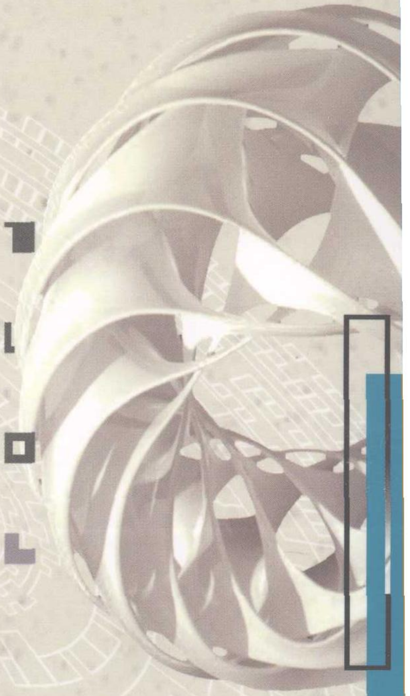
七彩数学
姜伯驹 主编
QICAISHUXUE

离散几何欣赏

宗传明 著



科学出版社
www.sciencep.com

七彩数学

姜伯驹 主编

QICAISHUXUE

离散几何欣赏

宗传明□著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是在一系列讲演的基础上扩展而成的，扼要介绍了离散几何领域中的一些著名问题和研究方向，如 Borsuk 猜想，Hadwiger 猜想，Kepler 猜想，Minkowski 猜想，堆积密度，堆积中的深洞，覆盖密度等.

本书着重突出思想背景，力求直观. 具有大学数学专业修养的人都能看懂.

图书在版编目(CIP)数据

离散几何欣赏/宗传明著. —北京：科学出版社，2009
(七彩数学/姜伯驹主编)
ISBN 978-7-03-023516-9

Ⅰ.离… Ⅱ.宗… Ⅲ.离散数学：几何学-普及读物 Ⅳ.O18-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 185772 号

责任编辑：陈玉琢/责任校对：张小霞
责任印制：钱玉芬/封面设计：王　浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2009 年 1 月第　一　版　开本：A5(890 × 1240)
2009 年 1 月第一次印刷　印张：6
印数：1—5 000　字数：84 000

定价：26.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈长虹〉)

丛书序言

2002 年 8 月，我国数学界在北京成功地举办了第 24 届国际数学家大会.这是第一次在一个发展中国家举办的这样的大会.为了迎接大会的召开，北京数学会举办了多场科普性的学术报告会，希望让更多的人了解数学的价值与意义.现在由科学出版社出版的这套小丛书就是由当时的一部分报告补充、改写而成.

数学是一门基础科学.它是描述大自然与社会规律的语言，是科学与技术的基础，也是推动科学技术发展的重要力量.遗憾的是，人们往往只看到技术发展的种种现象，并享受由此带来的各种成果，而忽略了其背后支撑这些发展与成果的基础科学.美国前总统的一位科学顾问说过："很少有人认识到，当前被如此广泛称颂的高科技，本质上是数学技术".

在我国，在不少人的心目中，数学是研究古老难题的学科，数学只是为了应试才要学的一门学科.造成这种错误印象的原因很多.除了数学本身比较抽象，不易为公众所了解之外，还有学

校教学中不适当的方式与要求、媒体不恰当的报道等等.但是,从我们数学家自身来检查,工作也有欠缺,没有到位.向社会公众广泛传播与正确解释数学的价值,使社会公众对数学有更多的了解,是我们义不容辞的责任.因为数学的文化生命的位置,不是积累在库藏的书架上,而应是闪烁在人们的心灵里.

20 世纪下半叶以来,数学科学像其他科学技术一样迅速发展.数学本身的发展以及它在其他科学技术的应用,可谓日新月异,精彩纷呈.然而许多鲜活的题材来不及写成教材,或者挤不进短缺的课时.在这种情况下,以讲座和小册子的形式,面向中学生与大学生,用通俗浅显的语言,介绍当代数学中七彩的话题,无疑将会使青年受益.这就是我们这套丛书的初衷.

这套丛书还会继续出版新书,我们诚恳地邀请数学家同行们参与,欢迎有合适题材的同志踊跃投稿.这不单是传播数学知识,也是和年轻人分享自己的体会和激动.当然,我们的水平有限,未必能完全达到预期的目标.丛书中的不当之处,也欢迎大家批评指正.

