

全国普通高等教育“十一五”规划教材

高等数学

(下册)

主 编 雷晓军 罗建斌

北京洪恩教育科技有限公司 总策划

- 本书是编者根据多年的教学经验编写而成
- 结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂
- 教材适应时代要求、符合改革精神、同时又继承了传统教材的优点
- 每章、节中都配有丰富的习题，以便及时巩固和提高



天津科学技术出版社

高等数学

(下册)

主 编 雷晓军 罗建斌



天津科学技术出版社

内 容 提 要

本书是编者根据多年的教学实践,按照新形势下教材改革的精神,并结合高等数学课程教学基本要求编写而成的。本书分上、下两册。下册内容包括多元函数微积分学及其应用,重积分,曲线积分与曲面积分,无穷级数,微分方程等。

本书结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂。本书侧重于分析高等数学各种典型题型,介绍多种解题思路、方法和运算技巧,帮助学生加深对数学概念的理解,提高学生分析问题和解决问题的能力。为了及时巩固所学知识点,本书每章、节后都提供了课后习题,所对应的参考答案可以从 <http://pcbook.hongen.com/> 上下载。

本书可供大学本科和高职高专院校工科类专业、文科类专业的学生使用,也可作为学生考研复习的参考书和工程技术人员更新数学知识的自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/雷晓军等主编.——天津:天津科学技术出版社,2008.8

ISBN 978-7-5308-4500-4

I.高… II.雷… III.高等数学—高等学校:技术学校—教材 IV.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第098048号

责任编辑:刘丽燕

责任印制:王 莹

天津科学技术出版社出版

出版人:胡振泰

天津市西康路35号 邮编300051

电话(022)23332398 (022)23332393

网址:www.tjkjcs.com.cn

新华书店经销

河北新华印刷一厂

开本787×1092 1/16 印张39.5 字数986 000

2008年8月第1版第1次印刷

定价:56.00元(上、下册)

编委会

主任：池宇峰

副主任：李宏明 姜天鹏 卢志勇 潘全春

委员：（以下排名按姓氏拼音字母的先后顺序为序）

管银枝 雋青龙 孙立宏 雷晓军 李 强 李晓松

李 瑜 李志鸿 刘丽新 刘泽云 罗建斌 马 鑫

辛 建 颜保平 杨文海 郑永相

前 言

本书是根据教育部《高等数学课程教学基本要求》和教育教学改革的实践编写的。在编写过程中，我们研究分析了现行的几种版本的《高等数学》教材，吸纳了各版本教材的优点，融进了近几年在高等数学教学科研中取得的成果，使本书更加适合高等数学教学要求。

本书分上下两册，上册内容包括函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分以及应用，空间解析几何等，下册包括多元函数微积分学及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数，微分方程。各章均配有习题，便于读者及时对所学知识巩固提高。为了及时巩固所学知识点，本书每章、节后都提供了课后习题，所对应的参考答案可以从 <http://pcbook.hongen.com/> 上下载。

为了使本书适合高校不同专业的使用，我们将较深的内容或超出高等数学基本要求的内容用“*”标出以作为选学。

本书第七章、第八章和第九章由雷晓军编写，第十章由李强编写，第十一章由罗建斌编写。

由于我们的研究能力、学术水平以及编写时间的限制，教材中难免有疏漏和不当之处，恳切期望读者批评指正，以便进一步修改和完善。

编 者

2008年8月

目 录

第七章 多元函数微分法及其应用	1
第一节 多元函数	1
一、多元函数概念	1
二、多元函数的极限	5
三、多元函数的连续性	7
第二节 偏导数	9
一、偏导数的定义	10
二、偏导数的计算	12
三、高阶偏导数	13
第三节 全微分	16
一、全微分的定义	16
二、可微分的条件	17
第四节 多元复合函数的求导法则	20
第五节 隐函数的求导公式	27
一、一个方程的情形	27
二、方程组的情形	29
第六节 偏导数的应用	32
一、偏导数的几何上的应用	33
二、多元函数的极值及其求法	38
* 第七节 方向导数与梯度	45
一、方向导数	45
二、梯度	47
* 第八节 二元函数的泰勒公式	50
一、二元函数的泰勒公式	50
二、极值存在的充分条件的证明	53
第八章 重积分	56
第一节 二重积分的概念与性质	56
一、二重积分的概念	56
二、二重积分的性质	59
第二节 二重积分的计算	61

