尤其是立志做哲学研究的学生，应该学一点当代逻辑的基础知识。用文科同学习惯的语言来说，当代逻辑是知识，是方法，更是素质。从零点开始，一步步走下去，虽没有展翅高飞的想像过瘾，但毕竟可以通过一步步的积累，到达原来想像不出的某个地方——这种地方去多了更会增强想像能力。只要不怕暂时的困难，不信“高人”的忽悠，不热衷于“葵花宝典”式的捷径，懂点当代逻辑决不是什么难事。

本书仓促写成，未及仔细推敲，恐有不少昏话；因教学需要，不得已将其提前面世。欢迎指正。

徐明

# 目录



第一章 引言	1
1.1 论说	2
1.1.1 论说的好坏	3
1.1.2 论说形式的好坏	3
1.1.3 论说的好坏取决于其形式的好坏	5
1.2 演绎	7
1.2.1 演绎的例子(一)	8
1.2.2 演绎的例子(二)	9
1.2.3 可演绎性、可证性和独立性	10
1.2.4 可演绎性与论说	10
1.3 一致性	11
1.3.1 关于一致性的基本想法	11
1.3.2 不一致命题集的例子	12
1.3.3 一致性、逻辑蕴涵和可演绎性的关系	13
1.4 与逻辑或“逻辑”有关的几个问题	14
1.4.1 “逻辑是什么”不是逻辑问题	15
1.4.2 逻辑与“逻辑”的用法	16
1.4.3 逻辑与“习惯的说理方式”	16
1.4.4 当代逻辑、传统逻辑和“普通人需要的逻辑”	17

## 第一编 命题逻辑

第二章 命题联结词与真值表方法	23
2.1 联结词与复合句	24
2.1.1 联结词	24

2.1.2	复合句和简单句	26
2.1.3	复合句的子句	27
2.1.4	主联结词和直接子句	29
2.2	真值函数联结词和非真值函数联结词	31
2.2.1	真值函数联结词	31
2.2.2	非真值函数联结词	31
2.2.3	常用的真值函数联结词符号	33
2.3	符号化	34
2.3.1	哪些联结词对应于哪些联结词符号?	34
2.3.2	符号化的基本操作过程	34
2.3.3	几种特殊情况	36
2.3.4	论说的符号化	37
2.3.5	形式	37
2.4	命题逻辑的基本语法	38
2.4.1	形式语言 $\mathcal{L}_0$	38
2.4.2	对象语言和元语言	39
2.4.3	子公式和主联结词	40
2.4.4	括号的省略	41
2.4.5	语法和语义	42
2.5	真值表和真值的计算	43
2.5.1	联结词的语义解释——基本真值表	43
2.5.2	公式真值的计算	44
2.6	若干基本语义概念的真值表刻画	48
2.6.1	重言蕴涵(重言后承)与重言等值	49
2.6.2	可满足性	53
2.6.3	重言式、矛盾式与或然式	54
2.7	简化真值表方法	57
2.8	习题	60
<b>第三章 命题逻辑的基本概念</b>		71
3.1	对象语言里的符号和公式	71
3.2	真值指派和公式的真值	72
3.3	重言蕴涵、重言等值与可满足性	73
3.4	重言式、矛盾式与或然式	78

3.5	代入	81
3.5.1	关于代入的直观说明	82
3.5.2	代入的定义	82
3.5.3	代入的复合	86
3.6	代入的语义性质	88
3.7	真值指派与真值表	91
3.7.1	真值函数	92
3.7.2	对部分命题变号的赋值	93
3.7.3	基本语义概念的严格定义和真值表刻画的等价性	94
3.8	范式	97
3.8.1	合取范式	97
3.8.2	析取范式	98
3.8.3	范式定理	99
3.9	函数完全性	102
3.9.1	真值函数在形式语言中的表达	102
3.9.2	具有函数完全性的几组真值联结词	104
3.10	习题	106

## 第二编 命题演算

	关于形式系统的简单说明	113
<b>第四章</b>	<b>费奇式推演 I</b>	115
4.1	推演规则	116
4.1.1	结构规则	116
4.1.2	联结词规则	117
4.2	简单的费奇式推演	120
4.2.1	合取规则应用	121
4.2.2	蕴涵规则应用	122
4.2.3	否定规则应用	123
4.2.4	析取规则应用	125
4.2.5	等值规则应用	127
4.3	有前提推演和无前提推演	128
4.3.1	无前提推演	129



