校本培训教材

生活中的数学

策划：王建新

初中

第3卷

山西出版集团　书海出版社

书之源图书发行有限公司发行

前　言

儿时的我
还没来得及认字
很早的我
就喜欢识数看图
爸爸说数学是天上的星座
妈妈讲数字是掌上的指头

周围的世界原来是个迷宫
他们向我点头
向我招手
金字塔上传问
天有多高
长城脚下藏谜
地有多厚

十万个为什么
困我难受
导师教我
怎样争得自由
你想得到所向披靡的利器
观察的后面
数学思维开头

大风车让我看到了圆的半径
温度计让我明白了何为数轴
嫦娥奔月变轨妙在切线
鸟巢造型
创意巧同算筹

有限无限在逻辑链上传递
抽象形象在数形台上对流
生活探底原来是一列数据
实践敞开原来是一卷画图

拨动星辰
谁说我胳膊太短
触摸粒子
谁嫌我指纹太粗
数学——你这科技大门的锁钥
数学——你这信息富豪的按钮

——万尔遐

“生活中的数学”

用创新的数学思维方式
解决生活中的实际问题

结 构 特 点

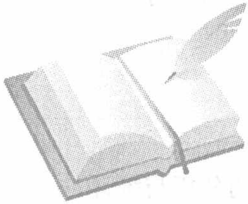
课题学习 ◆ 联系生活，点出课题。

典型例题讲解 ◆ 典例剖析，细致入微。

解题模型 ◆ 开拓思维，总结方法。

挑战自我 ◆ 课题训练，学以致用。

目 录



MULU

（第3卷）

第一章 数与式

第1讲 营销与决策 …………………………… 1

第2讲 纷繁复杂的交通工程问题 ……………… 18

第3讲 走进生产与社会生活 …………………… 34

第4讲 你会因式分解吗 ……………………… 44

第二章 空间与图形

第5讲 图形的全等 ………………………… 51

第 6 讲　生活中的轴对称 …………………… 58

第三章　统计与概率

第 7 讲　数据的分析与统计 …………………… 66

第 8 讲　可能与概率 …………………… 85

第四章　实践与综合应用

第 9 讲　定位与优选 …………………… 97

第 10 讲　乘法原理与加法原理 …………………… 110

第 11 讲　染色问题与染色方法 …………………… 121

第 12 讲　穷举与计数 …………………… 130

参考答案 …………………… 139

第一章 数与式

第1讲 营销与决策

课 题 学 习

营销与决策问题是市场经济中的热点，这类问题的出现能够使我们更进一步关心和参与经济活动，增强应用数学的意识.所谓营销，是指在营销活动中计算产品成本、利润（率），确定销售价格，考虑销售活动的盈利、亏本等情况.这类问题的解决必须理解利润（率）、盈利、亏本等名词的含义，掌握计算公式，并巧妙地建立函数关系式.而决策是指根据已经掌握的数据及有关信息，利用数学知识，建立数学模型对某一事件进行分析、计算，从而做出正确决策.解决这类问题一般先列出算式或建立函数关系式，通过计算算式大小的比较或函数最值的确定等做出相应的决策.

典型例题讲解

例1 某新建商场设有百货部、服装部和家电部三个经营部，共有190名售货员，计划全商场日营业额（指每日卖出商品所收到的总金额）为60万元.由于营业性质不同，分配到三个部的售货员的人数也就不等，根据经验，各类商品每1万元营业额所需售货员人数如表1，每1万元营业额所得利润情况如表2.

商品	每1万元营业额所需人数
百货部	5
服装部	4
家电部	2

表1

商品	每1万元营业额所得利润
百货部	0.3万元
服装部	0.5万元
家电部	0.2万元

表2

商场将计划日营业额分配给三个经营部,设分配给百货部、服装部和家电部的营业额分别为 x(万元)、y(万元)、z(万元)(x,y,z 都是正整数).

(1)请用含 x 的代数式分别表示 y 和 z;

(2)若商场预计每日的总利润为 C(万元),且 C 满足 $19\leqslant C\leqslant 19.7$,问这个商场应怎样分配日营业额给三个经营部?各部应分别安排多少名售货员?