一、利用直角坐标系计算二重积分	61
二、利用极坐标计算二重积分	69
第三节 三重积分的概念及其计算	77
第四节 利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分	81
一、利用柱面坐标计算三重积分	81
二、利用球面坐标计算三重积分	84
第五节 三重积分的应用	88
一、二重积分的应用	88
* 二、三重积分的应用	96
第九章 曲线积分与曲面积分	106
第一节 对弧长的曲线积分	106
一、对弧长的曲线积分的概念与性质	106
二、对弧长的曲线积分的计算法	108
第二节 对坐标的曲线积分	112
一、对坐标的曲线积分的概念与性质	112
二、对坐标的曲线积分的计算法	115
三、两类曲线积分之间的联系	121
第三节 格林公式	123
一、格林公式	123
二、平面上曲线积分与路径无关的条件	127
三、二元函数的全微分求积	130
第四节 对面积的曲面积分	136
一、对面积的曲面积分的概念与性质	137
二、对面积的曲面积分的计算法	138
第五节 对坐标的曲面积分	142
一、对坐标的曲面积分的概念与性质	142
二、对坐标的曲面积分的计算法	145
三、两类曲面积分之间的联系	148
第六节 高斯公式	152
第七节 向量场的散度与旋度	157
一、通量与散度	157
二、斯托克斯公式	160
三、环流量与旋度	164
第十章 无穷级数	170

第一节 常数项级数的概念与性质.....	170
一、常数项级数的概念.....	170
二、无穷级数的基本性质.....	173
三、级数收敛的必要条件.....	175
第二节 常数项级数的审敛法.....	177
一、正项级数及其审敛法.....	177
二、交错级数及其审敛法.....	187
三、任意项级数的敛散性(绝对收敛与条件收敛).....	188
第三节 幂级数.....	191
一、函数项级数的一般概念.....	191
二、幂级数及其敛散性.....	192
三、幂级数的运算.....	198
第四节 函数展开成幂级数.....	204
一、泰勒级数.....	204
二、函数展开成幂级数.....	206
三、函数的幂级数展开式的应用.....	214
* 第五节 傅里叶级数.....	220
一、三角级数及三角函数系的正交性.....	220
二、函数展开成傅里叶级数.....	222
三、正弦级数和余弦级数.....	231
第十一章 微分方程	242
第一节 微分方程的基本概念.....	242
第二节 可分离变量的微分方程、齐次方程.....	247
一、可分离变量的微分方程.....	247
二、齐次方程.....	250
第三节 一阶线性微分方程、贝努利方程.....	254
一、一阶线性微分方程.....	254
二、贝努利方程.....	257
第四节 全微分方程.....	262
第五节 可降阶的高阶微分方程.....	265
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程.....	265
二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程.....	266
三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程.....	268
第六节 线性微分方程的解的结构.....	269

一、线性微分方程的基本概念	269
二、线性微分方程的解的结构	271
第七节 二阶常系数齐次线性微分方程	274
第八节 二阶常系数非齐次线性微分方程	279
一、 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$ 型	280
二、 $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x)\cos wx + P_n(x)\sin wx]$ 型	284
* 第九节 欧拉方程	288
第十节 微分方程的应用	290

第七章 多元函数微分法及其应用

在第二章和第三章中, 我们已经研究了一元函数的微分法及其应用. 本章将以此为基础, 讨论多元函数的微分法及其应用. 多元函数微分法是一元函数微分法的推广和发展, 学习时要注意两者的区别和联系. 由于从一元函数到二元函数有许多本质的变化, 而二元函数到二元以上的函数只有自变量的个数不同, 没有本质的区别, 完全可以将有关的内容类推. 因此, 本章的讨论以二元函数为主.

第一节 多元函数

本节先将一元函数所涉及的邻域和区间的定义推广, 然后介绍多元函数概念, 多元函数的极限和多元函数的连续性.

