21世纪高等职业教育规划教材

实用高等数学

第一册

《实用高等数学》编写组 编

苏州大学出版社

21 世纪高等职业教育规划教材

实用高等数学

第一册

《实用高等数学》编写组　编

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

实用高等数学．第1册/吴跃生主编:《实用高等数学》编写组编．—苏州:苏州大学出版社，2008.5
21世纪高等职业教育规划教材
ISBN 978-7-81137-046-1

Ⅰ．高…　Ⅱ．①吴…　②实…　Ⅲ．高等数学-高等学校:技术学校-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第076727号

21世纪高等职业教育规划教材
实用高等数学(第一册)
《实用高等数学》编写组　编
责任编辑　李　娟

苏州大学出版社出版发行
(地址:苏州市十将东路200号　邮编:215021)
无锡市江溪书刊印刷厂印装
(地址:无锡市南门外江溪桥139号　邮编:214027)

开本 787×1092　1/16　印张 16.5　字数 412千
2008年5月第1版　2008年5月第1次印刷
ISBN 978-7-81137-046-1　定价:28.00元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换
苏州大学出版社营销部　电话:0512-67258835

编写说明

COMPILE EXPLANATION

为了满足高等职业教育事业又好又快发展的需要，根据教育部16号文件中关于进一步“改革教材、教学内容和教学方法，拓宽专业适应性，努力办出特色”，以及党的十七大报告中关于“大力发展职业教育，提高高等教育质量”的精神，我们邀请了高职院校富有教学经验和理论研究水平的一线教师，编写了这套《实用高等数学》教材. 教材坚持“以应用为目的，以必须、够用、高效为度”的编写原则，突出了“联系实际，理清概念，加强计算，注重应用，适度论证，提高素质，重视创新”的特色，强化了职业教育教材功能建设方面所必须具备的区域性与适应性.

教材在编写过程中，适当增加了实验课和实例教学的比重，努力改变了高等数学课程过去常见的繁、难、多、旧的状况，突出体现了服务于发展学生综合职业素质和职业能力的基本功能，有利于引导学生积极思考和实践，培养学生分析问题和解决实际问题的能力，加强了学生对数学作为一门重要专业基础课和工具课的感性认识. 为了适应不同地区、不同院校、不同专业的需要，教材在内容的安排上提供了极大的弹性，可根据具体情况灵活组合，充分体现了其通用性. 教材分第一、第二两册，完整教学时数为两学期，共128学时. 各专业可根据实际情况对教学内容作适当取舍.

教材在编写过程中主要参考了苏州大学出版社已出版的《高等数学》.

教材由邓国光、张建忠总主编. 第一册主编为吴跃生，副主编为邓润梅、胡文英、陈晓江、孙秀亭，参加编写、修改的还有邓国光、贺楚雄、喻璟、卜孝华、饶新明、许世建、程发珍、胡俊航. 第二册主编为黄海哨，副主编为刘淑珍、唐有光、付冬丽、凌寿铨，参加编写、修改的还有邹志红、余翔、王广明、罗建武、吴翰青、郭晓金、占翔、付金谋. 另外，陈景贤老师也对本教材的编写、修改做了大量的工作.

由于编者水平所限，不妥之处在所难免，敬请读者批评指正.

《实用高等数学》编写组

2008年5月

目录 Contents

第一章　函数、极限与连续

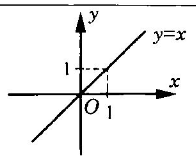
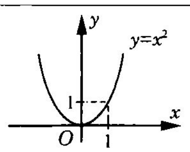
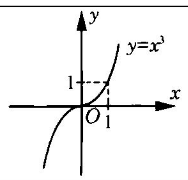
高等数学研究的主要内容是函数的微分、积分及其应用，其基础是函数的极限. 本章将在复习和加深函数有关知识的基础上，学习极限的定义，讨论极限的有关性质及运算，最后给出连续函数的概念和性质，为以后的学习做好必要的准备.