【解答】(1)由题意得$\begin{cases}x+y+z=60\\5x+4y+2z=190\end{cases}$

解得 $y=35-\frac{3}{2}x$,$z=25+\frac{x}{2}$

(2)$C=0.3x+0.5y+0.2z=-0.35x+22.5$

因为 $19\leqslant C\leqslant 19.7$, 所以 $19\leqslant -0.35x+22.5\leqslant 19.7$,

解得 $8\leqslant x\leqslant 10$.

因为 x,y,z 是正整数,且 x 为偶数,

所以 $x=8$ 或 10.

当 $x=8$ 时,$y=23$,$z=29$,售货员分别为 40 人,92 人,58 人;

当 $x=10$ 时,$y=20$,$z=30$,售货员分别为 50 人,80 人,60 人.

【评注】本题是运用方程组的知识,求出了用 x 的代数式表示 y、z,再运用不等式和一次函数等知识解决经营调配方案设计问题.

例2 小王的父母经营一家饲料店,准备投入 a 元资金购入甲种饲料.现有两种方案:一是月初出售,可获利 8%,用本和利再购入乙种饲料,到月底又可获利 10%;二是月底出售,可获利 20%,但要付仓储费用 600 元.

(1)分别写出两种方案获利金额 y(元)关于投资金额 a(元)的函数关系式;

(2)请问根据小王父母的资金状况,如何购销获利较多?

【解答】

(1)第一种方案:

第一次本加利为 $1.08a$ 元;

第二次本加利为 $1.188a$ 元;

$y=0.188a$.

第二种方案：

$y=0.2a-600$.

(2)由 $0.188a=0.2a-600$ 得 $a=50000$；

由 $0.188a>0.2a-600$ 得 $a<50000$；

由 $0.188a<0.2a-600$ 得 $a>50000$.

∴当资金等于50000元时，两种方案获利一样多；

当资金小于50000元时，第一种方案获利多（小本生意，节省仓储费用）；

当资金大于50000元时，第二种方案获利多(区区600元仓储费用又算什么).

例3 A、B 两地分别库存电视机48台和24台，支援 C 地40台、D 地32台.从 A 地调运 C 地、D 地的运费分别为每台40元、80元，从 B 地调运 C 地、D 地的运费分别为每台30元、50元，若总运费不超过3500元，共有哪几种调运方案？最低运费是多少？

【解答】设从 A 地运往 C 地 x 台，则运往 D 地为 $(48-x)$ 台，那么从 B 地运往 C 地、D 地分别为 $(40-x)$ 台、$(x-16)$ 台.则总运费 $y=-20x+4240$.由 $-20x+4240\leqslant 3500$，得 $x\geqslant 37$，所以 x 取37、38、39、40四种调运方案.当 $x=40$ 时，最低运费为3440元.

例4 某织布厂有工人200名，为改善经营，增设制衣车间.已知每人每天能织布30米，或用所织的布制衣6件，制衣一件需用布2米.将布直接出售，每米布可获利3元；将布制衣后出售，每件衣服可获利25元.若每名工人每天只能做一种工作，且不计其他因素，试问：每天安排多少工人制衣可获得最大利润？最大利润约多少元(精确到千元)？

【解答】设每天安排 x 名工人制衣能获得最大利润为 P 元.由题意得：

$$\begin{cases} P=25\times 6x+3[30(200-x)-2\times 6x] \\ 0\leqslant x<200 \\ 30(200-x)\geqslant 12x\,(x\text{ 是整数}) \end{cases}$$

化简得$\begin{cases} P=24x+18000 \\ 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1000}{7}\approx 142.9(x\text{是整数}) \end{cases}$

因为P随x的增大而增大，且x是整数，所以$x=142$时，P最大，最大利润为$P=21408$元≈ 21千元.

