GAOFENJIEJIN

硕士研究生入学考试教程

世纪英才

高分捷进

理工数学

考研命题研究组　审定

北京大学　吴宝科　主编

国防大学出版社

硕士研究生入学

考试教程

高 分 捷 进

（理工数学）

考研命题研究组　　审定

北京大学　吴宝科　主编

国 防 大 学 出 版 社

—北京—

责任编辑:彭呈仓
封面设计:肖　逸

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试教程/王逸梅等编著,-北京:国防大学出版社

ISBN7-5626-0918-7

Ⅰ.20…　Ⅱ.王…　Ⅲ.研究生-入学考试-试题-学习参考资料　Ⅳ.G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 04243 号

硕士研究生入学考试教程

高　分　捷　进

(理工数学)

吴宝科　主编

出　版:国防大学出版社(北京市海淀区)
经　销:新华书店
印　刷:铁道部第十六工程局印刷厂
开　本:787×1092 毫米　1/16
印　张:120
字　数:2000 千字
版　次:第 1 版
印　次:2000 年 6 月印刷
印　数:001—5000
书　号:ISBN 7-5626-0918-7/G·29
定　价:全套(五册)共 175.00 元

前　言

目前市场上关于考研类参考资料非常多，五花八门，但感觉皆有所欠缺，或体系不完整，或偏离了复习考试大纲的要求，或缺乏当前热点的针对性等等不足。为了配合考生更好的进行复习，使之既能从总体上把握应试体系，又做到重点突出，本书因此应运而生，出版意图也体现于此。

本书按照教育部制定的最新《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》编写，体现最新考试精神和要求。其体例为：第一部分为考查知识点和内容提要。能使考生准确掌握知识脉络。第二部分为常考题型及试题分析。立足于典型试题评析，注重方法、技巧点拨，引导思路，找准捷径，指导考生探索规律，找出提高整个考试分数的最佳方法，以求最短时间内提高考试成绩。第三部分为能力测试题。

作为本书的编写者，我们力图结合当前命题趋势，奉献出我们最精华的东西。使考生对考试科目的复习，形成一个系统的学科体系。参加本书编写的还有孙玉冰等同志。

当然，本书编者虽出于我国最著名高等学府，希望尽量达到尽善尽美，但错误、疏漏在所难免，我们只能说，我们尽全力了。如果考生在阅读本书后，觉得有所收获，那将是我们的最大欣慰！

编　者

于北京大学

作者简介

吴宝科，北京大学数学系毕业后留校任教，多年来一直从事高等数学的教学和研究工作。曾编写《高等数学》(高等教育出版社)等教材和著作。

目　　录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第一篇　高等数学

第一章　一元函数微分学

§1. 极限与连续

一、极限的概念与运算

1. 数列的极限

设 x_n 是一个数列，如果对任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，都有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则称常数 a 是数列 x_n 的极限，或称数列 x_n 收敛于 a，记作

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$　或　$x_n\to a(n\to+\infty)$.

如果数列没有极限，就说数列是发散的．

2. 函数的极限

(1)**定义**　函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义（可能不包括点 x_0），A 为某个确定的常数，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 或 $f(x)\to A$（当 $x\to x_0$）.

(2)**单侧极限**　左极限：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，亦可记作 $f(x_0-0)=A$.

右极限：$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，亦可记作 $f(x_0+0)=A$.

(3)**左、右极限与极限的关系**　极限存在⇔左、右极限存在且相等．

它常用来证明分段函数在分段点处极限的存在性．

3. 极限的四则运算法则

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$

4. 极限的某些重要性质

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则此极限值是唯一的．

(2)单调有界准则：单调有界数列必有极限．

(3)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$(或 $A<0$)，则总存在一个正数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)．

(4)夹逼准则　如果在 x_0 的某去心邻域内，都有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x).$$

且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

5. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

下面一些重要极限也经常用到

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}q^n=0\quad(|q|<1)$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}nq^n=0\quad(|q|<1)$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1\quad(a>0)$;　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+B_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}\text{当 } n=m;\\ 0,\text{当 } n>m;\\ \infty,\text{当 } n<m.\end{cases}$

(其中 $a_0\cdot b_0\neq 0$；m,n 为非负整数)．

6. 无穷小量与无穷大量

(1)定义　若函数(或数列)以零为极限，则称该函数(或数列)为无穷小量．非零无穷小量的倒数为无穷大量．

(2)无穷小量的阶

设 $\alpha(x)$，$\beta(x)$都是 x 的同一极限过程的无穷小量．

①若　$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$的高阶无穷小量，记作 $\alpha(x)=0(\beta(x))$