§1-1　初等函数

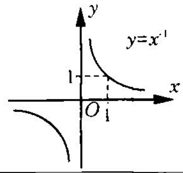
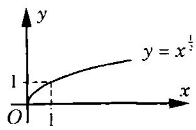
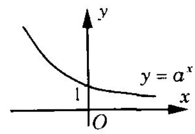
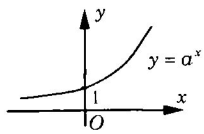
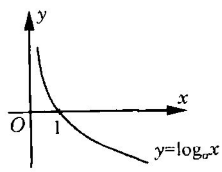
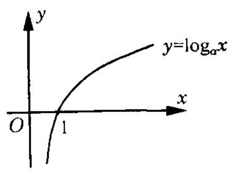
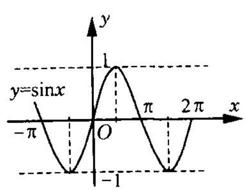
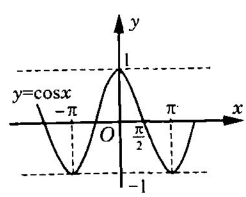
一、基本初等函数

我们把幂函数 $y=x^{\alpha}$（$\alpha\in\mathbf{R}$）、指数函数 $y=a^{x}$（$a>0$ 且 $a\neq1$）、对数函数 $y=\log_{a}x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）、三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$ 和反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 统称为**基本初等函数**. 为了方便，很多时候也把多项式函数 $y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 看作基本初等函数. 这些函数是我们今后研究其他各种函数的基础.

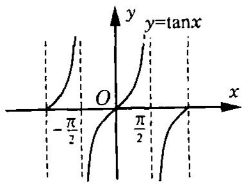
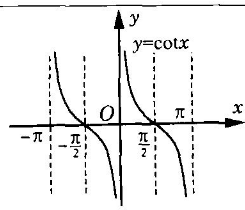
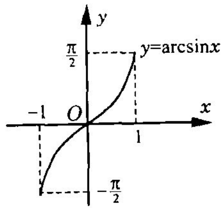
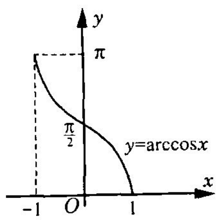
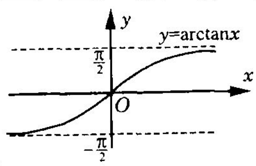
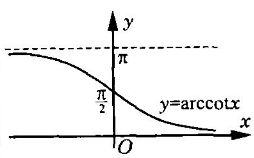
现将一些常用的基本初等函数的定义域、值域和特性列表说明如下：

函数类型	函　数	定义域与值域	图　象	特　性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在$(-\infty,0)$内单调减少，在$(0,+\infty)$内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加

续表

函数类型	函　数	定义域与值域	图　象	特　性
幂函数	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$内单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
对数函数	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数 周期2π，有界，在$\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$内单调增加，在$\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$内单调减少$(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数 周期2π，有界，在$(2k\pi,2k\pi+\pi)$内单调减少，在$(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$内单调增加$(k\in\mathbf{Z})$

续表

函数类型	函　数	定义域与值域	图　象	特　性
三角函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 周期 π 在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加($k\in\mathbf{Z}$)
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 周期 π 在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少($k\in\mathbf{Z}$)
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数 单调增加 有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少 有界
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数 单调增加 有界
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少 有界

二、复合函数

考察具有同样高度 H 的圆柱体的体积 V，显然，不同圆柱体的体积取决于它的底面积 A 的大小，也就是由公式 $V=AH$（H 为常数）确定. 而底面积 A 是由它的半径 r 确定，即 $A=\pi r^2$. V 是 A 的函数，A 是 r 的函数，V 与 r 之间通过 A 建立了函数关系 $V=AH=\pi r^2H$，它是由函数 $V=AH$ 与 $A=\pi r^2$ 复合而成的，简单地说 V 是 r 的复合函数.

定义 1 如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交非空，那么，y 通过中间变量 u 的联系成为 x 的函数，我们把这个函数称为是由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$.

必须指出，不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的. 例如 $y=\ln u$，$u=-3-x^2$，就不能复合成一个复合函数，因为 $u=-3-x^2$ 对应于定义域 $(-\infty,+\infty)$ 的值域为 $(-\infty,-3]$，与 $y=\ln u$ 的定义域 $(0,+\infty)$ 的交集为空集，因此不能复合.

学习复合函数有两方面要求：一方面，会把几个作为中间变量的函数复合成一个函数，这个复合过程实际上是把中间变量依次代入的过程；另一方面，会把一个复合函数分解为几个较简单的函数，这些较简单的函数往往是基本初等函数或是基本初等函数与常数通过四则运算所得到的函数.

例 1 已知 $y=\ln u$，$u=x^2$，试把 y 表示为 x 的函数.

解 因为 $y=\ln u$，而 $u=x^2$，u 是中间变量，所以 $y=\ln u=\ln x^2$.

