

CSIAM '98

**中国工业与应用数学学会
第五次大会论文集**

主 编

曾庆存 李大潜 薛炽寿 程乾生

清华大学出版社

<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>

CSIAM'98

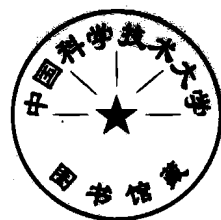
中国工业与应用数学学会第五次大会

论文集

(1998, 成都)

主 编

曾庆存 李大潜 薛炽寿 程乾生



清华大学出版社

北京 1998

(京)新登字 158 号

书 名: CSIAM'98 中国工业与应用数学学会第五次大会论文集

主 编: 曾庆存 李大潜 薛炽寿 程乾生

出版者: 清华大学出版社(北京清华大学校内, 邮编 100084)

因特网地址: www.tup.tsinghua.edu.cn

印刷者: 清华大学印刷厂

发行者: 新华书店总店北京科技发行所

开 本: 787×1092 1/16 印张: 49 字数: 1162 千字

版 次: 1998 年 7 月第 1 版 1998 年 7 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-302-03046-4/O·197

印 数: 001~450

定 价: 98.00 元

前 言

随着我国经济建设的巨大发展和“科教兴国”方针的进一步实施，我国工业与应用数学以及数学技术的研究、普及与应用出现了蓬勃的发展势头，在应用数学的基础理论研究和诸多相关领域的应用中取得了可喜的成果。

中国工业与应用数学学会全国大会每两年召开一次。本书是学会第五次大会论文汇编，新收录的 150 余篇论文是学会学术工作委员会组织专家经过认真评审从会议征文中遴选出来的。这些论文覆盖了微分方程、运筹和优化、数理统计、计算数学、经济数学和数学建模等应用数学的诸多方面，在某种程度上反映了我国高等院校、科研院所和工业部门中应用数学工作者的丰硕成果，显示了他们投身国民经济主战场进行研究与开发的风貌。

本论文集的出版得到国家自然科学基金委和中国有色金属工业总公司的大力支持。清华大学出版社和清华大学应用数学系也给予我们鼎力协助。在此，我们一并表示由衷的感谢。

编者

1998 年 5 月
于北京清华大学

目 录

(一) 大会报告

1	浅论“数学技术”	叶其孝(1)
2	Some Aspects of Mathematical Finance	雍炯敏(4)
3	求解孤立子方程的分离变量法(综述报告)	朱允民(14)
4	863/CIMS 工程实施促进成飞与国际接轨	钱应璋(27)
5	求解孤立子方程的分离变量法(综述报告)	曾云波(36)
6	计算机图形学及其应用的若干问题	齐东旭等(45)
7	Matrix computation problems in trust region algorithms for optimization	袁亚湘(52)

(二) 微分方程, 控制理论及其应用

8	The Approximation to H_∞ Control of Nonlinear System Via Output Feedback	朱经浩(65)
9	不确定时滞系统的鲁棒 H_∞ 动态输出反馈控制	陆国平等(70)
10	Boundary Stabilization of Timoshenko Beam by Frequency Domain Multiplier Method	翟景春等(75)
11	奇异非线性二阶混合型泛函微分方程特征值问题正解的存在性	蒋达清等(81)
12	单调增算子一个不动点定理及应用	卫淑芝(86)
13	动态反馈神经网络绝对稳定的充分必要条件	陈亚军等(91)
14	大气中尺度对流的三维螺旋结构	刘式达等(96)
15	线性二次型调节器最优输出反馈律的研究	李世玲等(99)
16	一类无界控制算子的容许性	张宏伟等(105)
17	具有强迫事件的 DES 的状态反馈控制	李桂莲(109)
18	不确定非线性时滞系统的鲁棒几乎干扰解耦问题	陆国平(114)
19	A Note on Positive Solutions of Right Focal Point Boundary Value Problems	孔令彬(119)
20	开采边界品位的最优控制	任 毅等(123)
21	非线性边界控制下一维抛物型方程解的存在唯一性	张艳霞等(127)
22	圆柱电流磁场中电荷运动的含振解	向裕民(132)