例5　北京某厂和上海某厂同时制成电子计算机若干台，北京厂可支援外地10台，上海厂可支援外地4台，现在决定给重庆8台，汉口6台.如果从北京运往汉口、重庆的运费分别是400元/台、800元/台，从上海运往汉口、重庆的运费分别是300元/台、500元/台.求：

(1)若总运费为8400元，上海应运往汉口是多少台？

(2)若要求总运费不超过8200元，共有几种调运方案？

(3)求出总运费最低的调运方案，最低总运费是多少元？

【解答】设上海厂运往汉口x台，那么上海运往重庆有$(4-x)$台，北京厂运往汉口$(6-x)$台，北京厂运往重庆$(4+x)$台，则总运费W关于x的一次函数关系式为：

$W=300x+400(6-x)+500(4-x)+800(4+x)=7600+200x$.

(1)当$W=8400$(元)时，

则有$7600+200x=8400$，解得$x=4$.

若总运费为8400元，上海厂应运往汉口4台.

(2)当$W\leqslant 8200$(元)，

则$\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 4 \\ 7600+200x\leqslant 8200 \end{cases}$

解得$0\leqslant x\leqslant 3$，因为x只能取整数，

所以x只有四种可能的值：0、1、2、3.

答：若要求总运费不超过8200元，共有4种调运方案.

(3)因为一次函数$W=7600+200x$随着x的增大而增大，又因为$0\leqslant x\leqslant 3$，所以当$x=0$时，函数$W=7600+200x$有最小值，最小值是$W=7600$(元)，即最低总运费是7600元.

此时的调运方案是：上海厂的4台全部运往重庆；北京厂运往汉口6台，运往重庆4台.

例6 某公司欲将一批易坏蔬菜从 A 地运往 B 地，共有汽车、火车、直升飞机三种运输工具可供选择，三种运输工具的主要参考数据如下：

运输工具	途中速度（千米/小时）	途中费用（元/千米）	装卸时间（小时）	装卸费用（元）
汽车	50	8	2	1000
火车	100	4	4	2000
飞机	200	16	2	1000

若这批蔬菜在运输过程中的损耗为300元/小时，问采用哪种运输方式比较好，即运输过程中的费用与损耗之和最小.

【点拨】商品的运输过程是增加成本的过程，要想在商品的营销中获利最高，必然尽可能降低其成本.对成本问题而言，若采用飞机运输可以减少途中时间，即减少蔬菜损耗，但租用运输工具的费用较高；若采用火车运输，途中费用比较节约，但装卸不便；而采用汽车运输将增加途中的时间，因此作出运输方式的决策，主要是在减少途中费用和时间上找到合理的结合点，尽可能减少总支出，控制成本的提高.

【解答】设 A、B 两地间距离为 s 千米，则采用三种运输工具的费用和时间可用下表给出：

运输工具	费用	时间（小时）
汽车	$8s+1000$	$\frac{s}{50}+2$
火车	$4s+2000$	$\frac{s}{100}+4$
飞机	$16s+1000$	$\frac{s}{200}+2$

分别用 c_1、c_2、c_3 表示用汽车、火车、飞机运输时的总支出，则有：

$$c_1=8s+1000+\left(\frac{s}{50}+2\right)\times300=14s+1600$$

$c_2=4s+2000+(\frac{s}{100}+4)\times300=7s+3200$

$c_3=16s+1000+(\frac{s}{200}+2)\times300=17.5s+1600$

由 c_1、c_2、c_3 的表达式及 $s>0$ 可知：$c_1<c_3$ 恒成立；

$c_1-c_2<0$ 的解为 $s<\frac{1600}{7}\approx229$

$c_2-c_3<0$ 的解为 $s>\frac{3200}{21}\approx152$

所以可以有以下结论：

(1)当 $s<\frac{1600}{7}$ 时，c_1 最小，

即 A、B 两地间距离不多于 229 千米，采用汽车运输比较合理.

(2)当 $s=\frac{1600}{7}$ 时，$c_1=c_2<c_3$，

即 A、B 再地间距离大约为 229 千米，采用火车、汽车均可.

(3)当 $s>\frac{1600}{7}$ 时，$c_1>c_2$，$c_2<c_3$，

即 A、B 两地间距离超过 229 千米，采用火车运输比较合理.

【评注】由上面解决问题的过程可知，因为 $c_1>c_3$ 不成立，所以采用直升飞机运输不可能成为最合理的运输方式，事实上，飞机运输的优势体现在速度上，即由于减少途中时间而减少损耗，下面探讨当蔬菜损耗率为多少时，直升飞机运输可能成为最佳的运输方式.

