重庆出版社
科学学术著作出版基金资助

张石生 著

重庆出版集团 重庆出版社

变分不等式
及其相关问题

重庆出版社
科学学术著作出版基金资助

变分不等式
及其相关问题

张石生 著

BIANFEN
BUDENGSHI
JIQI XIANGGUAN
WENTI

重庆出版集团 重庆出版社

图书在版编目(CIP)数据

变分不等式及其相关问题 / 张石生著. —重庆：重庆出版社，2008.6

ISBN 978-7-5366-9608-2

Ⅰ.变… Ⅱ.张… Ⅲ.变分不等方程 Ⅳ.0176

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 046408 号

变分不等式及其相关问题

BIANFENBUDENGSHI JIQI XIANGGUAN WENTI

张石生 著

出 版 人:罗小卫

责任编辑:赵 剑

装帧设计:重庆出版集团艺术设计有限公司·钟丹珂

重庆出版集团
重 庆 出 版 社 **出版**

重庆长江二路 205 号 邮政编码:400016 http://www.cqph.com

重庆出版集团艺术设计有限公司制版

重庆市开源印务有限公司印刷

重庆出版集团图书发行有限公司发行

E-MAIL:fxchu@cqph.com 邮购电话:023-68809452

全国新华书店经销

开本:787mm×1 092mm 1/16 印张:20.5 字数:362 千

版次:2008 年 6 月第 1 版 印次:2008 年 6 月第 1 次印刷

印数:1~3000

ISBN 978-7-5366-9608-2

定价:36.00 元

如有印装质量问题，请向本集团图书发行有限公司调换:023-68809955 转 8005

前　言

变分不等式及与其相关的 KKM 理论、Ky Fan 极大极小不等式理论和相补问题理论是当今非线性分析的重要组成部分. 它与力学、微分方程、控制理论、数学经济、最优化理论、对策理论、非线性规划等理论和应用学科有着广泛的联系并有重要的应用.

自 20 世纪 60 年代，Lions, Browder, Stampacchia, Ky Fan, Lemke, Cottle, Dantzig 等人提出和创立变分不等式和相补问题的基本理论以来，经过许多数学家的杰出工作，变分不等式及其相关问题的理论及应用取得重要进展，日臻完善，已成为一门内容十分丰富并有广阔应用前景的重要的边缘性学科.

1991 年，上海科技文献出版社曾出版过作者的一本专著《变分不等式和相补问题理论及应用》. 由于该书出版较久，部分内容已显陈旧，加之该书出版时，印数不多，这些年来国内许多学校给研究生讲授该课程时，均复印该书作教材，质低价昂而且读起来也不方便. 因此不少读者来函，希望我新写一本变分不等式理论的专著以飨读者.

本书的目的是介绍变分不等式及与其相关的 KKM 理论、Ky Fan 极大极小不等式理论和相补问题的基本理论、基本方法，及其近期发展概况和待解决的问题. 在选材上注重理论的系统性和科学性，把散见于国内外重要刊物上有关的最新成果，其中包括作者本人近年来所发表的大量结果，经过加工整理，系统地向读者介绍.

作者对王梓坤院士表示衷心感谢. 感谢他对作者写作本书所给予的热情支持和鼓励.

作者还要感谢“重庆出版社科学学术著作出版基金”的资助. 没有出版基金的资助本书是难于出版的.

由于作者水平有限，尽管已尽力而为，书中难免还有许多缺点和错误，敬请读者不吝批评和指正.

作　者
2007 年 10 月

目　录

第一章　引言及预备知识

本章包含两部分内容.在前一部分(§1.1,§1.2)中,给出变分不等式和相补问题的概念和一些例子;在后一部分(§1.3—§1.6)中,介绍非线性分析的某些概念和结果,这些概念和结果在本书中将常被引用.

§1.1　变分不等式的概念和例子

设 E 是一拓扑空间,X 是 E 中之一非空子集,$f:X\to\overline{\mathbf{R}}:=(-\infty,+\infty]$ 是一泛函,且 $f\neq+\infty$.设 $\varphi:X\times X\to\mathbf{R}$ 是一实泛函且 $\varphi(x,x)\geqslant 0$,$\forall x\in X$.下面的关于 $x\in X$ 的无穷不等方程组:

$$\varphi(x,y)\geqslant f(x)-f(y),\ \forall y\in X \tag{1.1.1}$$

称为**变分不等式**(或称**变分不等方程**).如果存在 $\bar{x}\in X$ 满足(1.1.1),则 $\bar{x}$ 称为变分不等式(1.1.1)的**解**.

我们通常所说的变分不等式理论的基本内容,就是研究各种类型的变分不等式解的存在性、唯一性条件,解(或解集)的性状及解的逼近,及在各种实际问题中的应用.

下面我们列举变分不等式的某些例子.

例 1.1.1. 设 K 是 $\mathbf{R}^n$ 中之一有界闭凸集,$B:K\to\mathbf{R}^n$ 是一连续映象.求 $u\in K$ 使得

$$\langle B(u),v-u\rangle\geqslant 0,\ \forall v\in K. \tag{1.1.2}$$

这一类变分不等式称为 **Hartman-Stampacchia 变分不等式**.它是 Hartman,Stampacchia 在创立变分不等式理论时,所研究的第一个变分不等式[124].这一变分不等式与最优化理论和微分方程联系紧密.近年来,这一变分不等式已被多方面推广.

例 1.1.2. 设 E 是一局部凸的 Hausdorff 拓扑向量空间,K 是 E 之一紧凸子集,$T:K\to E^*$ 是一连续映象,其中 E^* 是 E 的对偶空间.求 $u\in K$ 使得

$$\langle T(u),v-u\rangle\geqslant 0,\ \forall v\in K. \tag{1.1.3}$$

其中$\langle\cdot,\cdot\rangle$是 E 与 E^* 间的配对.

这一类变分不等式称为 **Browder 变分不等式**. 它首先由 Browder 研究[25]. 这一变分不等式也可视为 Hartman-Stampacchia 变分不等式的改进和推广.

例 1.1.3. 设 H 是一实 Hilbert 空间, $f\in H$ 是一给定的点, $a(\cdot,\cdot)$ 是一双线性的连续泛函, $j:H\to\mathbf{R}$ 是一给定的泛函. 求 $u\in H$ 满足

$$a(u,v-u)+j(v)-j(u)\geqslant\langle f,v-u\rangle,\ \forall v\in H. \tag{1.1.4}$$

这一类变分不等式称为 **Lions-Stampacchia 变分不等式**, 有时也称为**椭圆型变分不等式**. 它首先由 Lions-Stampacchia 提出和研究[187]. 偏微分方程中的许多自由边值问题和许多具单侧约束的定常力学和物理问题, 都可归结为此类变分不等式的研究[100].

例 1.1.4. 设 H 是一实 Hilbert 空间, V 是一自反 Banach 空间, $\|\cdot\|$ 是 V 中的范数且 $V\subset H\subset V^*$. 记

$$L^p(0,T;V)=\left\{u:[0,T]\to V:\int_0^T\|u(t)\|^p\mathrm{d}t<\infty\right\}.$$

设 $\varphi:L^p(0,T;V)\to(-\infty,+\infty]$ 是一函数且 $\varphi\not\equiv+\infty$. 记

$$D(\varphi)=\{u\in L^p(0,T;V):\varphi(u)<\infty\}.$$

并由下式定义一映象:

$$\Phi(u)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^T\varphi(u(t))\mathrm{d}t, & \text{如果 } \varphi(u)\in L^1(0,T;R),\\ +\infty, & \text{否则}.\end{cases}$$

其中 $u\in L^p(0,T;V)$. 设 $A:D(\Phi)\to L^q(0,T;V)$, 其中 $p^{-1}+q^{-1}=1$. 求 $u\in D(\Phi)$ 满足

$$\begin{cases}\left\langle\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+A(u),v-u\right\rangle+\varphi(v)-\varphi(u)\geqslant\langle f,v-u\rangle\\ \qquad\qquad\forall v\in D(\varphi),\ a.e.\ t\in(0,T)\\ u(0)=u_0.\end{cases} \tag{1.1.5}$$

这一类变分不等式称为**抛物型变分不等式**. 诸如 Stefan 问题和渗流中的某些问题均可引导到这类变分不等式问题的研究.

例 1.1.5. 设 S 和 C 分别是 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{R}^m$ 中的子集, 设 $T:S\to2^S$ 是一多值映象, $M:S\times C\to\mathbf{R}^n$ 和 $\eta:S\times S\to\mathbf{R}^n$ 是二单值映象. 求 $x^*\in S$, $y^*\in T(x^*)$ 使得

$$\langle M(x^*,y^*),\eta(x,x^*)\rangle\geqslant0,\ \forall x\in S. \tag{1.1.6}$$

这一类变分不等式称为**似-变分不等式**. 它首先由 Parida-Sen[229] 提出和研究, 并与凸数学规划中的某些问题紧密相关.

例 1.1.6. 设 E 是一局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间，F 是一 Fréchet 空间. 设 X 和 C 分别是 E 和 F 的子集，$T:X\to 2^C$，$S:X\to 2^X$ 是多值映象，$\varphi:X\times C\times X\to\mathbf{R}$ 是一函数，满足条件 $\varphi(x,y,x)\geqslant 0$，$\forall x,y\in X$. 求 $x^*\in S(x^*)$，$y^*\in T(x^*)$，使得

$$\varphi(x^*,y^*,x)\geqslant 0,\ \forall x\in S(x^*). \tag{1.1.7}$$

这一类变分不等式称为**拟-似-变分不等式**. 它是似变分不等式的推广，而且紧密地与非线性规划及鞍点理论相联系. 它在 Chang 等[48,56]，Yao[301]，Wu[287,288]，Ding[90,91]，Lin 等[179]，Lin-Park[180]等中讨论过.

例 1.1.7. 设 E 是一实向量空间，X_0，X 是 E 的两个闭子集，$X_0\subset X$. 设 $g:X_0\times X\to(-\infty,+\infty]$是一泛函，使得对每一 $z\in X_0$，$g(z,\cdot)\not\equiv+\infty$，而 $\psi:X_0\times X\times X\to\mathbf{R}$ 是一泛函，使得对每一 $z\in X_0$，$\psi(z,x,x)\geqslant 0$，$\forall x\in X$. 求 $x^*\in X_0$ 使得

$$g(x^*,y)+\psi(x^*,x^*,y)\geqslant g(x^*,x^*),\ \forall y\in X. \tag{1.1.8}$$

这一类变分不等式称为**隐变分不等式**. 它最先由 Ky Fan[108]和 Mosco[204]提出和研究，以后 Wu-Yuan[292]进一步作了研究. 这类变分不等式与数学经济中的限制平衡问题紧密相关.

例 1.1.8. 设 H 是一 Hilbert 空间，$C(H)$是 H 中的非空紧集族. 设 $T,V:H\to C(H)$是二多值映象，$g:H\to H$ 是一单值映象. 设 $A(\cdot,\cdot):H\times H\to H$ 关于第一变量是一极大单调映象. 对给定的非线性映象 $N(\cdot,\cdot):H\times H\to H$，求 $u\in H$，$w\in T(u)$，$y\in V(u)$，使得

$$0\in N(w,y)+A(g(u),u). \tag{1.1.9}$$

这类问题称为**集值拟变分包含**. 它最先在 Noor[216,217]中引入和研究，后来在 Chang[36,38,41,45,46]中被推广到 Banach 空间. 这类变分包含是变分不等式的重要而有用的推广，它在力学、经济学和结构分析等领域有重要的应用.

例 1.1.9. 设 X,Y 是二实 Banach 空间，K 是 X 之一非空闭凸集，$T:K\to L(X,Y)$是一映象，其中 $L(X,Y)$是由 X 到 Y 的一切线性连续映象的集合. 设$\{C(x):x\in K\}$是 Y 中的一族闭的 $\operatorname{int}C(x)\neq\varnothing$ 的尖凸锥. 求 $u\in X$ 使得

$$\langle T(u),x-x_0\rangle\notin-\operatorname{int}C(u),\ \forall x\in K. \tag{1.1.10}$$

其中$\langle T(x),y\rangle$表线性映象 $T(x)$在 y 处的取值.

这一类变分不等式称为**向量变分不等式**. 它与向量值最优化理论紧密

相关.它首先在 Chen[71],Giannessi[111],Yao[299,300],Chen-Craven[74,75]中引入和研究.

例 1.1.10. 设 E 是一拓扑向量空间,X 是 E 中之一非空的紧凸集,E^* 是 E 的对偶空间,$\langle\cdot,\cdot\rangle$是 E 和 E^* 间的配对.设$(\Omega,\mathscr{A})$是一可测空间,$f:\Omega\times X\to E^*$.求一可测映象 $v:\Omega\to X$ 使得对任一$\omega\in\Omega$

$$\mathrm{Re}\langle f(\omega,v(\omega)),y-v(\omega)\rangle\geqslant 0,\ \forall y\in X. \tag{1.1.11}$$

这一类变分不等式称为**随机变分不等式**.它首先在 N. X. Tan[276],Tan-Yuan [273,274]及 Chang [31]中引入和研究.它与随机方程的求解和随机不动点理论紧密相关.

例 1.1.11. 设 E 是一局部凸的 Haussdorff 拓扑向量空间,X 是 E 之一非空的紧凸子集,$\mathscr{F}(E)$是 E 上的一族模糊集.设 $G:X\to\mathscr{F}(X)$和 $F:X\to\mathscr{F}(E^*)$是二模糊映象,而 $\alpha(x):X\to(0,1]$是一函数,$\beta\in(0,1]$是一数.求 $y_0\in X$,使得

$$G_{y_0}(y_0)\geqslant\alpha(y_0),\quad \mathrm{Re}\langle u,y_0-x\rangle\leqslant 0 \tag{1.1.12}$$

对一切 $u\in F_{y_0}(u)\geqslant\beta$ 及 $x\in G_{y_0}(x)\geqslant\alpha(y_0)$.

这一类变分不等式称为**模糊变分不等式**.它首先在 Chang-Zhu[69]中引入和研究,而且与模糊对策和模糊不动点理论紧密相关.

最后,应该指出:式子(1.1.1)是一类较为一般的变分不等式,它是许多类型的变分不等式的抽象表示.我们称之为**抽象的变分不等式**,它首先在 Gwinner[117]中引入和研究.

§1.2 导出变分不等式的问题和方法

由前节我们已看出:工程、力学、数学物理、控制论、优化理论、经济数学、微分方程等学科是引出变分不等式的源泉.在本节中,我们将通过几个典型的例子说明导出变分不等式的方法.

(Ⅰ)可微函数的极值问题

例 1.2.1. 设 $f\in C^1([a,b],\mathbf{R})$,求 $x_0\in[a,b]$,使得

$$f(x_0)=\min_{a\leqslant x\leqslant b}f(x). \tag{1.2.1}$$

由 Weierstrass 定理知,这样的 x_0 存在,且

(ⅰ) 当 $x_0\in(a,b)$ 时,$f'(x_0)=0$;

(ⅱ) 当 $x_0=a$ 时,$f'(x_0)\geqslant 0$;

(ⅲ) 当 $x_0=b$ 时,$f'(x_0)\leqslant 0$.

因而只要 $x_0\in[a,b]$,均有 $f'(x_0)(x-x_0)\geqslant 0,\forall x\in[a,b]$. 于是按 $\mathbf{R}$ 中的内积即得下面的变分不等式:

$$\langle f'(x_0),x-x_0\rangle\geqslant 0,\forall x\in[a,b], \tag{1.2.2}$$

而且 x_0 是变分不等式(1.2.2)的解.

例 1.2.2. 设 $u\in C^1([a,b])$, $\quad f(u)=\int_a^b|u'(x)|\mathrm{d}x.$

设 $K\subset C^1([a,b])$是由下式定义的集合:

$$K=\{u\in C^1([a,b]):u(a)=u(b)=0,\\ h_1(x)\leqslant u(x)\leqslant h_2(x),x\in[a,b]\},$$

其中 h_1 和 h_2 是二给定的函数. 显然,

$$h_1(a)\leqslant 0\leqslant h_2(a),\quad h_1(b)\leqslant 0\leqslant h_2(b).$$

设 $u_0\in K$,使得

$$f(u_0)=\min_{u\in K}f(u)=\min_{u\in K}\int_a^b|u'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

因 K 凸,故对任意的 $v\in K$, $\lambda u_0+(1-\lambda)v\in K,\forall\lambda\in[0,1]$. 现定义函数 $F:[0,1]\to\mathbf{R}$ 如下:

$$F(\lambda)=\int_a^b|(\lambda u_0+(1-\lambda)v)'|^2\mathrm{d}x.$$

故 $F(1)=\min\limits_{u\in K}f(u)$. 由例 1.2.1 知 $F'(1)(\lambda-1)\geqslant 0,\forall\lambda\in[0,1]$. 因而 $F'(1)\leqslant 0$, 故有

$$\begin{aligned}F'(1)&=F'(\lambda)|_{\lambda=1}\\&=\int_a^b 2(\lambda u_0'+(1-\lambda)v')(u_0'-v')\mathrm{d}x|_{\lambda=1}\\&=2\int_a^b u_0'(u_0'-v')\mathrm{d}x\leqslant 0,\forall v\in K.\end{aligned}$$

故得下面的变分不等式

$$\int_a^b u_0'(v'(x)-u_0'(x))\mathrm{d}x\geqslant 0,\forall v\in K. \tag{1.2.3}$$

例 1.2.3. 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中之一开集,求极小值

$$\min_{x\in K}\int_\Omega\sqrt{1+|\operatorname{grad}u|^2}\mathrm{d}x,\ u\in C^1(\overline{\Omega},\mathbf{R}), \tag{1.2.4}$$

其中 $K=\{u\in C^1(\overline{\Omega},\mathbf{R}):u(x)=0,\forall x\in\partial\Omega,\ \psi_1(x)\leqslant u(x)\leqslant\psi_2(x)\}$, 而 $\psi_i:\overline{\Omega}\to\mathbf{R}$, $i=1,2$ 是给定的函数. 如果 $u^*\in K$ 是(1.2.4)的极小点,仿例 1.2.2 可证 u^* 满足变分不等式:

$$\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\frac{u_{x_i}^*(v-u^*)_{x_i}}{(1+|\operatorname{grad}u^*|^2)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x\geqslant 0,\forall v\in K. \tag{1.2.5}$$

上面的例子表明,可微函数的极小化问题可导出变分不等式问题. 反之,如果这一可微函数还是凸的,则其逆结论也成立. 这由下面的命题得知.

命题 1.2.1. 设 E 是一实赋范空间, E^* 为 E 的对偶空间,$\langle\cdot,\cdot\rangle$表 E 和 E^* 间的配对. 设 K 是 E 之一凸子集,$f:E\to\mathbf{R}$ 是一 Gâteaux 可微的凸泛函,其微分 $Df:E\to E^*$ 定义为:

$$\langle Df(v),w\rangle=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(v+tw)|_{t=0},\quad w,v\in E.$$

则下列结论等价:

(i) $u\in K,f(u)=\min\limits_{v\in K}f(v)$;

(ii) $u\in K,\langle Df(u),v-u\rangle\geqslant 0,\ \forall v\in K$;

(iii) $u\in K,\langle Df(v),v-u\rangle\geqslant 0,\ \forall v\in K$.

证. (i)⇒(ii). 设 $u\in K$ 是 f 在 K 上的极小点, 则对任一 $v\in K$, 函数 $F(t)=f(u+t(v-u))$, $t\in[0,1]$在 $t=0$ 处取极小值,从而有

$$0\leqslant\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(u+t(v-u))|_{t=0}=\langle Df(u),v-u\rangle,\forall v\in K.$$

(ii)⇒(i). 对任意的 $w\in E$ 及任一 $t\in(0,1]$有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{t}[f(u+tw)-f(u)]\\&=\frac{1}{t}[f(t(u+w)+(1-t)u)-f(u)]\\&\leqslant\frac{1}{t}[tf(u+w)+(1-t)f(u)-f(u)]\\&=f(u+w)-f(u).\end{aligned}$$

于上式左端让 $t\to 0$ 即得

$$f(u+w)-f(u)\geqslant\langle Df(u),w\rangle,\forall w\in E.$$

对任一 $v\in K$, 取 $w=v-u$,代入即得

$$f(v)-f(u)\geqslant\langle Df(u),\ v-u\rangle,\forall v\in K. \tag{1.2.6}$$

因而结论(i)由(1.2.6)直接可得.