- 23 一个非线性捕食系统的随机微分方程模型的摄动解.....汪礼初等(137)
- 24 GD-Convergence Of Linear Multistep Methods for Stiff
Delay Differential Equations.....黄乘明(142)
- 25 捕食——食饵动力系统极限环的唯一性.....张平光(147)
- 26 一类变分不等式组解的存在性.....朱元国(152)
- 27 半变分不等式解的适定性的进一步研究.....饶 玲(157)
- 28 输电系统自动控制(综述).....韩云瑞(162)
- 29 一类含稀疏效应的捕食-食饵系统的分支.....王常吉等(166)
- 30 On General Birkhoff Interpolation at the Cross Type
Node Configuration.....朱 平等(171)
- 31 Blow-up analysis for a Liouville equation.....马 力(174)
- 32 Effect of Crossing Trajectories and Turbulent Dispersion
of a Small Spherical Particle.....黄自萍等(179)
- 33 水声工程的偏微分方程定解问题及其数值解.....孙晓艳(184)
- 34 中立抛物型时滞偏微分方程解振动的充要条件.....刘安平等(189)
- 35 横向裂纹转子的运动稳定性研究.....李信真(192)
- 36 New Hierarchies of Infinite Dimensional Integrable
Hamiltonian Systems.....林润亮(196)
- 37 A Mathematical Model for New Product Diffusion in a
Competitive Environment.....潘 涛等(204)
- 38 A Nonlinear Diffusion Model in Gradient Zone of the Solar
Pond and Its Numerical Simulation.....潘 涛等(210)
- 39 非竞争性抑制系统中的膜运载动力学方程.....李 泉(216)
- 40 二维Navier-Stokes方程的自适应小波方法.....张 武等(220)

(三) 运筹和优化

- 41 关于优选与统筹的两点探讨.....李世华(225)
- 42 数学模型在板坯连铸二冷优化和控制方面的应用.....王久彬等(233)
- 43 赋双权的中国邮递员问题.....谢 政等(239)
- 44 在广播网络中寻找最佳源点对.....谢 政等(243)
- 45 一类带等式约束的非线性最小平方问题的罚函数
最小平方解的渐近性质.....李海龙(248)
- 46 几种最优投资决策的数学规划模型.....赵仪娜(253)
- 47 油田生产规划优化设计模型及其在胜利油田应用.....刘 奋等(256)

48	机械产品柔性生产线设备数量计算方法的研究·····	李 英等 (261)
49	有交易费用的最优投资决策·····	熊德文等 (267)
50	Two Improving Pure Random Searches in Global Optimization·····	彭建萍等 (273)
51	在模式识别中的信息融合·····	程乾生 (278)
52	广义柯布—道格拉斯模型及应用·····	王开华 (281)
53	深水航道工程中的泥沙淤积最优控制问题研究·····	朱江等 (286)

(四) 数学建模研究

54	森林系统的动态模型·····	于伟红 (292)
55	飞行模拟的路径设计与运动控制·····	张永华等 (297)
56	最优搜索计划与停搜问题·····	李长明等 (303)
57	世代明显的昆虫种群数量的动态模型及其应用·····	李时银 (308)
58	年龄结构种群模型的渐近性态与周期解·····	周义仓等 (313)
59	吹气搅拌过程钢水脱氧夹杂物行为的数学模拟·····	赵连刚等 (318)
60	低渗透基质岩块吸渗驱油机理·····	胡雅仍等 (323)
61	用数学模型计算砂轮截形·····	刘 媛等 (328)
62	高速喷管系统内气—液两相流的数学模型及数值计算·····	张 雷 (332)
63	制板复照自动曝光的一个数学模型·····	孔绍文等 (337)
64	癌细胞病理变化模型·····	曾祥金 (340)
65	三相驱替过程的渗滤网络模型·····	王子亭 (346)
66	群组决策的一个数学模型·····	胡显佑 (351)
67	高炉炉温预测专家系统的研究与应用·····	刘祥官等 (356)
68	高炉用焦配煤数学模型·····	王中乾等 (361)