设损耗率为 x 元/小时，则

$c_1=8s+1000+(\frac{s}{50}+2)x$

$c_2=4s+2000+(\frac{s}{100}+4)x$

$c_3=16s+1000+(\frac{s}{200}+2)x$

要使直升飞机运输成为最好的运输工具，只需满足：$\begin{cases} c_1-c_3\geqslant 0 \\ c_2-c_3\geqslant 0 \end{cases}$

即 $\begin{cases} -8s+(\dfrac{s}{50}-\dfrac{s}{200})x\geqslant 0 & ① \\ -12s+1000+(\dfrac{s}{100}-\dfrac{s}{200}+2)x\geqslant 0 & ② \end{cases}$

由①得：$s(\dfrac{3}{200}x-8)\geqslant 0$ $\qquad x\geqslant\dfrac{1600}{3}$

由②得：$x\geqslant\dfrac{12s-1000}{\dfrac{s}{200}+2}\geqslant\dfrac{1600}{3}$ 的解为 $s\geqslant\dfrac{1550}{7}\approx 221$（千米）

所以可以有如下结论成立：

（1）当 $s<\dfrac{1550}{7}$ 且 $x\geqslant\dfrac{1600}{3}$ 时，c_3 最小，

即当 AB 两地间距离小于 221 千米时，

只有当损耗不小于$\dfrac{1600}{3}$元/时，飞机运输较合理.

（2）当 $s\geqslant\dfrac{1550}{7}$ 且 $x\geqslant\dfrac{800(3s-250)}{s+400}$ ③时，c_3 最小，

即当 AB 两地间距离不小于 221 千米时，当损耗率达到多少可以采用直升飞机运输与 AB 两地间距离有关，其关系式由③式给出.

例 7 我市某中学要印制本校高中招生的录取通知书，有两个印刷厂前来联系制作业务，甲厂的优惠条件是：按每份定价 1.5 元的八折收费，另收 900 元制版费；乙厂的优惠条件是：每份定价 1.5 元的价格不变，而制版费 900 元按六折优惠.且甲乙两厂都规定：一次印刷数量至少是 500 份.分别求两个印刷厂收费 y（元）与印刷数量 x（份）的函数关系，并指出自变量 x 的取值范围. 如何根据印刷的数量选择比较合算的方案？如果这个中学要印制 2000 份录取通知书，那么应当选择哪一个厂？需要多少费用？

【点拨】本题为决策性问题，一般先列出算式或建立函数关系式，通过算式大小的比较或函数最值的确定作出相应决策.

【解答】

(1)$y_{甲}=1.2x+900$(元),$x\geqslant 500$(份),且 x 是整数.$y_{乙}=1.5x+540$(元),$x\geqslant 500$(份),且 x 是整数.

(2)解法一:

若 $y_{甲}>y_{乙}$,即 $1.2x+900>1.5x+540$,

则 $x<1200$,

若 $y_{甲}=y_{乙}$,即 $1.2x+900=1.5x+540$,

则 $x=1200$.

若 $y_{甲}<y_{乙}$,即 $1.2x+900<1.5x+540$,

则 $x>1200$.

答:当 $500\leqslant x<1200$ 份时,选择乙厂比较合算;

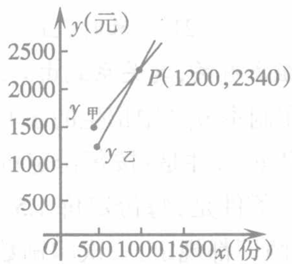
当 $x=1200$ 份时,两个厂的收费相同;

当 $x>1200$ 份时,选择甲厂比较合算;

当 $x=2000$ 时,$y_{甲}=3300$(元).

所以要印 2000 份录取通知书,应选择甲厂,费用是 3300 元.

解法二:作一次函数 $y_{甲}=1.2x+900(x\geqslant 500)$和 $y_{乙}=1.5x+540(x\geqslant 500)$的图象,两个函数图象的交点是 $P(1200,2340)$(如图).