4.3.2	有前提推演	132
4.4	费奇式推演的简单技巧	134
4.4.1	“小证明”(Mini-proof)	134
4.4.2	“从结论想起”	136
4.4.3	对析取式的特殊处理	140
4.4.4	“结构 + 小证明”	143
4.4.5	“大结构”	147
4.5	非 Intelim 规则及其运用	152
4.5.1	推演规则	152
4.5.2	替换规则	154
4.5.3	非 Intelim 规则的运用	156
4.6	习题	159
<b>第五章</b>	<b>弗雷格-希尔伯特式演算 I</b>	<b>163</b>
5.1	公理系统 $H_0$	165
5.1.1	$H_0$ 的公理	165
5.1.2	$H_0$ 的推演规则	165
5.2	$H_0$ 中的证明与定理	166
5.3	$H_0$ 中的演绎	171
5.4	内定理和元定理	173
5.5	关于可演绎关系的若干简单命题	178
5.5.1	合取和析取的基本性质	178
5.5.2	合取和析取——交换律和结合律	180
5.5.3	合取和析取——分配律	181
5.5.4	否定和蕴涵	182
5.5.5	否定和析取	185
5.5.6	合取、析取和否定——德摩根律	186
5.5.7	其他	187
5.6	置换定理	190
5.7	sub、证明和无前提演绎	194
5.7.1	$H_0$ 中的证明和无前提演绎	194
5.7.2	一般系统中的证明和无前提演绎	197
5.8	习题	199

<b>第六章 弗雷格-希尔伯特式演算 II</b>	202
6.1 形式语言 $\mathcal{L}_1$ 和公理系统 $H_1$	202
6.1.1 $\mathcal{L}_1$ -符号和 $\mathcal{L}_1$ -公式	202
6.1.2 作为缩写引入的符号	203
6.1.3 公理系统 $H_1$	203
6.2 $H_1$ 中的演绎与证明	204
6.3 等价的公理系统	208
6.3.1 公理系统 $H_2$	208
6.3.2 公理系统 $H_3$	210
6.3.3 公理系统 $H_4$	211
6.3.4 $H_1, H_2, H_3$ 和 $H_4$ 之间的等价性	213
6.3.5 公理系统 $H_1$ 与 $H_0$ (及 $H_0^*$ )	214
6.3.6 mp、DT、IE 和 SRAA*	215
6.4 真实性和重言性的保存, 可靠性定理	218
6.5 一致性	220
6.6 范式	224
6.7 独立性问题	227
6.7.1 不可演绎性和不可证明性	228
6.7.2 公理的独立性、有穷数值解释和一般解释结构	229
6.7.3 独立公理集的一例	232
6.8 习题	236

### 第三编 谓词逻辑

<b>第七章 走近谓词逻辑——符号化</b>	247
7.1 专名、常项与变项	248
7.1.1 专名、常项及其指称	248
7.1.2 变项	249
7.1.3 论域	250
7.1.4 “变项”之“变”	250
7.2 函数符号和项	251
7.2.1 函数和函数符号	251
7.2.2 项	252

7.3	谓词	252
7.4	量词	253
7.4.1	联结符号和公式	254
7.4.2	量词的辖域	255
7.4.3	个体变项的自由出现和约束出现	256
7.4.4	闭公式	256
7.5	直言句及其符号化	257
7.5.1	无量词的句子	257
7.5.2	直言句	258
7.5.3	汉语中的量词	259
7.5.4	直言句的符号化	260
7.6	嵌入的量词	263
7.7	函数符号和等词的运用	266
7.7.1	简单数量词	267
7.7.2	一般数量词	271
7.8	“只有”和“只”	272
7.8.1	“只有 $S$ (才) 是 $P$ ”	274
7.8.2	嵌入的“只有”和“只”	275
7.9	时间的介入	278
7.10	“Donkey Business”	280
7.11	习题	282
<b>第八章 谓词逻辑的基本语法和语义 I</b>		286
8.1	一阶语言	286
8.1.1	$\mathcal{L}^*$ -符号、 $\mathcal{L}^*$ -项和 $\mathcal{L}^*$ -公式	286
8.1.2	与量词有关的几个语法概念	288
8.1.3	一阶语言与高阶语言	289
8.2	“词典语义学”	290
8.3	简单的集合论知识	294
8.3.1	有序对和有序组	294
8.3.2	卡氏积和卡氏幂	295
8.3.3	性质, 关系与函数	295
8.4	模型和赋值	297
8.4.1	模型	297