(五) 数理统计及其应用

69	用鞅过程分析随机媒质中的极化率·····	卢学源 (367)
70	混合序列强大数律的一些结果·····	张维海等 (373)
71	统计模型在经济预测中的应用·····	滕素珍等 (378)
72	大气随机媒质中的扰动场方程·····	卢学源 (382)
73	学习成绩与智商 (IQ) 的相关分析·····	卢介景等 (389)
74	利用概率模型确定大型数值线性方程组 $Ax=y$ 的近似解及性质·····	秦前清等 (394)
75	SFR 中 HEMA 动力学的数学模型和参数估计·····	鲁习文等 (398)

76	正态分布的均值被简单半序约束方差为未知的最大似然估计	卢玉贞等(402)
77	稳健非线性回归的有界影响优良估计及其计算	马江洪(407)
78	一类具漂移的脉冲型随机控制问题	孙世良等(411)
79	在简单半序约束下, 多维保序回归	董 普等(415)
80	Markov 决策在投入产出分析中的应用	秦学志等(420)
81	一类条件布朗运动的首达时、末离时分布	刘守生(425)
82	关于一类非简单子样统计量分布	吴奇峰(430)
83	利用隐蔽的系统寿命试验数据估计元件寿命分布的参数	盛 骤(437)
84	利用串联系统的试验数据求指数型元件可靠性近似置信限	沈宝明(442)
85	非线性时间序列的投影寻踪学习网络建模和预报	田 铮等(447)
86	ARMA 序列的一种新的建模方法 (详细摘要)	白淑敏(454)
87	可修排对系统与标准排对系统的比较	唐应辉(458)
88	有限阶段非马氏决策规划的最优策略及算法	张继红等(463)
89	Uniform Column Latin Rectangles	张建明等(468)

(六) 计算方法和数值分析

90	隐函数样条与 C^1 保形插值	高 坚(474)
91	边界是开弧的 Helmholtz 方程 Dirichlet 问题的数值解法	李瑞遐(478)
92	多变量系统最优控制加权矩阵一种新的迭代计算方法	郝华宁(482)
93	复杂井眼条件下 EPT 径向响应的数值模拟研究	张立梅等(488)
94	能源数值模拟分数步长法的新进展	袁益让(493)
95	油资源评价——运移聚集的数值模拟	袁益让等(499)
96	低阶组合杂交三角形单元的退化	聂玉峰等(504)
97	河口义 118 精细油藏数值模拟	盖英杰等(509)
98	核废料污染问题数值模拟的有限元格式	程爱杰等(514)
99	带阻尼非线性波动方程的有限元方法	高理平(519)
100	具有非齐次 Neumann 边条件半导体问题的特征差分方法 和 L^∞ 模估计	刘蕴贤(522)
101	含吸附的可压混溶驱动问题的特征混合元方法	顾海明等(527)
102	实特征值多步 Runge-Kutta 法及其并行计算	李寿佛(532)
103	Error Growth Functions of General Linear Methods	肖爱国等(536)
104	求解带奇性的椭圆型方程的半离散化方法	黄忠亿等(541)
105	球面上第二类 Fredholm 积分方程配置方法	胡国胜等(546)
106	一类非线性反应扩散模型的有限差分格式	江成顺(551)

- 107 有界区域上双重介质中地下水污染问题的数值方法.....崔 明(556)
- 108 一粘弹性力学模型的有限元方法及其误差估计.....孙同军等(561)
- 109 三维对流扩散问题沿特征线多步离散 Galerkin 法
及交替方向预处理迭代解.....陈 蔚(566)
- 110 完全非线性双曲型积微分方程的有限元分析.....崔 霞(572)
- 111 A Posteriori Error Estimates Based on Defect Correction
for Eigenvalue Problems.....杨一都(577)
- 112 Numerical Solution of the Navier-Stokes Equation.....崔 嵬(582)
- 113 金属基复合材料浇铸过程的有限元分析.....谈骏渝(587)
- 114 含弥散可压熔混流驱动问题全离散有限元的超收敛性.....陈艳萍(592)
- 115 参数辨识的一种区域分解法及应用.....冯恩民等(598)
- 116 矩形图元下料的优化模型、算法及应用.....王锡禄等(603)
- 117 遗传模拟退火算法及收敛性分析.....方海鹏等(608)
- 118 MQ 方法在电阻率测井数值模拟中的应用.....王健等(613)
- 119 二冷离线模型的有限元计算方法.....谭永基等(618)
- 120 电极外形优化的有限元分析.....蔡志杰(623)