例 2 设 $y=u^2$，$u=\tan v$，$v=\dfrac{x}{2}$，试把 y 表示为 x 的函数.

解 不难看出，u，v 分别是中间变量，故 $y=u^2=\tan^2 v=\tan^2\dfrac{x}{2}$.

从例 2 可以看出，复合函数的中间变量可以不限于一个.

例 3 函数 $y=e^{\sin x}$ 是由哪些基本初等函数复合而成的？

解 令 $u=\sin x$，则 $y=e^u$，故 $y=e^{\sin x}$ 是由 $y=e^u$，$u=\sin x$ 复合而成的.

例 4 函数 $y=\tan^3(2\ln x+1)$ 是由哪些简单函数复合而成的？

解 $y=\tan^3(2\ln x+1)$ 是由 $y=u^3$，$u=\tan v$，$v=2\ln x+1$ 复合而成的.

▶▶▶三、初等函数

定义 2 由常数和基本初等函数，经过有限次四则运算和有限次复合而成的，并且能用一个式子表示的函数，称为初等函数.

例如，$y=\dfrac{\sin x}{x^2+1}$，$y=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$，$y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$ 等都是初等函数.

为了今后能够正确熟练地求函数的导数和积分，我们必须会将一个初等函数拆成若干个函数的复合和函数与常数的四则运算，且出现在其中的每一个函数都是基本初等函数之一. 这往往是一个连续"分解"的过程.

例 5 分解 $y=e^{\sin(1+3x^2)}$.

解 令 $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=1+3x^2$.

故 $y=e^{\sin(1+3x^2)}$ 是由 $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=1+3x^2$ 复合而成的.

此外，为了讨论函数在一点附近的某些性态，下面引入点的邻域的概念.

定义 3 设 $a,\delta\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，称数集 $\{x\mid |x-a|<\delta,x\in\mathbf{R}\}$，即实数轴上和点 a 的距离小于 δ 的点的全体（图 1-1(1)）为点 a 的 **δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$. 点 a 与数 δ 分别称为这邻域的中心与半径. 有时用 $U(a)$ 表示点 a 的一个泛指的邻域. 数集 $\{x\mid 0<|x-a|<\delta,x\in\mathbf{R}\}$（图 1-1(2)）称为点 a 的**去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$.

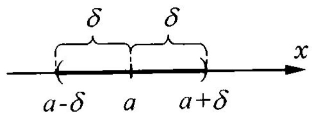


图 1-1(1)

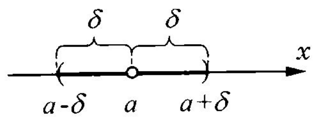


图 1-1(2)

显然，$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$，$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$.

随堂练习 1-1

1. 下列说法是否正确？

(1) 复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域即为 $u=\varphi(x)$ 的定义域.

(2) 若 $y=y(u)$ 为偶函数，$u=u(x)$ 为奇函数，则 $y=y[u(x)]$ 为偶函数.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ x+1, & x<0,\end{cases}$ 由于 $y=x$ 和 $y=x+1$ 都是初等函数，所以 $f(x)$ 是初等函数.

(4) 设 $y=\arcsin u$，$u=x^2+2$，这两个函数可以复合成一个函数 $y=\arcsin(x^2+2)$.

2. 求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-6}}+\lg(3x-8)$ 的定义域.

3. 设 $f(1-2x)=1-\dfrac{2}{x}$，求 $f(x)$.

4. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^5-\sin x$；

(2) $g(x)=x^3\tan x+[f(x)+f(-x)]$；

(3) $f(x)=\dfrac{x(e^x-1)}{e^x+1}$；

(4) $h(x)=x^4+2^x-3$.

5. 分析下列函数的复合过程：

(1) $y=\lg(\sin x)$；

(2) $y=\arccos\sqrt{x^2-1}$.

6. 将下列函数复合成一个函数：

(1) $y=\sin u$，$u=\sqrt{v}$，$v=2x-1$；

(2) $y=\lg u$，$u=1+v$，$v=\sqrt{\omega}$，$w=\sin x$.

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{x+2}{1+\sqrt{3x-x^2}}$；

(2) $y=\lg(5-x)+\arcsin\dfrac{x-1}{6}$；

(3) $y=\ln(\ln x)$；

(4) $y=\begin{cases}2x, & -1\leqslant x<0,\\ 1+x, & x>0;\end{cases}$

(5) $y=f(x-1)+f(x+1)$，$f(u)$ 的定义域为 $(0,3)$.