姜伯驹

2007 年 3 月

前 言

离散几何(Discrete Geometry)主要研究 n 维欧氏空间中的一些基本且直觉的问题，如 Kepler 猜想、Newton-Gregory 问题、Borsuk 猜想和 Hadwiger 猜想等．这一学科的经典部分是由 Minkowski 于 20 世纪初所创立的数的几何(Geometry of Numbers)．历史上许多著名数学家曾在这一领域做出过重要贡献，如 Kepler，Newton，Gauss，Dirichlet，Hermite，Zolotarev，Minkowski，Blichfeldt，Borsuk，Hadwiger，Siegel，Mahler，Coxeter，Hlawka，Rogers，L. Fejes Tóth，Grünbaum 和 Lovász 等．这一学科不仅与许多其他数学分支，如数论、组合、图论、群论和优化理论等有着密切的联系，也在编码理论和晶体结构理论等实用学科中具有重要应用．

约半个世纪以前，华罗庚先生曾倡导数的几何在我国的研究．因为它不仅本身重要，而且还对丢番图逼近和超越数论等学科具有重要应用，更是连接经典几何与数论之间的一个桥梁．

本书是作者在剑桥大学、伦敦大学、柏克利数学研究所、微软研究院、华盛顿大学、法国高等研究院、苏黎世高等理工学院、Oberwolfach 数学研究所、柏林工业大学、Magdeburg 大学、维也纳科学技术大学、京都数理研究所、九州大学、匈牙利科学院数学研究所和西班牙 Alicante 大学等地的一系列演讲翻译扩展而成的. 它简要介绍了这一学科中的一些热点问题,如 Borsuk 猜想、Hadwiger 猜想、堆积密度问题、覆盖密度问题、香肠猜想、Minkowski 猜想和 Keller 猜想等. 这本小册子不以详细介绍数学证明为目的,而是以突出新奇的思想方法和重要的研究问题为宗旨. 同时,通过尽量多的图形、实例和一些著名数学家的简介来反映这一学科的丰富内涵和发展历史. 希望读者通过这些专题能了解并欣赏这一学科,更希望年轻学子们能对一些著名问题感兴趣,从而在这一领域做出贡献.

多年来,我的研究工作受到国家杰出青年基金、973 项目(数学机械化)和北京大学 985 项目的资助以及国内外许多前辈数学家的支持和鼓

励. 本书是在冯克勤先生和李忠先生的盛情约稿下完成的,在此深表感谢.

宗传明

2008 年 5 月于北京大学

基本符号

E^n:n 维欧氏空间.

$\sharp\{X\}$:集合 X 中元素的个数.

K:一个 n 维凸体.

C: 一个中心对称的 n 维凸体.

B^n:一个以坐标原点为中心的 n 维单位球.

I^n:一个以坐标原点为中心的 n 维单位立方体.

$\partial(K)$:凸体 K 的表面.

$\mathrm{int}(K)$:凸体 K 的内部.

$v_i(X)$:集合 X 的 i 维测度. 特别地,$v(X)$表示 X 的体积.

w_n:n 维单位球的体积.

Λ:一个 n 维的格.

$\mathrm{conv}\{X\}$:集合 X 的凸包.

$h(K)$:凸体 K 的 Hornich 数.

$\alpha(K)$:凸体 K 的 Newton 数.

$\beta(X)$:集合 X 的 Borsuk 数.

$\gamma(K)$:凸体 K 的 Hadwiger 数.

$\delta(K)$:凸体 K 的最大堆积密度.

$\delta^*(K)$:凸体 K 的最大格堆积密度.

$\theta(K)$:凸体 K 的最小覆盖密度.

$\theta^*(K)$:凸体 K 的最小格覆盖密度.

$\varphi(C)$:中心对称凸体 C 在堆积中的最佳洞深.

$\tau(K)$:凸体 K 的 blocking 数.

$l(K)$:凸体 K 的 L. Fejes Tóth 数.

τ_n:将一个 n 维立方体剖分成单纯形所需的最小个数.

目　　录

1 凸体与格

假设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 n 维欧氏空间 E^n 的一组标准正交基. 也就是说,它们满足

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

其中,$\langle x, y \rangle$表示向量 x 和 y 的内积. 这时,E^n 中的每一点 x 都能唯一地表示为

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n,$$

其中,x_i 被称为 x 的第 i 个坐标,通常记为

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

这时,两点 x 和 y 之间的距离可以定义为

$$\| x, y \| = \Big(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \Big)^{1/2}.$$

定义 1.1 假设 X 是 E^n 的一个子集. 如果

对其中的任意两点 x 和 y 以及任意满足 $0<\lambda<1$ 的实数 λ 都有

$$\lambda x+(1-\lambda)y \in X\ ,$$

那么称其为一个凸集. 另外,如果它还是一个具有内点的紧集,则称其为一个凸体.

作为一个几何性质,凸意味着如果两点属于该集合,那么连接这两点的整条线段都属于该集合. 例如,图 1.1 的(a)和(b)是凸的,(c)则不是.