(七) 其它应用数学问题

- 121 串励电机运行的稳定性分析.....李军等(627)
- 122 华氏经济数学基本定理的推广.....任九泉(631)
- 123 汽车覆盖件外形设计.....胡新如等(634)
- 124 六点图可解性的确定.....李 袁(641)
- 125 一种能应用于奇异性分析的小波.....喻文焕等(645)
- 126 自覆盖映射的弱双曲不变集.....郭彦平等(650)
- 127 关于亚正定阵的几个定理.....刘先忠(655)
- 128 证券投资组合中的临界线.....王 键等(660)
- 129 证券预期收益率的探讨.....屠新曙等(665)
- 130 科技成果的经济效益评价及其经济效益的计算方法.....白丙中等(670)
- 131 点接触蜗轮滚刀的铲磨计算.....张 焕等(675)
- 132 影子价格分析及经济应用.....赵景文(679)
- 133 一类常见的网状给水系统的可靠性研究.....何先平等(684)
- 134 地区间居民消费水平的比较办法研究.....王守祯(689)
- 135 一种基于小波变换的滤波方法.....章敏杰等(695)
- 136 模糊因素加权在保护装置软件可靠性预计中的应用.....尚春虹等(702)

137	再论多层感知器的函数逼近能力·····	蔡长林等(708)
138	基于人工神经网络方法的四川省宏观经济计量模型·····	蔡长林等(712)
139	Adaptive Interpolation Scheme for Image Enlargement·····	赵乃良(716)
140	广义 AHP 的特征根法·····	杜之韩等(722)
141	Fuzzy 知识库系统的研究与应用·····	邱小杉等(726)
142	人工神经网络方法用于提高宇宙射线分析效率·····	黄五群等(730)
143	地下溶洞探测的天电磁波层析成像方法·····	魏明果等(734)
144	炼钢过程通过 PolyNeuFuz 算法自动生成模糊规则·····	顾祥林等(739)
145	The Problem of Principal Axis in Practical Engineering·····	吴昌恂等(744)
146	The Method of Calculating Air Drag Acting On The Solar Wing·····	吴昌恂等(747)
147	广义拟阵的基图·····	丁丽娟等(752)
148	Transition Graph of Gray Code(Extended Abstract) ·····	沙基昌等(757)
149	人工神经网络在公路无损检测方面的应用·····	何水明等(761)
150	模糊双向联想记忆及其在智能控制中的应用·····	张建新(764)
151	房屋抵押贷款债券的研究·····	钟翔年等(769)
152	确定图的最小边覆盖集的算法·····	刘林忠等(771)

浅论“数学技术”

叶其孝

(北京理工大学应用数学系, 100081)

[摘要] 本文论述了“高技术本质上是数学技术”的出处及其背景。由于信息技术及数学软件的迅速发展, 数学科学的许多方面已经从工程技术的背后走到了前台; 什么是“数学技术”, 及其可能的发展。希望本文能对数学技术的进一步的讨论起到抛砖引玉的作用。

一、引言

曾任美国总统尼克松的科学顾问、现为 EED 股份有限公司总裁的 Edward E. David Jr. 于 1984 年 1 月 25 日在美国数学会 (AMS) 和美国数学协会 (MAA) 联合年会上说: “……对数学研究的低水平的资助只能出自对数学带来的好处的完全不适当的估价。显然, 很少的人认识到如今被如此称颂的‘高技术’本质上是数学技术。” (“…… the low level of support for mathematics research can only flow from a totally inadequate appreciation of the benefits it confers. Apparently, too few people recognize that the ‘high technology’ that is so celebrated today is essentially mathematical technology.” (见文献[1] p. 142)。在文献[2] 中又指出, “‘高技术’的出现把我们的社会推进到了数学工程技术的时代。在这个时代里, 数学与工程技术以新的方式相互作用着。五十年前, 数学虽然也直接为工程技术提供一些工具, 但基本方式是间接的: 先促进其他科学的发展, 再由这些科学提供工程原理和设计的基础。现在不一样了, 数学和工程技术之间, 在更广阔的范围内和更深刻的程度上, 直接地相互作用着, 极大地推动了数学和工程科学的发展, 也极大地推动了工程科学的发展。”也就是说数学开始从后台走向前台。之后, “‘高技术’本质上是数学技术”的说法在学术界, 特别是在数学界广为流传, 例如, 在欧洲工业数学联合会的宗旨中就引述了 David 的这句话。(见文献[3]) 钱学森教授在 1989 年 8 月 18 日中国数学会召开的数学教育与科研座谈会上的讲话中也指出: “……, 这是数学技术, 即怎样给出一个方法, 能使科学的理论通过电子计算机解答具体的科学技术问题。” (见文献[4], p. 131) 当然, “‘高技术’本质上是数学技术”的说法也引起了许多不同的看法和争议。