一、多元函数概念

(1) 区域

设 $P_0(a, b)$ 是 xoy 平面上的一个点, δ 是某一正数. 与点 $P_0(a, b)$ 的距离小于 δ 的所有点 $P(x, y)$ 的集合, 称为点 $P_0(a, b)$ 的 δ 邻域, 记为 $U_\delta(P_0)$, 即

$$U_\delta(P_0) = \{P \mid |P_0P| < \delta\} = \{(x, y) \mid \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta\}$$

$U_\delta(P_0)$ 在几何上表示 xoy 平面上以点 $P_0(a, b)$ 为中心, 以 δ 为半径的圆内的所有点. 如果去掉邻域的中心, 称为点 $P_0(a, b)$ 的空心的 δ 邻域, 记为 $\dot{U}_\delta(P_0)$, 即

$$\begin{aligned}\dot{U}_\delta(P_0) &= \{P \mid 0 < |P_0P| < \delta\} \\ &= \{(x, y) \mid 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta\}\end{aligned}$$

如果不考虑邻域的半径, 则用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的某一邻域, $\dot{U}(P_0)$ 表示点 P_0 的某一空心邻域.

设 E 是平面点集, P 是平面上一点. 如果存在点 P 的某一邻域 $U(p)$, 使 $U(p) \subset E$, 则称点 P 是 E 的内点. 显然, $P \in E$ (如图 7.1).

如果点集 E 的任意点都是内点, 则称 E 是开集. 例如 $E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$. E 中所有点都是 E 的内点, 所以 E 是开集.

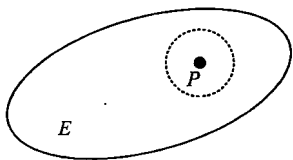


图 7.1

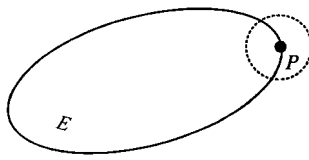


图 7.2

如果在点 P 的任意邻域内, 既有点属于 E , 同时又有点不属于 E , 则称点 P 是 E 的边界点, (如图 7.2). E 的所有边界点组成的集合, 称为 E 的边界. 例如 $E = \{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$ 的边界是圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 和 $x^2 + y^2 = 2$. 由此可见, 点集 E 的边界点 (或边界) 可能属于 E , 也可能不属于 E .

设 E 是开集. 如果 E 内任意两点都能用属于 E 的折线连结起来, 则称开集 E 是连通的.

连通的开集称为开区域. 开区域添上它的边界一起, 称为闭区域. 例如 $\{(x, y) | x^2 + y^2 > 1\}$ 是开区域, $\{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 1\}$ 是闭区域.

有时为简便起见, 并在不致引起混淆的情况下, 将开区域和闭区域都笼统地简称为区域.

设 E 是平面点集. 如果存在某一正数 R , 使 $E \subset U_R(O)$, 点 O 为原点, 则称 E 是有界集. 否则, E 是无界集. 例如 $\{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 2\}$ 是有界开区域, $\{(x, y) | x + y \geq 1\}$ 是无界闭区域.

(2) n 维空间

在空间解析几何中, 引入直角坐标系后, 使得空间的点与有序的三元数组 (x, y, z) 一一对应. 从而, 有序三元数组 (x, y, z) 的全体表示空间一切点的集合, 称为 (三维) 空间. 一般地, 有序 n 元数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的全体称为 n 维空间, 记为 R^n (n 为自然数). 其中每个有序 n 元数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为 n 维空间的一个点 P , 记为 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 数 x_i 称为点 P 的第 i 个坐标. 当 $n=1$ 时, R^1 表示数轴, 当 $n=2$ 时, R^2 表示平面, 当 $n=3$ 时, R^3 表示空间.

设 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Q(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 为 R^n 中任意两点, 两点间的距离定义为

$$|PQ| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

关于平面点集给出的一系列概念, 可完全推广到 n 维空间. 例如邻域概念, 设点 $P_0 \in R^n$, δ 是某一正数, 则 R^n 中与点 P_0 的距离小于 δ 的所有点 P 的集合, 称为点 P_0 的 δ 邻域, 即

$$U_\delta(P_0) = \{P | |P_0P| < \delta, P \in R^n\}$$

(3) 多元函数概念

一元函数是描述一个变量与另一个变量之间的依赖关系. 但是在很多情况下, 往往涉及一个变量与多个变量之间的依赖关系, 即多元函数.