由图象可知:

当 $500\leqslant x<1200$ 份时,选择乙厂比较合算;

当 $x=1200$ 份时,两个厂的收费相同;

当 $x>1200$ 份时,选甲厂比较合算.

所以要印 2000 份录取通知书,应选择甲厂,费用是 3300 元.

例 8　某校准备在甲、乙两家公司为毕业班学生制作一批纪念册.甲公司

提出：每册收取材料费 5 元，另收设计费 1500 元；乙公司提出：每册收材料费 8 元，不收设计费.

(1)请写出制作纪念册的册数 x 与甲公司的收费 y_1 元的函数关系式；

(2)请写出制作纪念册的册数 x 与乙公司的收费 y_2 元的函数关系式；

(3)如果学校派你去甲、乙两家公司订做纪念册，你会选择哪家公司？

【点拨】这是一道中考题，知识点较综合，主要是训练我们应用函数解决问题的能力，加强函数应用意识，用册数 x 去表示题中的各个量，利用付出的费用包括材料费与设计费两部分之和即可列出方程；在比较选择时，实际上是比较两个函数值的大小关系，需要根据册数进行分类讨论.

【解答】

(1)当制作纪念册的册数为 x 册时 $y_1=5x+1500$

(2)当制作纪念册的册数为 x 册时 $y_2=8x$

(3)令 $y_1=y_2$ 得 $5x+1500=8x$　　解得 $x=500$

当 $y_1>y_2$ 时得 $5x+1500>8x$　　解得 $x<500$

当 $y_1<y_2$ 时得 $5x+1500<8x$　　解得 $x>500$

所以当制作的纪念册数在 500 册以下时选择乙公司；当制作纪念册的册数刚好为 500 册时无论选哪家公司都一样；当制作纪念册数在 500 册以上时选择甲公司.

【评注】在对某些问题作出决策时，一定要注意因变量是什么.当计算比较时，在数据的基础上才能作出决定，对于不等式与一次函数的关系式，可以直接用不等式解决两函数的大小比较，也可以通过函数图象来说明两函数的大小关系，往往会有三种不同的结果.

例 9　通过电脑拨号上“因特网”的费用是由电话费和上网费两部分组成的.以前我市通过“黄冈热线”上“因特网”的费用为电话费 0.18 元/3 分钟，上网费为 7.2 元/小时.后根据信息产业部调整“因特网”资费的要求，自 1990 年 3 月 1 日起，我市上“因特网”的费用调为电话费 0.22 元/3 分钟，上网费为每月不超过 60 小时，按 4 元/小时计算；超过 60 小时部分，按 8 元/小时计算.

(1)根据调整后的规定，将每月上“因特网”的费用（元）表示为上网时间（小时）的函数；

(2)资费调整前,网民晓刚在其家庭经济预算中,一直有一笔每月 70 小时的上网费用支出,"因特网"资费调整后,晓刚要想不超过其家庭经济预算中的上网费用支出,他现在每月至多可上网多少小时?

(3)从资费调整前后的角度分析,比较我市网民上网费用的支出情况.

【点拨】这是一道与人们的日常生活联系密切的"决策型"应用题,解题时应撇开现象的东西,把握数学本质,转化、抽象为数学问题,寻求解决这些问题的突破口.

【解答】设资费调整后每月上网时间为 x 小时,费用为 y 元.

(1)$y=\begin{cases}8.4x(0\leqslant x\leqslant 60)\\12.4x-240(x>60)\end{cases}$

(2)资费调整前,上网 70 小时所需费用为$(3.6+7.2)\times 70=756$ (元)

资费调整后,若上网 60 小时,则所需费用为 $8.4\times 60=504$(元),因为 $756>504$, 所以晓刚现在上网超过 60 小时, 由 $12.4x-240\leqslant 756$ 得 $x\leqslant 80.32$(小时),即晓刚现在每月至多可上网约 80.32 小时.

(3)设调整前所需费用为 y_1(元),调整后所需费用为 y_2(元),则 $y_1=10.8x$,

当 $0\leqslant x\leqslant 60$ 时,$y_2=8.4x$,$10.8x>8.4x$,故 $y_1>y_2$;

当 $x>60$ 时,$y_2=12.4x-240$.