二、什么是数学技术

实际上,技术、工程的概念都是发展的。在文献[5]中对技术的解释为“用于达到商业和工业目的的科学方法和材料”;在文献[6]中的说明为“技术是人类活动的一个专门领域……,技术一词出自希腊文 *techne* ‘工艺、技能’与 *logos* ‘词、讲话’的组合,意思是对造型艺术和应用技术进行论述。当它 17 世纪在英国首次出现时,仅指各种应用技艺。到 20 世纪初技术的含义逐渐扩大,它涉及到工具、机器及其使用方法和过程。到 20 世纪后半期,技术被定义为‘人类改变或控制客观环境的手段或活动。’在文献[5]中对工程的解释为“把科学和数学的原理应用于设计、制造,以及有效又经济的结构、机器、过程和系统的操作的实际目的。”在文献[6]中的说明为,“应用科学知识使自然资源最佳地为人类服务的一种专门技术。工程的设计者称为工程师。……科学家的职责是如何认识,而工程师则是如何实现……工程师不同于科学家,他不能自由地选择自己感兴趣的问题,而必须解决面临的问题……工程师的主要职能可概括为:1. 研究和发展。研究工程师应用数学和科学概念、实验技术和归纳推理来探求新的工作原理和方法;而发展工程师则把研究成果应用于实际……2. 施工和生产……3. 操作。4. 管理和其它职能。”由此可见,把数学中的有些部分看作技术并非是不可理解的。例如,代数与密码技术, Radon 与 CT (计算机层析) 技术,大规模线性规划求解技术在经济、管理中的应用,与保险业有关的精算学有关软件,期货、期权交易中的期权定价软件,信息提取与处理软件小波技术在信息科学中的应用,穿甲弹的计算仿真技术,并行计算技术在气象和工程中的应用,等等,都是数学技术。在近年来美国工程院(创建于 1964 年)院士的选举中引人注目的讨论却是“什么是工程?”过去,研制计算机软件的计算机科学家,研制数学软件的计算数学家是不能被选为工程院院士的。但是,在 1997 年选出的 85 位工程院院士中就有三位数学家,其中一位是研制开发在工业中广泛应用的与整数规划有关软件 CPLEX 的 Robert Bixby (他是 CPLEX Optimization Inc. 的总裁,也是 Rice 大学的教授),该公司已经卖出一万多份软件,广泛应用于石油公司、航空公司、邮局、华尔街、森林业、制造业等工业、企业。另一位是被称为著名的数学软件 MATLAB 之父的 The Math Works, Inc. 董事会主席和首席科学家 Cleve Moler. 德国汽车制造商企图用该公司的数学软件 MATLAB 和 SIMULINK 来设计下一代新车控制系统的芯片中的控制算法。该公司的数学软件还广泛用于汽车和航天工业。(见文献[7]) 在 1998 年选出的 84 位工程院院士中又有三位数学家,其中一位就是 Texas 大学“地表下地层建模中心”的 Mary Wheeler 教授,她是由于与石油油藏模拟和地下水建模有关的大规模并行计算方面的成就而当选的。我们无须再举更多的例子了。这已经充分说明“数学技术”的出现决非偶然。

综上所述,我们大体上可以认为所谓的“数学技术”必须满足以下四个条件:

1. 对所要解决的问题有一个描述得非常精细的数学模型;
2. 解决该数学模型中的数学问题有很好的数学方法和算法, 还有高效的数学软件;
3. 有相当的普适性, 即能用于一大类问题或类似的问题;
4. 与实际问题有关的领域的工程、制造有密切的合作, 甚至融为一体。