②若　$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0$，则称 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$是同阶无穷小量

③若　$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$为等阶的无穷小量，记作 $\alpha(x)\sim 0(\beta(x))$

④ $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=C\neq 0$，($k$ 为常数)，则称 $\alpha(x)$为 $\beta(x)$的 k 阶无穷小量．

(3)有关的几个结论

①有限个无穷小之和仍为无穷小．

②有界量与无穷小之积为无穷小．

③有限个无穷小之积仍为无穷小．

④$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\lim\alpha(x)=0$.

⑤在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大；反之，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小．

⑥有限个无穷大之积仍为无穷大．

⑦有界量与无穷大之积为无穷大．

⑧若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，则 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

二、极限的求法

1. 求极限的常用方法：

(1)用直接代入法(适用于求 $f(x)$ 连续点的极限)；

(2)用消去零因子法；

(3)用两个重要极限；

(4)用左、右极限(也适用于证明极限不存在)；

(5)用等价无穷小或无穷小的性质；

(6)用夹逼准则；

(7)用单调有界数列必有极限准则；

(8)用变量代换法；

(9)用罗必塔法则；

(10)先将有限项求和，而后求极限；

(11)用级数收敛的必要条件；

(12)用积分和(即定积分的定义)；

(13)应用导数的定义；

(14)应用微分中值定理．

2. 罗必塔法则

(1)"$\dfrac{0}{0}$"法则与"$\dfrac{\infty}{\infty}$"法则

(2)$\infty-\infty$型可以经过通分或乘共轭因子法转化为$\dfrac{0}{0}$(或$\dfrac{\infty}{\infty}$)型，

(3)$\cdot\infty$型可变为$\dfrac{\infty}{\frac{1}{1}}$或$\dfrac{0}{\frac{1}{\infty}}$($\dfrac{0}{0}$ 型)

(4)0^0，1^∞，∞^0 型的解法步骤如下：

①令 $y=f(x)^{g(x)}$；

②取对数，$\ln y=g(x)\ln f(x)$，即 $y=e^{g(x)\ln f(x)}$；

③求极限 $\lim g(x)\ln f(x)=\lim\left(\ln f(x)/\dfrac{1}{g(x)}\right)=\cdots=\alpha$，那么

$$\lim f(x)^{g(x)}=e^{\alpha}.$$

3. 在极限计算中，经常是将等价无穷小替换与罗必塔法则综合应用

当 $x\to 0$ 时常用的等价无穷小有：

(1)$\sin x\sim x$；　(2)$tgx\sim x$；　(3)$\arcsin x\sim x$；

(4)$arctgx\sim x$；　(5)$e^{x}-1\sim x$；　(6)$\ln(1+x)\sim x$；

(7)$1-\cos x\sim\frac{x^{2}}{2}$.

三、函数连续性

1. 连续的概念

(1)定义　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续．用"$\varepsilon-\delta$"方法描述：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续．

(2)左、右连续：若 $f(x)$ 在点 x_0 左(或右)邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$），则称 $f(x)$ 在点 x_0 左(或右)连续．

2. 间断点分类

(1)若 $f(x)$ 在 x_0 左、右极限存在，且 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$；或 $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$；或 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$，但 $f(x)$ 在 x_0 没有定义，都称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点．后两种情况又称为可去间断点．

(2)若 $f(x)$ 在点 x_0 左、右极限至少一个不存在，则称 x_0 为 $f(x)$ 的第二类间断点．

3. 连续函数的运算

(1)若 $f(x)$、$g(x)$ 都在 x_0 处连续，则

$f(x)\pm g(x)$、$f(x)g(x)$、$\frac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$ 在 x_0 都连续．

(2)若 $\varphi(x)$ 在 x_0 处连续，$f(u)$ 在 $u_0=\varphi(x_0)$ 连续、则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 也连续．

4. 闭区间上连续函数的性质

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么

(1)$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界；

(2)$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大和最小值；

(3)如果 μ 是介于 $f(a)$、$f(b)$（$f(a)\neq f(b)$）间的任何一个数，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=\mu$；

(4)若 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$；

(5)$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续．

四、常见题型与例题分析

例 1　用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})=0$.