例 7.1 圆柱体的体积 V 和它的底半径 r , 高 h 之间的关系是

$$V = \pi r^2 h$$

当 r, h 在点集 $\{(r, h) | r > 0, h > 0\}$ 内每取一组值 (r, h) 时, V 按着上面的关系总有唯一确定的值

与之对应.

例 7.2 物体运动的动能 W 和物体的质量 m , 运动的速度 v 之间的关系是

$$W = \frac{1}{2}mv^2$$

当 m, v 在点集 $\{(m, v) | m > 0, v > 0\}$ 内每取定一组值 (m, v) 时, W 按着上面的关系总有确定的值与之对应.

例 7.3 一定量的理想气体的压强 P 和体积 V , 绝对温度 T 之间的关系是

$$P = \frac{RT}{V} \quad (R \text{ 为常数})$$

当 V, T 在点集 $\{(V, T) | V > 0, T > T_0\}$ 内每取一组值 (V, T) 时, P 按着上面的关系总有确定的值与之对应.

以上三例都是二元函数的实例. 撇开它们的几何和物理意义, 抽出它们的共性便可得出以下二元函数的定义.

定义 1 设 D 是平面上的一个点集. 如果对于每个点 $P(x, y) \in D$, 变量 z 按着一定的法则总有唯一确定的值与之对应, 则称 z 是变量 x, y 的二元函数 (或点 P 的函数), 记为

$$z = f(x, y) \quad (\text{或 } z = f(P))$$

x, y 称为自变量, z 称为因变量, 点集 D 称为函数的定义域.

$$W = \{z | z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

函数值 $f(x, y)$ 的全体称为函数的值域.

表示函数对应关系的记号 f 也可用其它字母表示, 如函数 $z = \varphi(x, y)$, $z = u(x, y)$ 等等.

如果将平面点集 D 改为 n 维空间点集 $D \subset R^n$ ($n \geq 3$), 类似地, 可定义三元函数 $u = f(x, y, z)$ 及 n 元函数 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. 当 $n=1$ 时, n 元函数为一元函数. 当 $n \geq 2$ 时, n 元函数统称为多元函数. 多元函数可简记为 $u = f(P)$, 点 $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$.

如何求多元函数的定义域呢? 与一元函数相类似, 如果多元函数是用解析式表示的, 则函数的定义域就是使函数解析式有意义的自变量所确定的点集. 如果函数有确定的实际意义, 即该函数是某个实际问题的数学模型, 则它的定义域应由实际问题来确定.

例 7.4 求函数 $z = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln(1-x-y)$ 的定义域

解 x, y 应满足不等式

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1-x-y > 0 \end{cases}, \quad \text{即} \begin{cases} x > 0 \\ x+y < 1 \end{cases}$$

从而, 定义域为 $D = \{(x, y) | x > 0 \text{ 且 } x+y < 1\}$, 是无界的开区域, (如图 7.3)

例 7.5 求函数 $z = \arcsin(x^2 + y^2) + \sqrt{2-x^2-y^2}$ 的定义域.

解 x, y 应满足不等式

$$\begin{cases} 2-x^2-y^2 \geq 0 \\ x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}, \text{ 即 } x^2+y^2 \leq 1.$$

从而, 定义域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 是有界闭区域, (如图 7.4)