三、结论

其实, 问题并不在于对以数学方法为主的技术都要冠以“数学技术”的帽子, 问题的实质在于: 数学是否开始从后台走向前台, 如果是的话, 是怎样走向前台呢? 数学科学在 21 世纪是否具有关键的重要性? 或者, 如胡世华先生在文 [9] 中引用 Whitehead 的话: “…… 在今后两千年内, 在人类思想领域里具有压倒性的新情况, 将是数学地理解问题占统治地位。”(见文献[9], p. 16) 或如钱学森教授在文献[4]中所说, “…… 数学的发展关系到整个科学技术的发展, 而科学技术是第一生产力; 所以数学的发展是一件国家大事。”如果大家同意的话, 讨论就要容易得多、深入得多。我们相信这样的讨论一定会引起学术界、工程界、金融界、工商界和政府领导人的兴趣, 从而将大大推动数学科学的发展, 和工程、经济、管理更进一步地结合。

参考文献

- [1] David E. Toward renewing a threatened resource: findings and recommendations of the Ad Hoc Committee on Resources for the Mathematical Sciences. Notices of the AMS, 1984, 31(2): 141-145
- [2] Renewing U S. Mathematics — Critical Resource for the Future. National Academy Press, Washington D. C., 1984. (周仲良、郭镜明译, 美国数学的现在和未来, 上海: 复旦大学出版社, 1986)
- [3] 叶其孝译. 欧洲工业数学联合会 (ECMI). 数学译林, 1989, 8(1): 231-241
- [4] 钱学森. 发展我国的数学科学 — 在中国数学会召开的数学教育与科研座谈会上的讲话. 学进展, 1990, 19(2): 129-135
- [5] The American Heritage Dictionary of the English Language, Third Edition, Boston • New York • London, Houghton Mifflin Company,
- [6] 简明不列颠百科全书, 北京 • 上海: 中国大百科全书出版社, 1985, 6 - 1986,
- [7] Bixby, Moler. Wright Elected to NAE, SIAM NEWS, 1997, 30(3): 1, 7.
- [8] NAE Announces New Members, SIAM NEWS, 1998, 31(3): 1, 8.
- [9] 胡世华. 信息时代的数学. 数学进展, 1988, 17(1): 12-20.

Some Aspects of Mathematical Finance

Jiongmin Yong¹

(Department of Mathematics, Fudan University)

[Abstract] Mathematical finance becomes more and more attractive in recent years. This talk will begin with a brief history of mathematical finance. Several interesting problems, such as option pricing, consol rate problem, etc. will be discussed in some extent. These problems give rise to the study of backward and forward-backward stochastic differential equations. On the other hand, the application of techniques from stochastic control theory and differential games makes the mathematical finance more prosperous.

1. Introduction

The two winners of the 1997 Economic Sciences Nobel Prize are Robert C. Merton and Myron S. Scholes for their significant contributions in mathematical finance. This makes the already popular field of *mathematical finance* more attractive.

Mathematics plays an essential role in the quantitative study of modern finance. In the foreword to the book "*Continuous-Time Finance*" ([21]) of Robert C. Merton, Paul A. Samuelson² wrote:

The pole that propelled Merton to Byronic eminence was the mathematical tool of continuous probability à la Norbert Wiener and Kiyoshi Itô. Suddenly what had been complex approximation became beautifully simple truth.

On the other hand, in the same book, R. C. Merton wrote:

The mathematical models of modern finance contain some of the most beautiful applications of probability and optimization theory.

..., of course, all that is beautiful in science need not also be practical; and surely, not all that is practical in science is beautiful. Here, we have both.

Let us now briefly recall the history of modern mathematical finance. It is now well-accepted that the magnificent dissertation "*On the theory of speculation*" of Louis Bachelier written in 1900 ([2]) pronounced the birth of the mathematical finance. Interesting enough,

¹Laboratory of Mathematics for Nonlinear Sciences and Department of Mathematics, Fudan University, Shanghai 200433, China. This work is supported in part by the NSFC, under grant 79790130, the National Distinguished Youth Science Foundation of China under grant 19725106, the Chinese State Education Commission Science Foundation under grant 97024607, and the Li Foundation.