[分析]　从数列极限的"$\varepsilon-N$"定义，可知欲证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})=0$，只需证

$\forall\ \varepsilon>0$，总$\exists\ N$，使得当 $n>N$ 时，恒有

$$\left|\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})\right|<\varepsilon \text{ 成立}.$$

$|\frac{1}{n}|<\varepsilon.$

但这只要注意，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，知必存在 N_1（譬如 $N_1=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1$），使 $n>N_1$ 时，总有 $0<\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$成立，于是当 $n>N_1$ 时，亦有

$$\begin{aligned}
&0<\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})\\
&=\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N_1})+\frac{1}{n}(\frac{1}{N_1+1}+\frac{1}{N_1+2}+\cdots+\frac{1}{n})\\
&\leqslant\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N_1})+\frac{1}{n}(n-N_1)\frac{\varepsilon}{2}\\
&\leqslant\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N_1})+\frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

又因 N_1 已取定，故可设 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N_1}=C$（常数），于是$\forall\ \varepsilon>0$，又必存在 N_2，使当 $n>N_2$ 时有

$$\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2C}\text{ 成立},$$

于是只要取 $N=max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，必有

$$0<\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})$$

$\leqslant\frac{\varepsilon}{2C}\cdot C+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

成立，即证得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})=0.$

证 $\forall\ \varepsilon>0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，知存在 N_1，使得当 $n>N_1$ 时，总有

$$0<\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$$

成立，设 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N_1}=C$，$\forall\ \varepsilon>0$，又存在 N_2，使得当 $n>N_2$ 时，总有

$$\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2C}$$

成立，于是，只要取 $N=max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时便有

$$0<\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})$$

$$=\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N_1})+\frac{1}{n}(\frac{1}{N_1+1}+\frac{1}{N_1+2}+\cdots+\frac{1}{n})$$

$$<\frac{\varepsilon}{2C}\cdot C+\frac{1}{n}\frac{\varepsilon}{2}(n-N_1)<\varepsilon$$

成立，即得证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})=0$.

例 2 用定义证明 $\lim\limits_{x\to 3}x^2=9$

[分析] 由定义，$\forall\ \varepsilon>0$，要找 $\delta>0$，使得当 $0<|x-3|<\delta$ 时，有 $|x^2-9|<\varepsilon$.

为找 $\delta>0$，要从最后的不等式中解出 $|x-3|$. 因为 $|x^2-9|=|x+3||x-3|$，将其中的 $|x+3|$ 用数代替，为此可设 $|x-3|<1$(因为 $x\to 3$)，即 $-1<x-3<1$，于是 $5<x+3<7$，由此得 $|x+3|<7$，这样就可以找到 δ.

证明 不妨设 $|x-3|<1$. 因为

$$|x^2-9|=|x+3||x-3|<7|x-3|$$

$\forall\ \epsilon>0$，要使 $|x^2-9|<\epsilon$，只要 $7|x-3|<\epsilon$，即只要 $|x-3|<\frac{\epsilon}{7}$，故可取 $\delta=min\{\frac{\epsilon}{7},1\}$，当 $0<|x-3|<\delta$ 时，就有 $|x^2-9|<\epsilon$，这就证明了 $\lim\limits_{x\to 3}x^2=9$

例 3 已知 $x_1=1,x_2=1+\frac{x_1}{x_1+1},\cdots,x_n=1+\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+1},\cdots$，证明数列 x_n 收敛，并求出此数列的极限 .

解 因 $x_2-x_1=\frac{x_1}{x_1+1}=\frac{1}{2}$，即 $x_2>x_1$，假设 $x_n>x_{n-1}$，则有 $x_{n+1}-x_n=1+\frac{x_n}{x_n+1}-(1+\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+1})=\frac{x_n}{x_n+1}-\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+1}=\frac{x_n-x_{n-1}}{(x_n+1)(x_{n-1}+1)}>0$，故数列 x_n 是单调增加的 .

又 $x_n=1+\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+1}=2-\frac{1}{x_{n-1}+1}<2,n=2,3\cdots$，故数列 x_n 又是有界的，根据单调有界原理，知 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在，设为 A. 对 $x_n=1+\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+1}$ 的两边取极限，得 $A=1+\frac{A}{A+1}$ 解之得 $A=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，舍去负值，知 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

例 4 已知数列 $a_1=\sqrt{2},a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},a_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$. $\cdots,a_n=\sqrt{2+a_{n-1}},\cdots$，证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 存在，并求之 .

证 用数学归纳法先证 $a_n<2$，当 $n=1$ 时显然 $a_1=\sqrt{2}<2$. 假设 $n=k$ 时结论成立，即 $a_k<2$，那么当 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}<\sqrt{2+2}=2$. 所以$\forall\ n\in N,a_n<2$.

再证，a_n 单调增加 .

$$a_{n+1}-a_n=\sqrt{2+a_n}-a_n=\frac{2+a_n-a_n^2}{\sqrt{2+a_n}+a_n}=\frac{(2-a_n)(a_n+1)}{\sqrt{2+a_n}+a_n}>0.$$

这样 $\{a_n\}$ 为有界的单调增加数列，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在 .

令 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$. 由 $a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$，有 $a_n^2=2+a_{n-1}$. 所以

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^2 = \lim_{n\to+\infty}(2+a_{n-1}),$$

即 $A^2=2+A$,解得 $A=2, A=-1$(舍去),故 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=2$.

注:求数列的极限分两步:①先用数学归纳法证明数列单调有界,从而数列有极限;②设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\beta$,对给定 x_n 的递推公式两端取极限,表达式变为 β 的代数方程,最后解出 β.

例 5 求下列各极限

① $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \dfrac{x^n\sin^3 x}{1+\sin^3 x}dx$

② $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+10^n}$;

③ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\dfrac{5^n+3}{n}}$;

解 ①当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时(积分不容易计算)

$$0\leqslant\frac{x^n\sin^3 x}{1+\sin^3 x}\leqslant x^n \text{ 故 } 0\leqslant\int_0^1\frac{x^n\sin^3 x}{1+\sin^3 x}dx\leqslant\int_0^1 x^n dx=\frac{x^n}{n+1}\Bigg|_0^1=\frac{1}{n+1}$$

因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} 0=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\dfrac{x^n\sin^3 x}{1+\sin^3 x}dx=0$

②因为 $10=\sqrt[n]{10^n}<\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+10^n}<\sqrt[n]{10\times10^n}=\sqrt[n]{10^n}$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{10^n}=1$,所以由夹逼定理知

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+10^n}=10$$

③由于

$$\frac{5}{\sqrt[n]{n}}=\sqrt[n]{\frac{5^n}{n}}<\sqrt[n]{\frac{5^n+3}{n}}<\sqrt[n]{\frac{5^n+5^n}{n}}=\sqrt[n]{\frac{2\times5^n}{n}}=5\,\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{n}}$$

而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2}=1$,故根据夹逼定理知

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{5^n+3}{n}}=5.$$

例 6 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}$.

[**分析**] 记

$$x_n=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n},$$

这时 $0<x_{n+1}<x_n$,故知 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=A\geqslant0$. 若由

$$x_{n+1}=\frac{2n+1}{2n+2}x_n$$

取极限,则有 $A=1\cdot A$,可见难以由此求得 A 之值. 为求得 A,我们引进另一数列

$$y_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{(2n+1)}.$$

显然有 $0<x_n<y_n$,又因 $x_n>0$,故亦有

$$0<x_n^2<x_y y_n=\frac{1}{2n+1},$$

亦即

$$0<x_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

由夹逼准则,便知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

解 引进 $y_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{(2n+1)}$,则有 $0<x_n<y_n$ 和

$$0<x_n^2<x_ny_n=\frac{1}{2n+1},$$

即

$$0<x_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$,从而由夹逼准则,证得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}=0.$$

例 7 求 $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n^2+1)^{1/2}}+\cdots+\frac{1}{(n^n+1)^{1/n}}]$

解 令 $f(x)=\frac{1}{(n^x+1)^{1/x}}$,则 $lnf(x)=\frac{-1}{x}ln(n^x+1)$,两边对 x 求导,得 $f'(x)=f(x)[\frac{1}{x^2}ln(n^x+1)-\frac{1}{x}\frac{n^xlnn}{n^x+1}]>f(x)\cdot[\frac{1}{x^2}lnn^x-\frac{1}{x}lnn]=0$,因此 $f(x)$ 是单调增函数,从而有

$$\frac{n}{n+1}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n^2+1)^{1/2}}+\cdots+\frac{1}{(n^n+1)^{1/n}}<\frac{n}{(n^n+1)^{1/n}}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(n^n+1)^{1/n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n^n})^{1/n}}=1$,故由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n^2+1)^{1/2}}+\cdots+\frac{1}{(n^n+1)^{1/n}}]=1$.