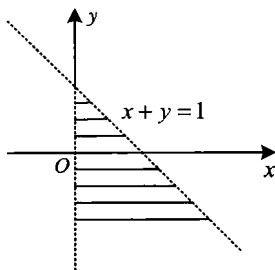


图 7.3

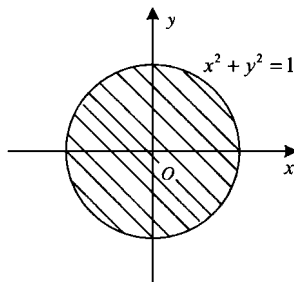


图 7.4

二元函数的图形: 设函数 $z = f(x, y)$ 的定义域为 D . 对于任意取定的点 $P(x, y) \in D$, 有确定的函数值 $z = f(x, y)$ 与之对应. 于是, 以 x 为横坐标, y 为纵坐标, z 为竖坐标, 在空间确定一个点 $M(x, y, z)$, 所有这样确定的空间点的集合

$$\{(x, y, z) | z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

称为二元函数 $z = f(x, y)$ 的图形. 一般地, 二元函数的图形是空间曲面, 而这个曲面在 xOy 面上的投影就是该函数的定义域 D , (如图 7.5). 例如函数 $z = x^2 + y^2$ 是定义在 xOy 面上, 顶点在原点, 开口向上的旋转抛物面, 由方程 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 所确定的函数 $z = f(x, y)$ 的图形是球心在原点, 半径为 a 的球面, 定义域是

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

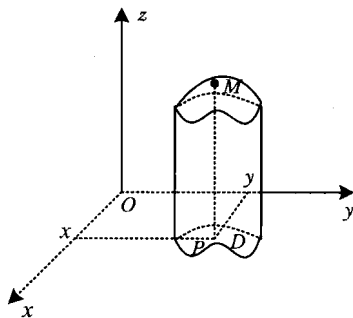


图 7.5

由 $z = \pm \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 可知, 对于任一点 $P(x, y) \in D$, z 有两个确定的值与之对应, 因此, 该函

数为多值函数，其中两个单值分支 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 和 $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 分别表示上半球面和下半球面。除特别声明外，本书主要讨论单值函数。

二、多元函数的极限

我们主要研究二元函数 $z = f(x, y)$ 当 $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ ，即 $P(x, y) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$ 时的极限，然后推广到 n 元函数上去。

类似于一元函数的极限概念，如果 $z = f(x, y)$ 当点 $P(x, y)$ 越来越趋向于点 $P_0(x_0, y_0)$ （但 $P(x, y) \neq P_0(x_0, y_0)$ ）时，对应的函数值 $f(x, y)$ 越来越趋于一个确定的常数 A ，则称常数 A 是函数 $f(x, y)$ 当 $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ 时的极限。这时要特别注意 $P(x, y) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$ 可以从任何方向，以任意方式进行。这一点有别于一元函数的极限（ $x \rightarrow x_0$ 仅有两条途径）。同样，点 $P(x, y) \rightarrow$ 点 $P_0(x_0, y_0)$ 仍然用 P 与 P_0 的距离趋于零描述，即

$$|P_0 P| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \rightarrow 0$$

下面给出二元函数极限的“ $\varepsilon - \delta$ ”定义

定义 2 设二元函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上有定义，点 $P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的内点或边界点， A 为常数。如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ ，总存在 $\delta > 0$ ，使得满足不等式

$$0 < |P_0 P| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

的一切点 $P(x, y) \in D$ ，都有

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

则称 A 为函数 $f(x, y)$ 当 $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ 时的（二重）极限，记作

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A,$$

或

$$f(x, y) \rightarrow A \quad (P \rightarrow P_0).$$

例 7.6 设 $f(x, y) = \frac{3x^2 + 5y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (x^2 + y^2 \neq 0)$,

证明 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$.

证明 因为 $|f(x, y) - 0| = \left| \frac{3x^2 + 5y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 5\sqrt{x^2 + y^2}$ ，所以，对任意给定的 $\varepsilon > 0$ ，取 $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ ，则当 x, y 满足

$$0 < \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} < \delta$$

时，总有

$$|f(x, y) - 0| < \varepsilon,$$

故

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$$

关于二重极限的运算, 有类似于一元函数的运算法则.

例 7.7 求 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$.

解 分子, 分母同乘以因式 $\sqrt{xy+1}+1$, 得

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (\sqrt{xy+1}+1) = 2. \end{aligned}$$

例 7.8 求 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

解 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2\sin^2 \frac{x^2+y^2}{2}}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left[\frac{\sin \frac{x^2+y^2}{2}}{\frac{x^2+y^2}{2}} \right]^2 \cdot \frac{x^2+y^2}{2e^{x^2y^2}} = 1 \cdot 0 = 0.$$

由二元函数极限定义可知, 如果当点 $P(x, y)$ 以两种不同的方式趋于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时, 函数值趋向于两个不同的常数, 则可以肯定函数的极限不存在.