²1970 Economic Sciences Nobel Prize winner.

that was also the first time that the later so-called Brownian motion was mathematically formulated and carefully studied.

Bachelier's work had been unknown in the finance literature for more than 50 years. In early 1950s, Paul A. Samuelson rediscovered this work (through the statistician L. J. Savage). The modern finance begins in the later 1950s and 1960s. The most influential works in that period was that of H. Markowitz³ on the *mean variance theory of portfolio selection*. Later, W. F. Sharpe ([28]) and J. Lintner ([13]) formulated the *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), P. A. Samuelson ([27]) and E. Fama ([9]) proposed the *efficient market hypothesis*. In 1973, Fischer Black and Myron S. Scholes published the famous *Black-Scholes formula* solving the pricing of European option. Since then, many researches of mathematical finance have been carrying out. See [22] for some detailed descriptions of the history.

Backward stochastic differential equations (BSDE, for short) was firstly formulated by Bismut ([3]) in studying stochastic optimal controls. Since 1990, due to Pardoux and Peng, the study of BSDE has been re-ignited ([24,25]). the theory of forward-backward stochastic differential equations (FBSDE, for short) have been systematically studied shortly after (see [1,15,14,8,12,29,30], and for relevant results, see [16,17,18,19,26,31]), and these theories turn out to be very useful in mathematical finance (see [8,7,10,6,32,23]). In the rest of this paper, we are going to give a brief description of the theory of BSDE and FBSDE, and their applications in some mathematical finance problems.

2. Simple Description of the Market

We first look at the model of a *bond*. Let $X_0(t)$ be the price of the bond at time t with interest rate r compounded continuously. Then on a period $[t, t+h]$, we have

$$\frac{X_0(t+h) - X_0(t)}{X_0(t)h} \approx r \quad (2.1)$$

which is the relative return per unit time. We may also write the above as

$$X_0(t+h) - X_0(t) \approx rX_0(t)h \quad (2.2)$$

Let $h \rightarrow 0$, one has

$$dX_0(t) = rX_0(t)dt, \quad X(0) = x \quad (2.3)$$

whose solution is $X_0(t) = xe^{rt}$, $t \in [0, T]$. Clearly, $X_0(\cdot)$ is monotonically increasing. For this reason, we say that the bond is *riskless*.

Next, we look at a *stock*, which is quite different from a bond. Let $X(t)$ be the price of the stock, with the *average return rate* b and the so-called *volatility* σ . Again, consider on $[t, t+h]$, we have

$$X(t+h) - X(t) \approx X(t)[bh + \sigma\eta(t, h)] \quad (2.4)$$

³1990 Economic Sciences Nobel Prize winner

where $\eta(t, h)$ is a (normalized) noise. It could be positive or negative! Thus, the stock is *risky*. In the above, $\eta(t, h)$ is caused by the (independent) behavior of a very large number of investors. Hence, people accept that $\eta(t, h) \sim N(0, h)$, the normal distribution with mean 0 and covariance h .

Let $W(t)$ be the accumulative noise up to time t . This turns out to be a **Brownian motion**. Then (2.4) can be written as

$$X(t+h) - X(t) \approx X(t)\{bh + \sigma[W(t+h) - W(t)]\}$$

Letting $h \rightarrow 0$, we have (compare (2.4))

$$\begin{cases} dX(t) = bX(t)dt + \sigma X(t)dW(t), & t \in [0, T] \\ X(0) = x \end{cases} \quad (2.5)$$

whose solution is given by $X(t) = xe^{bt + \sigma W(t)}$, $t \in [0, T]$.

Now, we look at the general case ([23]). There are $n+1$ assets continuously traded in the market. The 0-th asset is a bond, and the last n are stocks. The price process $X_i(\cdot)$ of the i -th asset satisfies the following SDE:

$$\begin{cases} dX_0(t) = r(t)X_0(t)dt \\ dX_i(t) = b_i(t)X_i(t)dt + X_i(t) \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t)dW_j(t) \\ X_i(0) = x_i, \quad 0 \leq i \leq n \end{cases} \quad (2.6)$$