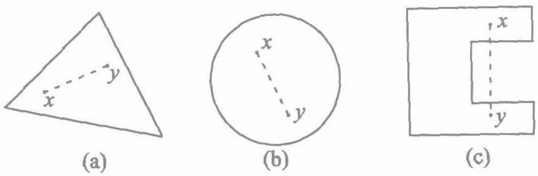


图 1.1

容易验证,n 维空间中的单位球

$$B^n=\left\{x \in E^n: \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 1\right\}$$

和单位立方体

$$I^n=\left\{x \in E^n: |x_i| \leqslant \frac{1}{2},\ i=1,\ 2,\ \cdots, n\right\}$$

都是中心对称[①]的凸体. 另外,如果 $x_1, x_2, \cdots,$

① 顾名思义,称点集 X 是中心对称的,如果存在一个点 $c \in E^n$,使得对任一 $x \in X$ 都有 $2c-x \in X$.

x_{n+1}是 $n+1$ 个不共面的点，那么

$$S=\left\{\sum\lambda_i x_i:\lambda_i\geqslant 0,\sum\lambda_i=1\right\}$$

也是一个凸体,称为一个 n 维单纯形. 通常称

$$\mathrm{conv}\{X\}=\left\{\sum\lambda_i x_i:\lambda_i\geqslant 0,\sum\lambda_i=1,\ x_i\in X\right\}$$

为集合 X 的凸包. 换句话说,凸包是包含该集合的最小凸集. 例如,三角形就是它的 3 个顶点的凸包,而圆盘则是它的边界圆周的凸包.

为了方便,在今后的论述中用 K 表示一个 n 维凸体,用 $v(K)$表示它的体积,用 C 表示一个中心对称的 n 维凸体.

关于凸体有许多既重要又有意思的结论,在这里介绍两个作为例子.

Helly 定理 假设 F 是 E^n 中的一族凸体. 如果其中的任意 $n+1$ 个凸体都有公共点,那么

$$\bigcap_{K\in F}K\neq\varnothing.$$

证明思路 零维(只有一个点)的情况是显然的. 假设该定理在 E^{n-1} 是正确的,进而证明它在 E^n 也是正确的.

用反证法. 如果 F 有一个子集合 G 和一个凸体 K_0 同时满足

$$\bigcap_{K\in G}K=B\neq\varnothing$$

和

$$\Big(\bigcap_{K\in G} K\Big) \cap K_0 = \varnothing.$$

容易看出,B 一定是一个凸集合. 这时由凸集合的基本性质一定存在一个超平面 H 将 K_0 和 B 严格分开.

假设 $K_1, K_2, \cdots, K_n$ 是 G 中的任意 n 个凸体,由上述假设可得

$$B \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} K_i,$$

$$\bigcap_{i=0}^{n} K_i \neq \varnothing,$$

进而

$$\bigcap_{i=1}^{n} (H \cap K_i) \neq \varnothing.$$

事实上,如果 $x \in \bigcap_{i=0}^{n} K_i$,那么

$$H \cap \mathrm{conv}\{x, B\} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (H \cap K_i).$$

这样,由归纳假设可以导出

$$\bigcap_{K\in G} (H \cap K) \neq \varnothing.$$

显然,它与 H 将 K_0 和 B 严格分开相矛盾. Helly 定理得证.

注 1.1 从图 1.2 及其高维推广可以看出 Helly 定理中的 $n+1$ 是最佳的.

注 1.2 这一定理不仅与著名的 Carathé-

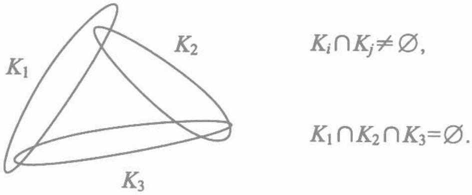


图 1.2

odory 定理①以及 Radon 定理②等价,并有许多重要的推广和应用. 例如,Bárány, Katchalski 和 Pach 曾证明了如下推广:假设 F 是 E^n 中的一个由有限个凸体组成的集合. 如果 F 中的任意 $2n$ 个凸体的交集的体积都不小于 1,那么 F 中的所有凸体的交集的体积一定不小于 n^{-n^2}. 相关参见文献(Danzer et al., 1963; Eckhoff, 1993).

注 1.3 E. Helly (1884～1943),奥地利数学家,曾任维也纳大学讲师,后移民美国. 生前仅发表 6 篇数学论文,没有得到应有的学术

---

① **Carathéodory 定理** 如果 X 是 E^n 的一个非空集合,那么

$$\mathrm{conv}\{X\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i : \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1,\ x_i \in X \right\}.$$

② **Radon 定理** 假设 X 是 E^n 中至少含 $n+2$ 个点的一个集合,那么 X 一定有两个子集 X_1 和 X_2 同时满足

$$X_1 \cap X_2 = \varnothing \text{ 和 } \mathrm{conv}\{X_1\} \cap \mathrm{conv}\{X_2\} \neq \varnothing.$$