$y_1=y_2$ 时,$10.8x=12.4x-240$,$x=150$;

$y_1>y_2$ 时,$10.8x>12.4x-240$,$x<150$;

$y_1<y_2$ 时,$10.8x<12.4x-240$,$x>150$;

综上可得:

当 $x<150$ 时,调整后所需费用少;

当 $x=150$ 时,调整前后所需费用相同;

当 $x>150$ 时,调整前所需费用少.

•例 10 商店出售茶壶和茶杯,茶壶每个定价 20 元,茶杯每个定价 5 元,该店制定了两种优惠办法:(1)买一个茶壶赠送一个茶杯;(2)按总价的 92% 付款.某顾客需购茶壶 4 个,茶杯若干个(不少于 4 个).若购买茶杯数为 x(个),付款数为 y(元),试分别建立两种优惠办法中 y 与 x 的函数关系式.并讨论该顾客买同样多的茶杯时,两种办法中哪一种更省钱?

【解答】

优惠办法(1):买一个茶壶赠送一个茶杯,

即是买一个茶壶少付一个茶杯的钱,

故有 $y_1=(20\times4-5\times4)+5x=60+5x(x\geqslant4)$

优惠办法(2):$y_2=(20\times4+5x)\cdot92\%=73.6+4.6x(x\geqslant4)$

$\therefore y_1-y_2=(60+5x)-(73.6+4.6x)=0.4x-13.6(x\geqslant4)$

设 $y_1-y_2=0$,得 $x=34$

$\therefore$ 当 $x=34$ 时,两种优惠办法付款相同;当 $x>34$ 时,$y_1>y_2$,办法(2)更省钱;$4\leqslant x<34$ 时,$y_1<y_2$,办法(1)更省钱.

解 题 模 型

通过上述的学习,相信大家能很好地体会日常生活中所碰到的营销和决策问题的初步解法了.在上面的例子中更多的是充分利用一次函数等知识的抽象概括功能,根据问题中不同数量之间的关系,建立函数的模型,从而得到问题的解决方法.在寻求函数关系的探索过程中,渗透了一定的解题思想方法,这将为我们今后解决类似的营销和决策问题提供借鉴.

挑 战 自 我

1. 某童装厂现有甲种布料 38 米,乙种布料 26 米,现计划用这两种布料生产 L、M 两种型号的童装共 50 套,已知做一套 L 型号的童装需用甲种布料 0.5 米,乙种布料 1 米,可获利 45 元;做一套 M 型号的童装需用甲种布料 0.9 米,乙种布料 0.2 米,可获利润 30 元.设生产 L 型号的童装套数为 x,用这批布料生产这两种型号的童装所获利润为 y(元).

(1)写出 y(元)关于 x(套)的函数解析式;并求出自变量 x 的取值范围;

(2)该厂在生产这批童装中，当 L 型号的童装为多少套时，能使该厂所获得的利润最大？最大利润为多少？

2. A 城有化肥 200 吨，B 城有化肥 300 吨，现要把化肥运往 C、D 两农村，如果从 A 城运往 C、D 两地运费分别是 20 元/吨与 25 元/吨，从 B 城运往 C、D 两地运费分别是 15 元/吨与 22 元/吨. 现已知 C 地需要 220 吨，D 地需要 280 吨，如果个体户承包了这项运输任务，请帮他算一算，怎样调运花钱最小？

3. 下表所示为装运甲、乙、丙三种蔬菜的重量及利润.某汽车运输公司计划装运甲、乙、丙三种蔬菜到外地销售(每辆汽车按规定满载，并且每辆汽车只装一种蔬菜).

	甲	乙	丙
每辆汽车能装的吨数	2	1	1.5
每吨蔬菜可获利润(百元)	5	7	4

(1)若用 8 辆汽车装运乙、丙两种蔬菜 11 吨到 A 地销售，问装运乙、丙两种蔬菜的汽车各多少辆？

(2)公司计划用 20 辆汽车装运甲、乙、丙三种蔬菜 36 吨到 B 地销售(每种蔬菜不少于一车)，如何安排装运，可使公司获得最大利润？最大利润是多少？