例 7.9 证明极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在.

证明 当点 $P(x, y)$ 沿 x 轴趋于点 $P_0(0, 0)$ 时,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0,$$

当点 $P(x, y)$ 沿 y 轴趋于点 $P_0(0, 0)$ 时,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0,$$

但是, 当点 $P(x, y)$ 沿抛物线 $y = \sqrt{x}$ 趋于点 $P_0(0, 0)$ 时,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = \sqrt{x}}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

所以 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ 不存在.

以上关于二元函数的极限概念及相关结论可推广到 n 元函数 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 上去.

三、多元函数的连续性

与一元函数的连续性相类似, 在多元函数极限的基础上, 我们将研究多元函数的连续性.

定义 3 设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上有定义, 点 $P_0(x_0, y_0) \in D$ (P_0 是 D 的内点或边界点). 如果

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

则称函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 连续.

如果函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上的每一点都连续, 则称函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上是连续函数.

关于二元函数连续性的概念, 可完全推广到 n 元函数 $u = f(P)$ 上去.

如果函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处不连续, 则称点 $P_0(x_0, y_0)$ 为函数 $f(x, y)$ 的间断点.

$$\text{例如函数 } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

虽然 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处有定义, 但是当 $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$ 时, 函数的极限不存在, 所以点 $(0, 0)$ 是该函数的一个间断点.

又如函数 $z = \frac{xy}{y - 2x^2}$ 在抛物线 $y = 2x^2$ 上没有定义, 所以抛物线上的点都是该函数的间断点.

由此可见, 二元函数的间断点有时可能形成一条或几条曲线.

类似于一元初等函数的定义, 所谓多元初等函数, 就是由常数和自变量 (如 x , y 等) 利用基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成的函数. 例如 $\cos \frac{x^2 + y^2}{2}$, $\ln \frac{x^2 + y^2}{1 + xy}$

等都是多元初等函数.

由于多元函数也有类似于一元函数的极限运算法则, 根据这些运算法则及连续函数的定义, 可证得如下结论:

(1) 多元连续函数的和、差、积均为连续函数, 连续函数的商在分母不为零处也连续.

(2) 多元连续函数的复合函数仍为连续函数.

(3) 一切多元初等函数在其定义域内是连续的.

利用多元初等函数的连续性, 可以求某些多元函数的极限. 设 $f(P)$ 是多元初等函数, 而点 P_0 是 $f(P)$ 的定义域内的一点, 则

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$$

例 7.10 求 $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\cos(x - e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

解 函数 $f(x, y) = \frac{\cos(x - e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 是初等函数, 而点 $P_0(1, 0)$ 在其定义域内, 所以 $f(x, y)$ 在点 P_0 处连续.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\cos(x - e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = f(1, 0) = 1.$$

闭区间上连续函数的性质可推广到多元连续函数上去.

定理 1 (最值性) 如果多元函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则 $f(P)$ 在 D 上一定有最小值和最大值. 即在闭区域 D 上至少存在两点 P_1, P_2 , 使得 $f(P_1)$ 为最小值, $f(P_2)$ 为最大值.

定理 2 (介值性) 设多元函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续. 如果 $f(P)$ 在 D 上取得两个不同的函数值 μ_1, μ_2 , 则 $f(P)$ 在 D 上一定取得介于 μ_1 和 μ_2 之间的任何值 μ 至少一次. 特别地, 如果 μ 介于函数 $f(P)$ 的最小值 m 和最大值 M 之间, 则在 D 上至少存在一点 P_0 , 使 $f(P_0) = \mu$.

习题 7.1

1. 设 $z = x + y + f(x - y)$, 若当 $y = 0$ 时, $z' = x^2$, 求函数 f 及 z .
2. 设 $f(x + y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2$, 求 $f(x, y)$.
3. 设 $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4} - 2xy$, 求 $f(tx, ty)$.
4. 求下列函数的定义域