8.4.2	赋值	298
8.5	基本语义定义 (BSD)	300
8.6	项的值和公式的真值	301
8.7	可满足性、逻辑蕴涵、逻辑等值和有效式	308
8.7.1	可满足性	309
8.7.2	逻辑蕴涵 (逻辑后承)	310
8.7.3	逻辑等值	311
8.7.4	逻辑有效式	312
8.7.5	基本语义概念的简单运用	314
8.7.6	重言蕴涵与逻辑蕴涵	315
8.8	习题	318
<b>第九章</b>	<b>谓词逻辑的基本语法和语义 II</b>	<b>323</b>
9.1	对个体变项的代入	323
9.1.1	代入的直观说明	323
9.1.2	代入的严格定义	325
9.1.3	代入的若干简单性质	328
9.2	自由代入及其基本语义性质	331
9.2.1	自由代入	331
9.2.2	自由代入的基本语义性质	334
9.3	等项替换和易字	337
9.3.1	等项替换	337
9.3.2	易字	338
9.4	置换	339
9.5	易字变形	341
9.5.1	简单易字变形和易字变形	341
9.5.2	相对于自由代入的规范易字变形	343
9.5.3	个体变项的整体替换	345
9.6	理论的不同模型	349
9.6.1	理论对模型共同点的概括	349
9.6.2	同构模型	351
9.6.3	一阶语言的表达力	353
9.7	习题	356

## 第四编 谓词演算

<b>第十章 费奇式推演 II</b>	363
10.1 全称量词消去规则和存在量词引入规则	363
10.1.1 全称量词消去规则	363
10.1.2 存在量词引入规则	365
10.2 全称量词引入规则和存在量词消去规则	368
10.2.1 对被标示的项的直观说明	368
10.2.2 被标示的个体变项和个体常项	370
10.2.3 存在量词消去规则	371
10.2.4 全称量词引入规则	374
10.3 否定词与量词的衔接	379
10.4 推演中常见的其他几种情况	382
10.5 等词引入规则和等词消去规则	388
10.6 非 Intelim 规则及其运用	392
10.6.1 推演规则	392
10.6.2 替换规则	394
10.6.3 省略“重复”的推演	395
10.7 习题	396
<b>第十一章 弗雷格-希尔伯特式演算 III</b>	400
11.1 形式语言和公理系统	400
11.1.1 形式语言	400
11.1.2 公理系统 H	400
11.1.3 H 中的演绎和证明	401
11.1.4 与量词无关的演绎	403
11.2 一阶演绎和证明的若干简单性质	405
11.2.1 概括原则及其推论	405
11.2.2 概括原则及其推论的应用	406
11.3 易字与常项概括	410
11.3.1 易字式和易字变形	410
11.3.2 个体变项的整体替换	412
11.3.3 常项概括原则及其推论	413
11.4 若干可证等值式	417

11.4.1 同类量词串的排列	417
11.4.2 DMQ 等值式和 CDMQ 等值式	418
11.4.3 空约束公式	419
11.4.4 量词对二元联结词的分配和提取	420
11.4.5 量词的移置律和转换律	421
11.5 带等词的一阶演绎和证明	424
11.5.1 带等词一阶演绎的若干简单性质	424
11.5.2 等项替换	427
11.5.3 数学中的几个简单例子	429
11.6 习题	435
<b>第十二章 弗雷格-希尔伯特式演算 IV</b>	<b>439</b>
12.1 置换定理的一般形式	439
12.1.1 置换定理	439
12.1.2 置换定理应用举例	441
12.2 可靠性与一致性	445
12.3 前束范式	449
12.3.1 前束范式存在定理	449
12.3.2 求公式的前束范式	450
12.4 等价的一阶演算公理系统	454
12.4.1 联结词公理的变更	454
12.4.2 量词公理和推演规则的变更	455
12.4.3 等词公理的变更	459
12.4.4 初始符号的变更	461
12.5 完全性定理和紧致性定理的简单形式	461
12.5.1 极大一致集	462
12.5.2 见证和 Henkin 集	464
12.5.3 完全性定理和紧致性定理	466
12.5.4 紧致性定理的简单应用	470
12.5.5 一点说明	472
12.6 习题	473