(ii)⇒(iii). 在(1.2.6)中交换 u 与 v 的位置得

$$f(u)-f(v)\geqslant\langle Df(v),u-v\rangle,\forall v\in K. \tag{1.2.7}$$

(1.2.6)与(1.2.7)两式相加即得

$$\langle Df(u)-Df(v),\ v-u\rangle\leqslant 0,\ \forall v\in K,$$

结论(ⅲ)得证.

(ⅲ)⇒(ⅱ). 于(ⅲ)中以 $u+t(v-u)$, $t\in[0,1]$代替 v,得

$$\langle Df(u+t(v-u)),v-u\rangle\geqslant 0,\ \forall v\in K.$$

由实轴上可微凸函数的性质知,上式左端在 $t=0$ 处右连续. 让 $t\to 0^+$,即得(ⅱ). 证毕.

(Ⅱ)不可微函数的极值问题

命题 1.2.2. 设 H 是一 Hilbert 空间, $a(\cdot,\cdot)$是 H 上之一对称的非负双线性型,即 $a(u,v)=a(v,u)$, $\forall u,v\in H$,且 $a(u,u)\geqslant 0$, $\forall u\in H$. 设 $j:H\to(-\infty,+\infty]$是一凸泛函且 $j\not\equiv+\infty$. 设 $f\in H$ 是一给定的泛函,令

$$J(v)=\frac{1}{2}a(v,v)+j(v)-\langle f,v\rangle,$$

则下列结论等价:

(ⅰ) $u\in H$,使得 $J(u)=\min\limits_{v\in H}J(v)$;

(ⅱ) $u\in H$ 是下面的变分不等式的解:

$$a(u,v-u)+j(v)-j(u)\geqslant\langle f,v-u\rangle,\ \forall v\in H. \tag{1.2.8}$$

证. (ⅰ)⇒(ⅱ). 设(ⅰ)成立,由 $J(u)$的极小性和 $a(\cdot,\cdot)$的对称双线性,故对任一 $v\in H$ 和任一 $t\in[0,1]$有

$$\begin{aligned}J(u)&=\frac{1}{2}a(u,u)+j(u)-\langle f,u\rangle\\&\leqslant J(u+t(v-u))\\&=\frac{1}{2}a(u+t(v-u),\ u+t(v-u))\\&\quad+j(u+t(v-u))-\langle f,\ u+t(v-u)\rangle\\&\leqslant\frac{1}{2}a(u,u)+\frac{t^2}{2}a(v-u,\ v-u)+ta(u,v-u)\\&\quad+j(u)+t(j(v)-j(u))-\langle f,u\rangle-t\langle f,v-u\rangle.\end{aligned}$$

化简后得

$$\frac{t}{2}a(v-u,v-u)+a(u,v-u)+j(v)-j(u)\geqslant\langle f,v-u\rangle.$$

让 $t\to 0$,结论(ⅱ)得证.

(ⅱ)⇒(ⅰ). 设 $u\in H$ 是变分不等式(1.2.8)的解,由

$$\frac{1}{2}[a(v,v)-a(u,u)]=\frac{1}{2}[a(u+v-u,u+v-u)-a(u,u)]$$

$$=a(u,v-u)+\frac{1}{2}a(v-u,v-u)$$

$$\geqslant a(u,v-u),\ \forall v\in H$$

及(1.2.8)知,对任一 $v\in H$ 有

$$\frac{1}{2}[a(v,v)-a(u,u)]+j(v)-j(u)-\langle f,v\rangle+\langle f,u\rangle\geqslant 0,$$

即 $J(v)\geqslant J(u)$, $\forall v\in H$. 故 u 是 J 在 H 上的极小点.　证毕.

(Ⅲ)Hilbert 空间上的投影问题

设 H 是一实 Hilbert 空间,K 是 H 之一非空闭凸集,$u\in H$ 是一给定的点. 如果存在 $z\in K$ 使得

$$\|z-u\|=\min_{v\in K}\|u-v\|, \tag{1.2.9}$$

则称 z 是 u 在 K 上的**投影**,记为 $z=P_K(u)$.

现定义一函数 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ 如下:

$$f(\lambda)=\langle\lambda z+(1-\lambda)v-u,\ \lambda z+(1-\lambda)v-u\rangle,\ \lambda\in[0,1],$$

其中 v 是 K 中任意给定的点. 由(1.2.9)知, f 在 $\lambda=1$ 处取得极小值. 于是由例 1.2.1 知,$f'(1)\leqslant 0$,故得

$$\langle z-u,\ v-z\rangle\geqslant 0,\ \forall v\in K, \tag{1.2.10}$$

即 $z=P_K(u)$是变分不等式(1.2.10)的解.

反之,如果 $z\in K$ 是变分不等式(1.2.10)的解,从而有

$$0\leqslant\langle z-u,v-z\rangle=\langle z-u,v-u-(z-u)\rangle$$

$$=\langle z-u,v-u\rangle-\|z-u\|^2.$$

因而得知 $\|z-u\|\leqslant\|v-u\|$, $\forall v\in K$, 即 $z=P_K(u)$.

另外,对任给的 $u_1,u_2\in H$,令 $z_i=P_K(u_i)$, $i=1,2$. 由(1.2.10)有

$$\langle z_1-u_1,v-z_1\rangle\geqslant 0,\quad \langle z_2-u_2,v-z_2\rangle\geqslant 0,\ \forall v\in K.$$

在前一式中取 $v=z_2$, 在后一式中取 $v=z_1$,相加得

$$\langle z_1-z_2,z_1-z_2\rangle\leqslant\langle u_1-u_2,z_1-z_2\rangle.$$

于是由 Schwarz 不等式知

$$\|P_K(u_1)-P_K(u_2)\|\leqslant\|u_1-u_2\|.$$

综上所述,即得下列结论.

命题 1.2.3. 设 H 是一实 Hilbert 空间, K 是 H 之一非空闭凸集,则下列结论成立:

(ⅰ) $z\in K$ 是 $u\in H$ 在 K 上的投影,当且仅当 z 是变分不等式(1.2.10)的解;

（ⅱ）由 H 到 K 上的投影映象 P_K 是非扩张的.

(Ⅳ)不动点问题

在本小节中我们介绍不动点问题与变分不等式的关系.我们先介绍一个一般性结果.

命题 1.2.4. 设 H 是一实 Hilbert 空间，K 是 H 之一非空闭凸集.

（ⅰ）如果 $T:K\to K$ 是一自映象，则 $u\in K$ 是 T 的不动点，当且仅当 u 是下面的变分不等式的解：

$$\langle (I-T)u, v-u\rangle \geq 0, \ \forall v\in K; \tag{1.2.11}$$

（ⅱ）如果 $T:K\to H$ 是一非自映象，而且对任一 $u\in K$，存在 $v\in K$ 和某一 $\lambda>0$，使得 $T(u)-u=\lambda(v-u)$，则 $u\in K$ 是 T 的不动点，当且仅当 u 是变分不等式(1.2.11)的解；

（ⅲ）如果 $T:K\to H$ 是一非自映象，则 $u\in K$ 是变分不等式

$$\langle T(u), v-u\rangle \geq 0, \ \forall v\in K \tag{1.2.12}$$

的解，当且仅当 u 为映象 $P_K(I-\rho T)$ 的不动点，其中 $\rho>0$ 是任意的正数，P_K 是 H 到 K 上的投影.

证. （ⅰ）必要性显然，现证充分性.

事实上，于(1.2.11)中取 $v=T(u)$，代入得

$$-\|u-T(u)\|^2\geq 0, \text{即 } u=T(u);$$

（ⅱ）只证充分性.设 $u\in K$ 是变分不等式(1.2.11)的解.由命题的条件，存在 $\bar{v}\in K$ 和某一 $\lambda>0$，使得 $T(u)-u=\lambda(\bar{v}-u)$.代入(1.2.11)，并在(1.2.11)中取 $v=\bar{v}$，化简得 $-\lambda\|\bar{v}-u\|^2\geq 0$，故 $\bar{v}=u$.于是 $u=T(u)$，结论得证.

（ⅲ）设 $u\in K$ 是变分不等式(1.2.12)的解，即

$$\langle T(u), v-u\rangle \geq 0, \ \forall v\in K,$$

从而有

$$\langle u-(u-\rho T(u)), v-u\rangle \geq 0, \ \forall v\in K, \ \rho>0.$$

由命题 1.2.3 得知

$$u=P_K(u-\rho T(u)),$$

即 u 是映象 $P_K(I-\rho T)$ 的不动点.

反之，设 $u=P_K(u-\rho T(u))$，于是有

$$\langle u-(u-\rho T(u)), v-u\rangle = \rho\langle T(u), v-u\rangle \geq 0, \ \forall v\in K.$$

故

$$\langle T(u), v-u\rangle \geq 0, \ \forall v\in K,$$

即 u 是变分不等式(1.2.12)的解.　证毕.

上面我们介绍了一类单值映象的不动点问题与一类变分不等式之间的关系.下面进一步介绍一类多值映象的不动点与一类隐变分不等式之间的关系.

设 E,X_0,X,g,ψ 与例 1.1.7 中的相同.对给定的 $z\in X_0$,定义两个映象 $f:X\to\mathbf{R}$, $\varphi:X\times X\to\mathbf{R}$ 如下:

$$f(x)=g(z,x),\ \varphi(x,y)=\psi(z,x,y).$$

如果对每一 $z\in X_0$,存在 $\bar{x}\in X_0$ 满足变分不等式:

$$\varphi(\bar{x},y)\geqslant f(\bar{x})-f(y),\ \forall\, y\in X. \tag{1.2.13}$$

记(1.2.13)的解集为 $S(z)$.于是我们定义了一个具非空值的集值映象 S:$X_0\to 2^{X_0}$,称之为**选择映象**.如果该选择映象 S 在 X_0 中有不动点 x_*,即 $x_*\in S(x_*)$,于是由 S 的定义知

$$\psi(x_*,x_*,y)\geqslant g(x_*,x_*)-g(x_*,y),\ \forall\, y\in X. \tag{1.2.14}$$

即 x_* 是隐变分不等式(1.1.8)的解.

反之,如果 $x_*\in X_0$ 是隐变分不等式(1.1.8)的解,显然 x_* 是 S 的不动点.

由上面的讨论可得下面的结论.

命题 1.2.5. 隐变分不等式(1.1.8)有解的充分必要条件是由其所定义的选择映象有不动点.

(Ⅴ)分布参数系统控制问题

(A)**由 Dirichlet 问题约束的系统的控制问题**

设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是一开集,Γ 为 Ω 的边界.设

$$a(\varphi,\psi)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\mathrm{d}x+\int_{\Omega}a_0\varphi\mathrm{d}x,\quad \varphi,\psi\in H_0^1(\Omega),$$

其中 $a_{ij},a_0\in L^\infty(\Omega)$,在 Ω 中几乎处处 $a_0(x)\geqslant\alpha$, $\alpha>0$,且

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant\alpha(\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2).$$

于是由下式定义的算子 A 是二阶椭圆算子:

$$A\varphi=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\right)+a_0\varphi,\quad \varphi\in H_0^1(\Omega). \tag{1.2.15}$$

设 $\mathscr{U}_{ad}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的闭凸集,称为**容许控制集**.给定 $u\in\mathscr{U}_{ad}$,Dirichlet 问题

$$\begin{cases}Ay(u)=f+u,\\ y(u)\in H_0^1(\Omega)\end{cases} \tag{1.2.16}$$

的解 $y(u)$ 称为由容许控制 u 所确定的状态.