例 8 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(cos\sqrt{x+1}-cos\sqrt{x})$

解 $cos\sqrt{x+1}-cos\sqrt{x}=-2sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\cdot sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$,

因为 $|-2sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}|\leqslant2$,有界,

而 $0\leqslant|sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}|<|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}|=\frac{1}{2(\sqrt{x+1})+\sqrt{x})}\to0$ 当$(x\to+\infty)$,

故 $\lim\limits_{x\to\infty}sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=0$,故是无穷小量.

因此,$\lim\limits_{x\to\infty}(cos\sqrt{x+1}-cos\sqrt{x})=0$

例 9 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3x+2}{3x-2})^{4x+1}$.

解 令 $t=3x-2$,则 $x=\frac{1}{3}(t+2)$. 所以

原式$=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{4}{t})^{\frac{4}{3}(t+2)+1}=\lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{4}{t})^{\frac{4}{3}t}(1+\frac{4}{t})^{\frac{11}{3}}]$

$$=\lim_{t\to\infty}\{[(1+\frac{4}{t})^{t}]^{\frac{4}{3}}(1+\frac{4}{t})^{\frac{11}{3}}\}=(e^{4})^{\frac{4}{3}}=e^{\frac{16}{3}}.$$

例 10 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$.

解 这是 1^{∞} 型，令 $y=(tgx)^{tg2x}$，则 $lny=tg\ 2x\ ln\ tgx$. 而

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}tg\ 2x\ ln\ tgx=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{ln\ tgx}{ctg\ 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{ctgx\ sec^{2}x}{-2csc^{2}2x}$$

$$=-\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}sin\ 2x=-1,$$

故原式 $=e^{-1}$.

例 11 求极限 $\lim\limits_{x\to0^{+}}(ln\frac{1}{x})^{x}$.

解 这是 ∞^{0} 型，令 $y=(ln\frac{1}{x})^{x}$，$lny=xln\ ln\frac{1}{x}$，而

$$\lim_{x\to0^{+}}xln\ ln\frac{1}{x}=\lim_{x\to0^{+}}xln\ (-lnx)$$

$$=\lim_{x\to0^{+}}\frac{ln(-lnx)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^{+}}\frac{\frac{1}{-lnx}\cdot(-\frac{1}{x})}{-\frac{1}{x^{2}}}$$

$$=\lim_{x\to0^{+}}x\cdot\frac{1}{-lnx}=0.$$

故原式 $=e^{0}=1$.

例 12 求① $\lim\limits_{x\to0^{+}}x^{x}$；② $\lim\limits_{x\to0^{+}}x^{x^{x}-1}$.

$\lim\limits_{x\to0^{+}}x^{x}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^{+}}xlnx=0$

解 ①令 $y=x^{x}$，则 $lny=xlnx$，

$$\lim_{x\to0^{+}}xlnx=\lim_{x\to0^{+}}\frac{lnx}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^{+}}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^{2}}}=0.$$

$\therefore\lim\limits_{x\to0^{+}}x^{x}=e^{0}=1.$

②令 $y=x^{x^{x}-1}$，则

$$lny=(x^{x}-1)lnx,\qquad(1)$$

$$(x^{x}-1)lnx=(e^{xlnx}-1)lnx=\frac{e^{xlnx}-1}{xlnx}(xln^{2}x).\qquad(2)$$

$$\lim_{x\to0^{+}}\frac{e^{xlnx-1}}{xlnx}=\lim_{x\to0^{+}}\frac{e^{xlnx}(lnx+1)}{lnx+1}=\lim_{x\to0^{+}}x^{x}=1,$$

$$\lim_{x\to0^{+}}xln^{2}x=\lim_{x\to0^{+}}\frac{ln^{2}x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^{+}}\frac{\frac{2}{x}lnx}{-\frac{1}{x^{2}}}=-2\lim_{x\to0^{+}}xlnx=0.$$

将它们代入(2)式，$\lim\limits_{x\to0^{+}}(x^{x}-1)lnx=1\cdot0=0$. 再由(1)式，

$$\lim_{x\to0^{+}}x^{x^{x}-1}=e^{0}=1.$$

例 13 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^{2}}-1-x^{2}}{1-cosx}$（“$\frac{0}{0}$”型）