## 附录 演算 数学归纳法 习题答案

附录 A 其他形式的逻辑演算	479
A.1 表列系统	479
A.1.1 命题逻辑的表列规则	480
A.1.2 谓词逻辑的表列规则	486
A.1.3 习题	490
A.2 模态逻辑的弗雷格-希尔伯特式演算	492
A.2.1 形式语言和系统的推演规则	492
A.2.2 模态系统的常见分类	494
A.2.3 正规模态系统	497
A.2.4 习题	501
附录 B 数学归纳法和趣味逻辑题	503
B.1 几个趣味逻辑题	503
B.1.1 死刑前的陈述	503
B.1.2 “The Lady Or The Tiger?”	504
B.1.3 帽子游戏	504
B.1.4 十二个球	505
B.2 数学归纳法	505
B.2.1 弱归纳原理	506
B.2.2 强归纳原理	508
B.2.3 自然数良序原理	511
B.2.4 递归定义	512
B.3 数学归纳法在逻辑中的应用	514
B.3.1 公式序列的长度	514
B.3.2 项和公式的复杂度	516
B.4 数学归纳法在趣味逻辑题中的应用	519
B.4.1 更多帽子的游戏	519
B.4.2 帽子游戏的一些变种	520
B.4.3 更多的球	521
附录 C 部分习题参考答案或提示	523
C.1 第三章习题	523

---

C.2 第四章习题 . . . . .	524
C.3 第五章习题 . . . . .	525
C.4 第六章习题 . . . . .	527
C.5 第八章习题 . . . . .	533
C.6 第九章习题 . . . . .	534
C.7 第十章习题 . . . . .	542
C.8 第十一章习题 . . . . .	546
C.9 第十二章习题 . . . . .	546
C.10 附录 A 习题 . . . . .	547
C.11 附录 B 习题 . . . . .	549
结语 . . . . .	555
参考文献和推荐书目 . . . . .	557
希腊字母读音表 . . . . .	563
索引 . . . . .	564
符号索引 . . . . .	564
名词索引 . . . . .	569



## 第一章

## 引言



*'I know what you're thinking about,' said Tweedledum;  
'but it isn't so, nohow.' 'Contrariwise,' continued Tweedledee,  
'if it was so, it might be; and if it were so, it would be;  
but as it isn't, it ain't. That's logic.'*

— Lewis Carroll, *Through the Looking Glass*, 1872

在我上大学的时候，不少关于  $X$  的课程始于下面这样的问题：

- ▣ 什么是  $X$ ? ( $X$  的定义)
- ▣ 学好  $X$  在理论上有什么意义?
- ▣ 学好  $X$  在实践上有什么意义?
- ▣ 怎样学好  $X$ ? . . .

然后给出一些答案和细节，构成该课程的“绪言”。近年来，一些新出版的教科书仍沿袭这样的惯例，甚至“读经风”也要从“为什么要读”、“读什么”和“怎样读”等问题刮起。这门课叫“符号逻辑”，是当代逻辑即数理逻辑的入门课程。按惯例，好像也该先讲讲什么是逻辑，什么是符号逻辑，什么是当代逻辑，为什么要学及如何学好逻辑，等等。

像“逻辑是什么”或“当代逻辑是什么”这类问题，如果问的是逻辑或当代逻辑等的定义，那么我劝初学者不必太认真。初学逻辑，自然想知道逻辑学大概是怎么回事，想知道逻辑学家大概做些什么。但是，若想满足这种好奇心，与其在脑子里装些不明不白的“定义”，倒不如对逻辑学里讨论的问题以及讨论的方法多一点认真。这是因为：对一个学科的整体上的理解，是以对该学科中的问题和方法的理解为前提的。当然，这并不是说，关于逻辑或数理逻辑的各种说法都不值得思考。这里的要点是：不具备足够逻辑知识的人，分不出这些说法的好坏高低，反而容易因为学了某些“定义”、“分