Here, $W(\cdot) \equiv (W_1(\cdot), W_2(\cdot), \dots, W_d(\cdot))$ is a d -dimensional standard Brownian motion defined on some complete filtered probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbf{P})$, such that $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ is the natural σ -field generated by $W(\cdot)$ (augmented by all the $\mathbf{P}$ -null sets in $\mathcal{F}$). In what follows, we denote

$$b(\cdot) = (b_1(\cdot), b_2(\cdot), \dots, b_n(\cdot))^T, \quad \sigma(\cdot) = (\sigma_{ij}(\cdot))_{n \times d}$$

We call $r(\cdot)$, $b(\cdot)$, and $\sigma(\cdot)$ the interest rate, the appreciation rate, and the volatility, respectively. Recall that the market is said to be *complete* if $n \geq d$ and $\sigma(t)$ is of full rank. Otherwise, the market is said to be *incomplete*.

3. Option Pricing

Consider a market with one bond and one stock whose prices are determined by the following system of SDEs:

$$\begin{cases} dX_0(t) = r(t)X_0(t)dt \\ dX(t) = X(t)b(t)dt + X(t)\sigma(t)dW(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

where $X_0(t)$, $X(t)$, $r(t)$, $b(t)$, and $\sigma(t)$ are the price of the bond, the price of the stock, the interest rate, the appreciation rate, and the volatility, respectively.

Let us consider the so-called *European call option*. This is a contract which gives the right to buy, say, 1 share of the stock at a given price, q , called the *exercise price*, at a specified time $t = T$, called the *maturity date*. There will be two case:

- (a) If at $t = T$, $X(T) > q$, the buyer of the option will come to buy the stock;
 (b) If $X(T) < q$, the option will be discarded.

Apparently, such an option has its value (it is not free!). The question is the following: What is the (fair) price of this option? This problem is called the *option pricing* ([4]). We now make some analysis on this problem.

Suppose the price at $t = 0$ is y . Note that the loss of the seller (or writer) of the option at time $t = T$ is: $(X(T) - q)^+$. To compensate (called *hedge*) this loss, he has to invest the amount y (at time $t = 0$) in the market and to get enough return. Let $Y(t)$ be the wealth of the seller t . Thus,

$$Y(0) = y$$

He wants to invest $Y(t)$ in the market so that

$$Y(T) \geq (P(T) - q)^+, \quad \text{a.s.} \quad (3.2)$$

Suppose he splits $Y(t)$ in the following way:

$$\begin{cases} \pi(t) & \text{— the amount in stock} \\ Y(t) - \pi(t) & \text{— the amount in bond} \end{cases} \quad (3.3)$$

Clearly, when $\pi(\cdot)$ is given, the allocation of the wealth in bond and stock is determined. We call $\pi(\cdot)$ the *portfolio process*. A simple computation shows that the wealth process $Y(\cdot)$ satisfies the following:

$$\begin{cases} dY(t) &= \{r(t)Y(t) + [b(t) - r(t)]\sigma(t)^{-1}Z(t)\}dt + Z(t)dW(t) \\ Y(0) &= y \end{cases} \quad (3.4)$$

Here, we have assumed $\sigma(t) \neq 0$ and have set $Z(t) = \sigma(t)\pi(t)$. Note that the larger the y , the larger the $Y(T)$. Thus, in order the price y of the option being fair, we should have y so that the following holds:

$$Y(T) = (P(T) - q)^+ \quad (3.5)$$

Then we end up with the following system of stochastic differential equations:

$$\begin{cases} dX(t) &= X(t)b(t)dt + X(t)\sigma(t)dW(t) \\ dY(t) &= \{r(t)Y(t) + [b(t) - r(t)]\sigma(t)^{-1}Z(t)\}dt + Z(t)dW(t) \\ X(0) &= x, \quad Y(T) = (X(T) - q)^+ \end{cases} \quad (3.6)$$

We need to find a triple of adapted processes $(X(\cdot), Y(\cdot), Z(\cdot))$. The fair price of the option is given by $y = Y(0)$.

We note that the equation for $X(\cdot)$ is *forward* since the initial value is specified, whereas the equation for $Y(\cdot)$ is *backward*. For this reason, we call (3.6) a system of *forward-backward stochastic differential equations* (FBSDE, for short). It is seen that (3.6) is a decoupled FBSDE.

Let us look at two interesting cases: