新课标

丛书主编 凯歌

导学与评价

高中选修4-4 坐标系与参数方程

数学

北师大版

学生用书

XINKEBIAO

DAOXUEYUPINGJIA

星球地图出版社

新课标

丛书主编 凯歌

导学与评价

高中选修 4-4

数学

适用 北师大版

XINKEBIAO
DAOXUEYUPINGJIA

星球地图出版社

图书在版编目（CIP）数据

高中新课标导学与评价丛书：北师大版．数学．4-4：选修/
凯歌编．—北京：星球地图出版社，2008.1
ISBN 978-7-80212-639-8

Ⅰ.高… Ⅱ.凯… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 013510 号

丛书策划：金九州文化
责任编辑：张佩英

导 学 与 评 价

高 中　数 学 选修 4-4
DAOXUEYUPINGJIA
GAOZHONGSHUXUEXUANXIUSIGANGSI
丛书主编：凯 歌
****
星 球 地 图 出 版 社 出 版
（北京市北三环中路 69 号）
邮政编码：100088
网　　址：www.starmap.com.cn
星球地图出版社总发行
郑州文华印务有限公司
2007 年 12 月第 1 版　　2008 年 1 月第 1 次印刷
880×1230　16 开本　6.5 印张　318900 字
ISBN 978-7-80212-639-8
定价：10.80 元（书+检测题卷）
（如有印刷装订质量问题请与承印厂调换）
联系电话：010-62052349

主　编　曹仲会
编　者　侯元夕　　田宝运
　　　　张贵星　　刘福明

心愿

XIN YUAN
DAOXUE YU PINGJIA

国家基础教育课程改革已经全面启动，它给学科教材带来了实质性变革。自主、合作、探究、创新等新理念得到积极提倡和实行，教育、教学、考试也发生了重大变化，这引起全社会特别是教师和学生的广泛关注。为了帮助广大师生适应全新的课改理念，提高教育教学质量，我们由专家引领、一线教师执笔，特编写这套集新理念和新课标为一体、熔科学性与实用性为一炉的教辅丛书《导学与评价》。该丛书有以下特点：

1.最新的课改理念。丛书充分融入课改新理念和新课标要求，广泛汲取教育专家对课改的思想认识；着眼三维目标，注重人文、情感态度与价值观的渗透和融合；体现知识、能力、素质合一，方法、实践、创新一体。

2.全新的作者队伍。我们精心组织的所有作者全都来自新课标教材实验区，均为各地学科带头人，多为一线特高级教师；他们既有对新课标理念深刻的认识又有丰富的实际教育教学经验，他们用自己选择教辅、评判教辅的标准严格规范自己的写作。

3.科学的编排体例。丛书在体例设计时，充分遵循课改理念和吸收专家的教育智慧，充分考虑课堂教学的实际需要，注重学生自主学习和教师精要导学相结合，注重知识构建与能力提升相结合，注重素质培养、思维训练和考试能力相结合，从而达到科学性和实用性的完美统一。

【赢在起点】

总体解读章节或单元学习目标、重点难点和核心要求，概括说明，明确方向，激情导入，并提供教学方略。

【自主学习与知识构建】

学生自主梳理章节基础知识，整合知识结构，培养学生动手动脑的良好习惯，增强学生学习、思考的自觉性、积极性，并夯实基础。

【精要导学与方法策略】

阐述章节或单元重点知识、能力要点、思维体系，使学生立足基础，抓住关键，突破难点；精要讲解，言简意赅，重点突出，使学生准确把握核心内容，逾越思维障碍，走出思维误区；典型例题引导感悟，创设好题、新题，揭示思路方法和学习方略，讲练结合，学以致用，从而培养学生获取和解读信息、调动和运用知识、描述和阐释事物、论证和探讨问题的四维能力。

【迁移应用与探究创新】

针对重点知识和能力训练要求，精编习题，自练自查和探究创新相结合，梯度训练，循序渐进，以达到知识和能力的自然转化、过程和方法的有机统一、思维和素质的综合提升。

【回顾、思考、升华】

遵循系统性原理，整合、梳理章节知识，构建能力框架，把握规律；归纳专题考点，精选典型例题，充分体现基础能力和拓展综合要求；对近三年高考真题详尽解读，把握考查重点，明确能力发展方向。

4.新颖的成书模式。我们充分满足一线广大师生的需求，丛书各学科的“学生用书”将本章（单元）测试卷、综合测试卷独立成册，夹放在学科教辅书中，并提供“教师用书”，补充丰富的教学参考资料，方便老师们在教学过程中灵活使用。

编写一套师生满意的教辅资料是我们最大的心愿，为实现这个心愿，我们一直孜孜以求、精益求精。“精诚所至，金石为开”，我们这套教辅丛书，希望得到您的关注和厚爱！

《导学与评价》丛书编委会

星球地图出版社

二〇〇七年十二月

YUEDU SUOYIN

DAOXUE YU PINGJIA

阅读索引

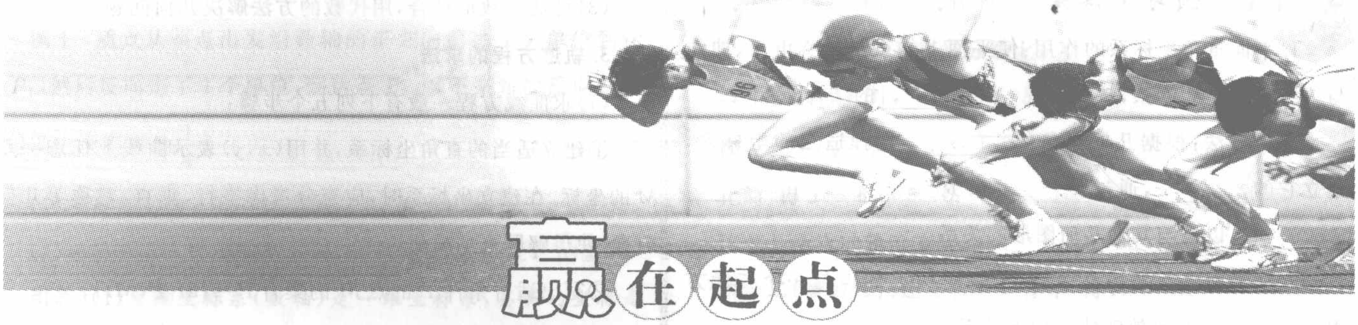
数学选修4-4(北师大版)

阅读索引 YUEDU SUOYIN

DAOXUE YU PINGJIA

第一章

坐标系



课程标准

• 知识与技能

1. 了解在平面直角坐标系伸缩变换作用下平面图形的变化情况.

2. 能在极坐标系中用极坐标表示点的位置，理解在极坐标系和平面直角坐标系中表示点的位置的区别，能进行极坐标和直角坐标的互化.

3. 能在极坐标系中给出简单图形的方程，理解用方程表示平面图形时选择适当坐标系的意义.

4. 了解柱坐标系、球坐标系中表示空间中点的位置的方法，并与空间直角坐标系中表示点的位置的方法相比较，了解它们的区别.

• 过程与方法

1. 通过本章的学习、研究，能在平面直角坐标系的基础上，加深对极坐标系、柱坐标系、球坐标系的领悟.

2. 经历概念的形成过程、解题的思维过程，体验数形结合的指导作用.

3. 经历用平面直角坐标系、极坐标系、柱坐标系、球坐标系求解简单几何问题的方法，让学生体验从不同角度解决几何问题.

• 情感、态度与价值观

1. 通过大量实例，体会用四种不同的坐标系在解决数学问题中的工具作用.

2. 通过本章的学习，逐步认识四种不同坐标系的科学价值、应用价值、文化价值，提高学习数学的兴趣，树立学好数学的信心.

专题探究

本部分内容是在前面学过直角坐标系的基础上的延伸和拓展，是解析几何的基础. 在解题过程中，选用适当的坐标系可以使建立的方程更加简单实用，这些在高考中会逐步体现.

本章内容主要包括：平面直角坐标系、极坐标系、柱坐标系和球坐标系三大节内容. 第一大节是平面直角坐标系，主要介绍了直角坐标系、坐标系的作用、坐标轴的伸缩变换. 第二大节是极坐标系，主要介绍了极坐标系的概念、点的极坐标与直角坐标的互化、直线和圆的极坐标方程、曲线的极坐标方程和直角坐标方程的互化、圆锥曲线统一的极坐标方程. 第三大节是柱坐标系和球坐标系，主要介绍了直角坐标系与柱坐标系和球坐标系的互化.

学法点津

1. 在学习过程中，要通过回顾在平面直角坐标系中刻画点的位置的方法，体会坐标系的作用.

2. 对于坐标系内容的学习，应着重理解平面和空间中点的位置都可以用有序数组(坐标)来刻画，在不同坐标系中具有不同的形式. 因此，选择恰当的坐标系可以使表示图形的方程具有更方便的形式.

3. 同学们要自己尝试建立坐标系，说明建系的原则，从而激励同学们的发散思维和创新思维，并通过实例体会这样建立坐标系有哪些方便之处.

4. 要通过比较图形在平面直角坐标系、极坐标系、柱坐标系和球坐标系中的方程，体会选择坐标系的意义和区别.

§1.1 平面直角坐标系

自主学习与知识构建

自主·预习·思考

1.平面直角坐标系的作用:使平面上的点与________、曲线与________建立联系,从而实现________的结合.

2.坐标法:根据几何对象的________,选择适当的坐标系,建立它的________,通过________研究________________以及与其他几何图形的关系.

3.在平面直角坐标系中,如果曲线 C 上的点与一个二元方程 $f(x,y)=0$ 的实数解建立如下关系:

(1)曲线 C 上的点的坐标都是________________________;

(2)以方程 $f(x,y)=0$ 的解为坐标的点都在____________________.

那么,方程 $f(x,y)=0$ 叫做____________________,曲线 C 叫做____________________的曲线.

4.平面直角坐标系中方程表示图形,那么平面图形的伸缩变换就可归结为____________伸缩变换,这就是用______研究________变换.

5.在同一坐标系中,将曲线 $y=3\sin 2x$ 变为曲线 $y'=\sin x'$ 的伸缩变换是(　　)

A. $\begin{cases}x=2x'\\ y=\frac{1}{3}y'\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x'=2x\\ y'=\frac{1}{3}y\end{cases}$

C. $\begin{cases}x=2x'\\ y=3y'\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x'=2x\\ y'=3y\end{cases}$

6.建立直角坐标系可以解决哪些问题,它是如何体现数学思想的?

精要导学与方法策略

要点·剖析·突破

1.平面直角坐标系

在平面上,当取定两条互相垂直的直线的交点为原点,并确定了度量单位和这两条直线的方向,就建立了平面直角坐标系.它使平面上任意一点 P 都可以由唯一的有序实数对 (x,y) 确定.

2.坐标系的作用

(1)坐标系是刻画点的位置与其变化的参照物.

我们知道,一条直线上的点的位置可以用一个实数来确定.在平面上的点的位置要用两个有序实数 (α,β) 来确定,空间中的点需用三个有序实数组 (α,β,γ) 来确定.

例如,我们买到电影票后,按照电影票上的座号就可准确地找到座位.雷达通过坐标可确定观察物体的方位和距离.

(2)可找到动点的轨迹方程,确定动点运动的轨迹(或范围).

(3)可通过数形结合,用代数的方法解决几何问题.

3.轨迹方程的求法

(1)求曲线方程一般有下列五个步骤:

①建立适当的直角坐标系,并用 (x,y) 表示曲线上任意一点 M 的坐标.在建立坐标系时,应充分考虑平行、垂直、对称等几何因素,使得解题更加简化;

②写出适合条件 P 的点 M 的集合 $P=\{M|P(M)\}$;

③用坐标表示条件 $P(M)$,写出方程 $f(x,y)=0$;

④化简方程 $f(x,y)=0$(必须是等价变形);

⑤证明以④中方程的解为坐标的点都在曲线上.

一般地,方程的变形过程是等价的,则步骤⑤可以省略.

(2)求曲线方程主要有以下三种方法:

①条件直译法:如果动点运动的规律就是一些几何量的等量关系,这些条件简单、明确,易于表达,我们可以把这些关系直译成含"x、y"(或 ρ、θ)的等式,我们称此为"直译".

②代入法(或利用相关点法):有时动点所满足的几何条件易求出,但它随另一动点的运动而运动,称之为相关点.如果相关点满足的条件简单、明确,就可以用动点坐标把相关的点的坐标表示出来,再用条件直译法把相关点的轨迹表示出来,就得到原动点的轨迹.

③参数法:有时很难直接找出动点的横、纵坐标之间的关系.可以借助中间参量(参数),使 x、y 之间的关系建立起联系,然后再从所求式子中消去参数,这便可得动点的轨迹方程.

(3)在掌握求曲线轨迹方程的一般步骤的基础上还要注意:

①选择适当的坐标系.坐标系如果选择得恰当,可使解题过程简化,减少计算量.

②要注意给出曲线图形的范围,要在限定范围的基础上求曲线方程.如果只求出曲线的方程,而没有根据题目要求,确定出 x、y 的取值范围的话,最后的结论是不完备的.

4.坐标法

(1)建立适当的坐标系,然后用代数的方法解决几何问题的方法叫做解析法.

(2)建立坐标系的几个基本原则:

①尽量把点和线段放在坐标轴上;

②对称中心一般放在原点;

③对称轴一般作为坐标轴.

(3)解析法解题步骤：

第一步：建立适当的坐标系，用坐标和方程表示问题中涉及的几何元素，将几何问题转化为代数问题；

第二步：通过代数运算，解决代数问题；

第三步：把代数运算的结果"翻译"成几何结论.

典题·引导·感悟

例 1 质点从原点出发沿数轴的正方向前进 4 个单位到达点 P_1，然后反向走了 1 个单位，到达点 P_2，接下来每次反向并向前运动上次距离的 $\frac{1}{4}$.

(1)求质点运动 n 次后到达的点 P_n 的坐标；

(2)如果质点无穷地运动下去，求 P_n 的极限位置 P 的坐标.

引导：(1)直线坐标系(数轴)是一维坐标系，其点的坐标是一个实数.

(2)此题质点的运动路径是构成以公比为 $-\frac{1}{4}$ 的等比数列.

解：(1)设点 P_n 的坐标为 x_n，

则 $x_n=x_1+\left(-\frac{1}{4}\right)x_1+\left(-\frac{1}{4}\right)^2x_1+\cdots+\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}x_1$

$=4\left[1+\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]$

$=4\dfrac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n}{1+\frac{1}{4}}=\frac{16}{5}\left[1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right]$.

故 P_n 的坐标为 $x_n=\frac{16}{5}\left[1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right]$.

(2)$\because \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{16}{5}\left[1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right]=\frac{16}{5}$，

$\therefore$ 如果质点无穷地运动下去，点 P_n 的极限位置 P 的坐标为 $\frac{16}{5}$.

练一练 已知 B 村位于 A 村的正西方向 1 公里处，原计划经过 B 村沿着北偏东 60°的方向埋设一条地下管线 m. 但在 A 村的西北方向 400 米处，发现一古代文物遗址 W. 根据初步勘察的结果，文物管理部门将遗址 W 周围 100 米范围划为禁区. 试问：埋设地下管线 m 的计划需要修改吗？

例 2 A 为定点，线段 BC 在定直线 l 上滑动. 已知 $|BC|=4$，A 到 l 的距离为 3，求△ABC 的外心的轨迹方程.

引导：根据题意建立合适的坐标系，再利用外心是边的垂直平分线的交点这一结论找到关系式.

解：**解法一(直接法)**：建立平面直角坐标系，使 x 轴与 l 重合，A 点在 y 轴上(如图1-1-1所示)，则 $A(0,3)$. 设外心 $P(x,y)$.

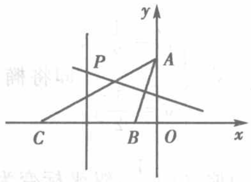


图 1-1-1

$\because$ P 在 BC 的垂直平分线上，

$\therefore$ $B(x+2,0)$，$C(x-2,0)$.

$\because$ P 也在 AB 的垂直平分线上，

$\therefore$ $|PA|=|PB|$，

即 $\sqrt{x^2+(y-3)^2}=\sqrt{2^2+y^2}$.

化简，得 $x^2-6y+5=0$.

这就是所求的轨迹方程.

解法二(参数法)：建立直角坐标系，得 $A(0,3)$.

设 BC 边的垂直平分线的方程为 $x=t$， ①

则点 B 的坐标为 $(t+2,0)$，于是 AB 的中点是 $\left(\frac{t+2}{2},\frac{3}{2}\right)$，从而 AB 的垂直平分线方程为

$y-\frac{3}{2}=\frac{t+2}{3}\left(x-\frac{t+2}{2}\right)$. ②

由①②式消去 t，得 $x^2-6y+5=0$，即为所求.

练一练 如图 1-1-2，圆 O_1 与圆 O_2 的半径都是 1，$|O_1O_2|=4$，过动点 P 分别作圆 O_1、O_2 的切线 PM、PN(M、N 分别为切点)，使得 $|PM|=\sqrt{2}|PN|$，试建立适当的坐标系，并求动点 P 的轨迹方程.

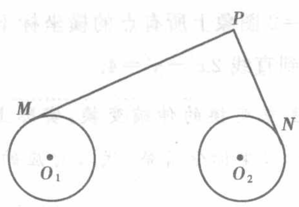


图 1-1-2

例 3 求满足下列图形变换的伸缩变换：由曲线 $4x^2+9y^2=36$ 变成曲线 $x'^2+y'^2=1$.

引导：由变换式 $\begin{cases}x'=\lambda\cdot x(\lambda>0)\\ y'=\mu\cdot y(\mu>0)\end{cases}$ 可求出伸缩变换.

解：设变换为 $\begin{cases}x'=\lambda x,\lambda>0,\\ y'=\mu y,\mu>0,\end{cases}$ 可将其代入第二个方程，得 $\lambda^2x^2+\mu^2y^2=1$. 与 $4x^2+9y^2=36$ 比较，将其变为 $\frac{4}{36}x^2+\frac{9}{36}y^2=$

1,即$\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{4}y^2=1$,比较系数得$\lambda=\frac{1}{3}$,$\mu=\frac{1}{2}$.

∴ $\begin{cases}x'=\frac{1}{3}x,\\ y'=\frac{1}{2}y,\end{cases}$ 即将椭圆$4x^2+9y^2=36$上的所有点横坐标变为原来的$\frac{1}{3}$,纵坐标变为原来的$\frac{1}{2}$,可得到圆

$x'^2+y'^2=1$.

点拨:求满足图形变换的伸缩变换,实际上是求出其变换公式,将新旧坐标分清,代入对应的直线方程,然后比较系数就可以了,椭圆伸缩变换之后可得圆或椭圆.

练一练 伸缩变换的坐标表达式为$\begin{cases}x'=x,\\ y'=4y.\end{cases}$曲线$C$在此变换下变为椭圆$x'^2+\frac{y'^2}{16}=1$.求曲线$C$的方程.

例4 在同一平面直角坐标系中,将直线$x-2y=2$变成直线$2x'-y'=4$,求满足图象变换的伸缩变换.

引导:由变换$\begin{cases}x'=\lambda x,(\lambda>0)\\ y'=\mu y(\mu>0)\end{cases}$可求得伸缩变换.

解:设变换为$\begin{cases}x'=\lambda x,\\ y'=\mu y\end{cases}$代入第二个方程,得$2\lambda x-\mu y=4$与$x-2y=2$比较,将其变成$2x-4y=4$,比较系数得$\lambda=1$,$\mu=4$.

∴ 伸缩变换公式为$\begin{cases}x'=x,\\ y'=4y.\end{cases}$

即直线$x-2y=2$图象上所有点的横坐标不变,纵坐标扩大到原来的4倍可得到直线$2x'-y'=4$.

点拨:求满足图象变换的伸缩变换,实际上是让我们求其变换公式,我们将新旧坐标分清楚,代入对应的直线方程,然后比较系数就可得到.

练一练 在平面直角坐标系中,求下列方程所对应的图形经过伸缩变换$\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x,\\ y'=\frac{1}{3}y\end{cases}$后的图形.

(1)$5x+2y=0$;

(2)$x^2+y^2=1$.

例5 设有半径为3 km的圆形村落,A、B两人同时从村落中心出发,B向北直行,A先向东直行,出村后不久,改变前进方向,沿着与村落周界相切的直线前进,后来恰与B相遇.设A、B两人速度一定,其速度比为3∶1,问两人在何处相遇?

引导:注意村落为圆形,且A、B两人同时从村落中心出发分别沿东、北方向运动,于是可设想以村落的中心为圆点,以开始时A、B的前进方向为x、y轴,建立直角坐标系,这就为建立解析几何模型创造了条件.

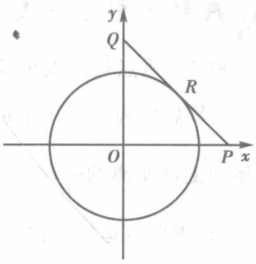


图 1-1-3

解:如图1-1-3建立平面直角坐标系,由题意可设A、B两人速度分别为$3v$千米/小时,v千米/小时,再设A出发x_0小时,在点P改变方向,又经过y_0小时,在点Q处与B相遇,则P、Q两点坐标为$(3vx_0,0)$,$(0,vx_0+vy_0)$.由$|OP|^2+|OQ|^2=|PQ|^2$可知,

$(3vx_0)^2+(vx_0+vy_0)^2=(3vy_0)^2$,

即$(x_0+y_0)(5x_0-4y_0)=0$.

∵ $x_0+y_0>0$,∴ $5x_0=4y_0$. ①

将①式代入$k_{PQ}=-\frac{x_0+y_0}{3x_0}$,得$k_{PQ}=-\frac{3}{4}$.

又已知PQ与圆O相切,直线PQ在y轴上的截距就是两人相遇的位置.

设直线$y=-\frac{3}{4}x+b$与圆O:$x^2+y^2=9$相切,则有$\frac{|4b|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$,∴ $b=\frac{15}{4}$.

答案:A、B两人的相遇点在离村中心正北$3\frac{3}{4}$千米处.

点拨:因为A、B两人速度一定,其速度比为3∶1,我们可以先把速度设出来.在这个问题中的关键是:路程之间的关系满足勾股定理,即可以建立一个关系式.另外,我们要注意掌握数形结合的思想方法.

练一练 在某海滨城市附近海面有一台风,据监测,当前台风中心位于城市O(如图1-1-4)的东偏南$\theta\left(\theta=\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}\right)$方向300 km的海面$P$处,并以20 km/h的速度向西偏北45°方向移动.台风侵袭的范围为圆形区域,当前半径为60 km,并以10 km/h的速度不断增大.问几小时后该城市开始受到台风的侵袭?

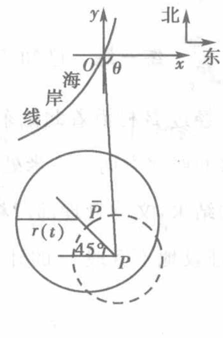


图 1-1-4

思维·误区·警示

平面伸缩变换的误区

(1)由 $y=\sin x$ 伸缩变换到 $y=\sin 2x$,横坐标是伸长到原来的 2 倍,还是缩小到原来的 $\frac{1}{2}$ 呢?将公式

$\begin{cases}x'=kx,\\ y'=y\end{cases}$ 代入 $y=\sin 2x$ 中,

将 $y=\sin 2kx$ 与 $y=\sin x$ 比较可得 $k=\frac{1}{2}$. 所以由 $y=\sin x$ 到 $y=\sin 2x$ 的伸缩变换是每个点的纵坐标不变,横坐标缩小到原来的 $\frac{1}{2}$. 这与得到函数解析式 $y=\sin 2x$ 的形式正好相反.

(2)因为伸缩变换把直线变成直线,所以伸缩变换把多边形变成边数一致的多边形;伸缩变换不能实现曲线与直线段的互变,例如它不能把圆变成正方形..

迁移应用与探究创新

自练·自查·自评

1. 在同一平面直角坐标系中,经过伸缩变换 $\begin{cases}x'=5x,\\ y'=3y\end{cases}$ 后,曲线 C 变为曲线 $x'^2+y'^2=0$,则曲线 C 的方程为 ( )

A. $25x^2+9y^2=0$　　B. $9x^2+25y^2=0$

C. $25x+9y=0$　　D. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=0$

2. □$ABCD$ 中三个顶点 A、B、C 的坐标分别是 $(-1,2)$、$(3,0)$、$(5,1)$,则 D 的坐标是 ( )

A. $(9,-1)$　　B. $(-3,1)$

C. $(1,3)$　　D. $(2,2)$

3. 把函数 $y=\sin 2x$ 的图象作怎样的变换能得到 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象 ( )

A. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$　　B. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$

C. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$　　D. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$

4. $\triangle ABC$ 中,若 BC 的长度为 4,中线 AD 的长为 3,则 A 点的轨迹方程是____________________.

5. 在平面直角坐标系中,求下列方程所对应的图形经过伸缩变换 $\begin{cases}x'=\frac{1}{3}x,\\ y'=\frac{1}{2}y\end{cases}$ 后的图形是什么形状?

(1) $y^2=2x$;

(2) $x^2+y^2=1$.

6. 在同一平面直角坐标系中,将曲线 $x^2-36y^2-8x+12=0$ 变成曲线 $x'^2-y'^2-4x'+3=0$,求满足条件的伸缩变换.

7. 已知圆的半径为 6,圆内一定点 P 离圆心的距离为 4,A、B 是圆上的两动点且满足 $\angle APB=90°$,求矩形 $APBQ$ 的顶点 Q 的轨迹方程.

实践·探究·创新

1. $\triangle ABC$ 中,$B(-2,0)$,$C(2,0)$,$\triangle ABC$ 的周长为 10,求 A 点的轨迹方程为____________________.

2. 有一种大型商品,A、B 两地都有销售,且价格相同. 某地居民从两地之一购得商品后,每千米回运的费用 A 地是 B 地的 3 倍. 已知 A、B 两地相距 10 km,顾客选 A 地或 B 地购买这件商品的标准是:运费和价格的总费用较低,求 A、B 两地的售货区域的分界线的曲线形状,并指出曲线上、曲线内、曲线外的居民应如何选择购买地点.

如图 1-1-6,以 A、B 所确定的直线为 x 轴,A、B 中点 O 为坐标原点,建立直角坐标系,则 $A(-5,0)$、$B(5,0)$. 设某地 P 的坐标为 (x,y),且 P 地居民选择 A 地购买商品较便宜,并设 A 地

的回运费为 $3a$ 元/千米,B 地的回运费为 a 元/千米.

3. 如图 1-1-5,某隧道设计为双向四车道,车道总宽 22 米,要求通行车辆限高 4.5 米,隧道全长 2.5 千米,隧道的拱线近似地看成半个椭圆形状.

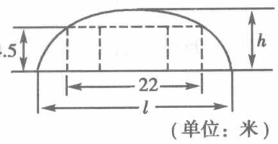


图 1-1-5

(1)若最大拱高 h 为 6 米,则隧道设计的拱宽 l 是多少?

(2)若最大拱高 h 不小于 6 米,则应如何设计拱高 h 和拱宽 l,才能使半个椭圆形隧道的土方工程量最小?(半个椭圆的面积公式为 $S=\frac{\pi}{4}lh$,柱体体积为底面积乘以高.本题结果精确到 0.1 米)

4. 通过平面直角坐标系中的平移与伸缩变换,可以把椭圆 $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$ 变为中心在原点的单位圆,求上述平移变换与伸缩变换,以及这两种变换的合成变换.

5. 如图 1-1-6,某城市中的高空观览车的高度是 100 m,在离观览车约 150 m 处有一建筑物,某人在离建筑物 100 m 的地方刚好可以看到观览车,你能根据上述数据求出该建筑物的高度吗?(人的高度不计,眼睛和高空观览车的最低点在同一水平线上,精确到 0.01 m)

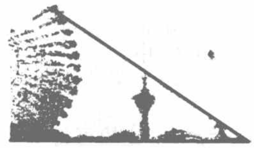


图 1-1-6

6. 平面内有一固定线段 AB,$|AB|=4$,动点 P 满足 $|PA|-|PB|=3$,O 为 AB 中点,求 $|OP|$ 的最小值.

7. 在同一平面直角坐标系中，经过伸缩变换 $\varphi:\begin{cases}x'=3x\\ y'=y\end{cases}$ 后，曲线 C 变为曲线 $x'^2-9y'^2=9$，求曲线 C 的方程，并画出图象.

8. 如图 1-1-7，已知点 $F(1,0)$，直线 $l:x=-1$，P 为平面上的动点，过 P 作直线 l 的垂线，垂足为点 Q，且 $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QF}=\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}$.

(1)求动点 P 的轨迹 C 的方程；

(2)过点 F 的直线交轨迹 C 于 A、B 两点，交直线 l 于点 M. 已知 $\overrightarrow{MA}=\lambda_1\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{MB}=\lambda_2\overrightarrow{BF}$，求 $\lambda_1+\lambda_2$ 的值.

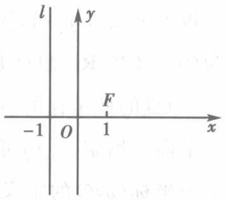


图 1-1-7

9. 过点 $P_1(1,5)$ 作一直线交 x 轴于点 A，过点 $P_2(2,7)$ 作直线 P_1A 的垂线，交 y 轴于点 B，点 M 在线段 AB 上，且 $BM:MA=1:2$，求动点 M 的轨迹方程.

10. 已知一条长为 6 的线段两端点 A、B 分别在 x、y 轴上滑动，点 M 在线段 AB 上，且 $AM:MB=1:2$，求动点 M 的轨迹方程.

11. 如图 1-1-8，已知 A、B、C 是直线 m 上的三点，且 $|AB|=|BC|=6$，$\odot O'$ 切直线 m 于点 A，又过 B、C 作 $\odot O'$ 异于 m 的两切线，切点分别为 D、E，设两切线交于点 P.

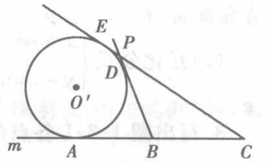


图 1-1-8

(1)求点 P 的轨迹方程；

(2)经过点 C 的直线 l 与点 P 的轨迹方程交于 M、N 两点，且点 C 分 $\overrightarrow{MN}$ 所成比等于 $2:3$，求直线 l 的方程.

自我评价

通过以上的学习，你肯定收获多多，或许也有一些疑惑，你能把它记在下面吗？

§1.2 极坐标系

1.2.1 极坐标系的概念

1.2.2 点的极坐标与直角坐标的互化

自主学习与知识构建

自主·预习·思考

1.极坐标系的概念

(1)极坐标系的建立:在平面内取一个定点O,叫做__________;自极点O引一条射线Ox,叫做__________;再选定一个__________、一个角度单位(通常取弧度)及其__________(通常取逆时针方向),这样就建立了一个极坐标系.

(2)极坐标系内点的极坐标的规定:对于平面上任意一点M,用ρ表示__________,用θ表示__________,ρ叫做点M的__________,θ叫做点M的__________,有序数对__________就叫做点M的极坐标,记作$M(\rho,\theta)$.

2.极坐标和直角坐标的互化

(1)互化的前提条件:①极坐标系中的极点与直角坐标系中的原点重合;②极轴与x轴的正半轴重合;③两种坐标系取相同的长度单位.

(2)互化公式$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta;\end{cases}$ $\begin{cases}\rho^2=x^2+y^2,\\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}(x\neq0).\end{cases}$

3.写出图1-2-1各点的极坐标($\rho>0,0\leqslant\theta<2\pi$)

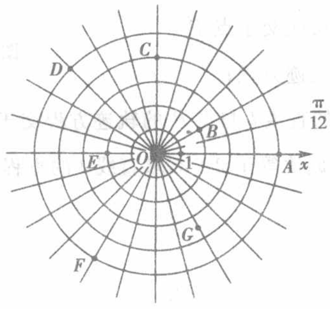


图1-2-1

4.平面内建立直角坐标系是人们公认的最容易接受并且被经常采用的方法,但为什么它并不是确定点的位置的唯一方法,为什么要使用极坐标?

精要导学与方法策略

要点·剖析·突破

1.极坐标的概念

(1)极坐标的思想:在日常生活中,我们说:"向东北走4里就到了";炮兵射击目标时,最好是知道目标的方位角和距离.这些事例启发我们可以用长度和角度来确定平面内点的位置,这就是极坐标的思想.

(2)极坐标系的概念

如图1-2-2,在平面内取一个定点O,叫做极点;自极点引一条射线OX,叫做极轴;再选定一个长度单位、一个角度单位(通常取弧度)及其正方向(通常取逆时针方向),这样就建立了一个极坐标.

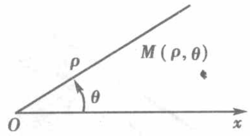


图1-2-2

(3)极坐标系的四要素

建立极坐标系的要素:①极点;②极轴;③长度单位;④角度单位和它的正方向.四者缺一不可.

(4)点的极坐标

设M是平面上任一点,ρ表示OM的长度,θ表示以射线OX为始边,射线OM为终边所成的角的角度.那么,有序数对(ρ,θ)称为点M的极坐标.显然,每一个有序实数对(ρ,θ)决定一个点的位置.其中,ρ称为点M的极径,θ称为点M的极角.

2.点的极坐标的不唯一性

(1)极点的极坐标

极点的极径$\rho=1$,极角θ可以是任何实数.所以极点的极坐标为$(0,\theta)(\theta\in\mathbf{R})$,也就是说极点有无数个极坐标.

(2)点的极坐标的多样性

平面上给定一点,可以写出这个点的无数多个极坐标.根据点的极坐标(ρ,θ)的定义,对于给定的点(ρ,θ)有无数个极坐标,可分为两类,一类为$(\rho,\theta+2k\pi)(k\in\mathbf{Z})$,另一类为$(-\rho,\theta+2k\pi+\pi)(k\in\mathbf{Z})$.

(3)点与坐标的对应关系

在极坐标(ρ,θ)中,一般限定$\rho\geqslant0$.当$\rho=0$时,就与极点重合,此时θ不确定.给定点的极坐标(ρ,θ)就唯一地确定了平面上的一个点.但是,平面上的一个点的极坐标并不是唯一的,它有无穷多种形式.由此可见,平面上的点与它的极坐标不是一一对应关系.这是极坐标与直角坐标的不同之处.如果限定$\rho\geqslant0,0\leqslant\theta<2\pi$,则除极点外平面上的点就与它的极坐标构成一一对应的关系.

3.已知极坐标描点和已知点求极坐标

(1)已知极坐标描点.

已知点的极坐标,一般地先找到极角,再根据极径来确定点的位置.要注意极坐标的顺序,前面是极径,后面是极角.例如已知点$A\left(1,\dfrac{\pi}{4}\right)$,$B\left(-2,\dfrac{\pi}{4}\right)$在极坐标系描出$A$、$B$两点.

解:A点的角为$\dfrac{\pi}{4}$,极径为1,我们很快就可以描出点A;

B点的描法有两种,一是先确定极角$\dfrac{\pi}{4}$,再延长其反向延长线两个单位可确定B点;二是先改写坐标的形式,即把$B\left(-2,\dfrac{\pi}{4}\right)$改写为$B\left(2,\dfrac{5\pi}{4}\right)$,再描点(如图1-2-3).

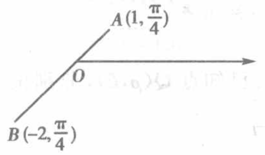


图 1-2-3

(2)已知点求极坐标.

已知点求它的极坐标,就是要找到它的极角和极径.

例如已知点 ρ 的直角坐标是$(\sqrt{3},-3)$,则它的极坐标是 $\underline{\left(2\sqrt{3},\frac{5\pi}{3}\right)}$$(\rho>0,0\leqslant\theta<2\pi)$或$\underline{\left(-2\sqrt{3},\frac{2\pi}{3}\right)}$$(\rho>0,0\leqslant\theta<2\pi)$.

解:以原点为极点,x 轴正方向为极轴.先求极角,再求极径.

(3)一般地,点(ρ,θ)关于极轴对称点是$(\rho,-\theta)$,关于过极点且垂直于极轴的直线的对称点是$(\rho,\pi-\theta)$,关于极点 O 的对称点是$(\rho,\pi+\theta)$.

4. 两点间的距离的计算

(1)两点间的距离公式

一般地,设 $A(\rho_1,\theta_1)$,$B(\rho_2,\theta_2)$,由余弦定理可得两点间的距离公式

$|AB|=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$.

(2)$\triangle AOB$ 的面积公式

$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|\rho_1\rho_2\sin(\theta_1-\theta_2)|$.

5. 极坐标与直角坐标的互化

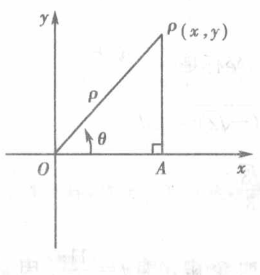


图 1-2-4

我们把极轴与平面直角坐标系 xOy 的 x 正半轴重合,且两种坐标系取相同的长度单位,设 $P(x,y)$是平面上的任一点,如图 1-2-4,则

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}\qquad ①$$

从①可得$$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2},\\\tan\theta=\frac{y}{x}(x\neq0)\end{cases}\qquad ②$$

①与②是平面直角坐标系与极坐标系中同一点的直角坐标(x,y)与极坐标(ρ,θ)之间的换算公式.

典题 · 引导 · 感悟

例 1 写出图 1-2-5 中 A、B、C、D、E、F、G 各点的极坐标$(\rho>0,0\leqslant\theta<2\pi)$.

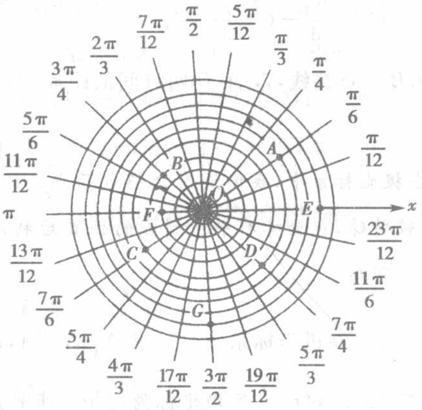


图 1-2-5

引导:对每个点我们先看它的极径长,再确定它的极角.

解:点的极坐标分别为:

$A\left(7,\frac{\pi}{6}\right)$,$B\left(4,\frac{3\pi}{4}\right)$,$C\left(5,\frac{7\pi}{6}\right)$,$D\left(6,\frac{7\pi}{4}\right)$,$E(9,0)$,$F(3,\pi)$,$G\left(9,\frac{3\pi}{2}\right)$.

点拨:(1)写点的极坐标要注意顺序:极径 ρ 在前,极角 θ 在后,不能把顺序搞错了.

(2)点的极坐标是不唯一的,但若限制 $\rho>0,0\leqslant\theta<2\pi$,则除极点外,点的极坐标是唯一确定的.

练一练 如图 1-2-6,在极坐标系中,写出点 A,B,C 的极坐标,并标出点 $D\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$,$E\left(4,\frac{5\pi}{6}\right)$,$F\left(2,\frac{5\pi}{3}\right)$所在的位置.

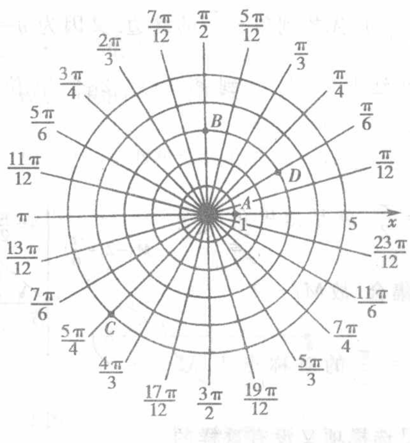


图 1-2-6

例 2 在极坐标中,已知两点 $A\left(3,-\frac{\pi}{3}\right)$、$B\left(1,\frac{2\pi}{3}\right)$,求 A、B 两点间的距离.

引导:数形结合,根据 A,O,B 的位置关系求解.

解:∵ $\angle AOB=\frac{2\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$,

∴ A,O,B 三点共线,∴ A、B 两点间的距离为 $|AB|=3+1=4$.

> **点拨**:在极坐标系中,我们没有介绍过两点间距离求法,但这两个点比较特殊,在坐标系中找到点的位置后利用数形结合的方法可求出距离.

练一练 在极坐标系中,(1)求 $A\left(5,\frac{7\pi}{36}\right)$,$B\left(12,\frac{43\pi}{36}\right)$ 两点间的距离;(2)已知点 P 的极坐标为 (ρ,θ),其中 $\rho=1$,$\theta\in\mathbf{R}$,求满足上述条件的点 P 的位置.

例 3 点 M 的极坐标是 $\left(-2,-\frac{\pi}{6}\right)$,它关于直线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的对称点坐标是 ( )

A. $\left(2,\frac{11\pi}{6}\right)$ B. $\left(-2,\frac{7\pi}{6}\right)$

C. $\left(2,-\frac{\pi}{6}\right)$ D. $\left(-2,-\frac{11\pi}{6}\right)$

引导:利用数形结合法求解.

解:当 $\rho<0$ 时,我们找它的极角应按反向延长线上去找.描点 $\left(-2,-\frac{\pi}{6}\right)$ 时,先找到角 $-\frac{\pi}{6}$ 的终边.又因为 $\rho=-2<0$,所以再沿反向延长线上找到离极点 2 个单位的点即是点 $\left(-2,-\frac{\pi}{6}\right)$.

直线 $\theta=\frac{\pi}{2}$,就是由极角为 $\frac{\pi}{2}$ 的那些点的集合.故 $M\left(-2,-\frac{\pi}{6}\right)$ 关于直线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的对称点为 $M'\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$,但是选择项又没有这样的坐标.又因为 $M'\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$ 的坐标还可以写成 $M'\left(-2,\frac{7\pi}{6}\right)$,故应选 B.

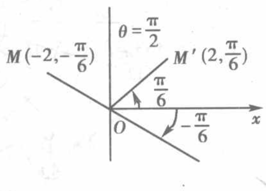


图 1-2-7

答案:B

> **点拨**:知道点的坐标,可先根据极角 θ 确定方向(射线),再根据 ρ 确定距离进而描出点.

练一练 1.已知点 $Q(\rho,\theta)$,分别按下列条件求出点 P 的极坐标.

(1)点 P 是点 Q 关于极点 O 的对称点;

(2)点 P 是点 Q 关于直线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的对称点.

2.在极坐标中,若等边△ABC 的两个顶点是 $A\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$,$B\left(2,\frac{5\pi}{4}\right)$,那么顶点 C 的坐标可能是 ( )

A. $\left(4,\frac{3\pi}{4}\right)$ B. $\left(2\sqrt{3},\frac{3\pi}{4}\right)$

C. $(2\sqrt{3},\pi)$ D. $(3,\pi)$

例 4 (1)把点 M 的极坐标 $\left(8,\frac{2\pi}{3}\right)$ 化成直角坐标;

(2)把点 P 的直角坐标 $(\sqrt{6},-\sqrt{2})$ 化成极坐标.($\rho>0,0\leqslant\theta<2\pi$)

引导:本题考查的是直角坐标与极坐标的互化公式的应用.

解:(1)$x=8\cos\frac{2\pi}{3}=-4$,

$y=8\sin\frac{2\pi}{3}=4\sqrt{3}$,

因此,点 M 的直角坐标是 $(-4,4\sqrt{3})$.

(2)$\rho=\sqrt{(\sqrt{6})^2+(-\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$,

$\tan\theta=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,

又因为点在第四象限,得 $\theta=\frac{11\pi}{6}$.因此,点 P 的极坐标为 $\left(2\sqrt{2},\frac{11\pi}{6}\right)$.

> **点拨**:由直角坐标化成极坐标时,算出 $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,仅根据 $0\leqslant\theta<2\pi$,只能得出 $\theta=\frac{5\pi}{6}\pi$ 或 $\theta=\frac{11\pi}{6}$,要确定极角,需再根据点所在象限.

练一练 1.将下列各点的极坐标化为直角坐标:

(1)$\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$;(2)$\left(6,-\frac{\pi}{3}\right)$;(3)$(5,\pi)$.