2. 求下列函数的函数值：

(1) 设 $f(x)=\arcsin(\lg x)$，求 $f\left(\dfrac{1}{10}\right)$，$f(1)$，$f(10)$；

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\leqslant 0,\\ 2^x, & x>0,\end{cases}$ 求 $f(-2)$，$f(0)$，$f[f(-1)]$；

(3) 设 $f(x)=2x-1$，求 $f(a^2)$，$f[f(a)]$，$[f(a)]^2$.

3. 确定下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^4-2x^2-3$；　　(2) $f(x)=\dfrac{x^8\sin x}{1+x^2}$；

(3) $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$；　　(4) $f(x)=\log_2(x+\sqrt{x^2+1})$.

4. 把下列各题中的 y 表示为 x 的函数：

(1) $y=\sqrt{u}$，$u=x^2+1$；　　(2) $y=\ln u$，$u=3^v$，$v=\sin x$.

5. 分解下列各函数：

(1) $y=\sqrt{3x-1}$；　　(2) $y=(1+\lg x)^5$；

(3) $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$；　　(4) $y=\sin\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$；

(5) $y=\lg^2\arccos x$；　　(6) $y=\arctan(x^2+1)^2$.

6. 我国《个人所得税法》规定：公民月收入凡超过 2000 元者，需缴纳个人所得税. 超过 2000 元但超过部分不超过 500 元者，超过部分按 5%纳税；超过部分超过 500 元但不超过 2000 元者，超过部分按 10%纳税等等. 试求个人收入不超过 4000 元时税金与月收入的函数关系，并分别求月收入为 2900 元和 3189 元时，应缴纳的税金各是多少？

§1-2　极　限

一、数列极限

先看两个无穷数列：

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots; \tag{1}$$

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots. \tag{2}$$

我们分别将这两个数列中的前几项在数轴上表示出来(图 1-2).

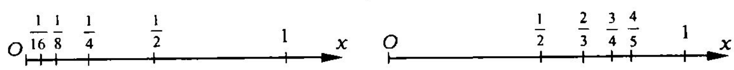


图 1-2

现在我们来考察这两个数列随着项数 n 增大时项的变化趋势. 容易看出当 n 无限增大时，数列(1)中的项无限趋近于 0，数列(2)中的项无限趋近于 1. 我们用下述的数列极限定义来描述数列的这种变化趋势：

定义 1　当数列 $\{a_n\}$ 的项数 n 无限增大时，如果 a_n 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称这个数列存在**极限** A，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 有时也记作当 $n\to\infty$ 时，$a_n\to A$，或 a_n

$\to A(n\to\infty)$.

若数列$\{a_n\}$存在极限，也称数列$\{a_n\}$**收敛**；若数列$\{a_n\}$没有极限，则称数列$\{a_n\}$**发散**.

注意　(1) 一个数列有无极限，应该分析随着项数的无限增大，数列中相应的项是否无限趋近于某个确定的常数，如果这样的数存在，那么这个数就是所论数列的极限，否则数列的极限就不存在. 例如，数列 $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots,(-1)^{n+1}\frac{1}{n},\cdots$，随着 n 无限增大，显然对应的项无限趋近于 0，故得 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=0$.

又如，数列 $2,-2,2,-2,\cdots,(-1)^{n-1}2,\cdots$，当项数 n 无限增大时，数列各项时而为 2，时而又为 -2，它不可能无限趋近于某个确定的常数，因此该数列当 $n\to\infty$ 时，极限不存在. 再如，数列 $1,2,3,\cdots,n,\cdots$，随着项数的无限增大，其对应的项也无限增大，不趋近于某个常数，故此数列的极限也不存在.

(2) 一般地，任何一个常数数列的极限都是这个常数本身. 例如，常数数列 $5,5,5,\cdots$，它的极限是 5.

二、函数极限

数列的本质是自变量只能取正整数的一种特殊的函数，即 $y=f(n),n\in\mathbf{N}_+$. 数列极限就是研究当自变量 $n\to\infty$ 时，函数值 $f(n)$ 的变化趋势. 对于一般函数 $y=f(x),x\in D(D\subset\mathbf{R}$ 可以是无界区域，也可以是有界区域）而言，也可以研究在自变量 x 的变化过程中函数值 $f(x)$ 的变化趋势. 这里的自变量 x 的变化过程是指两种情形：一种是 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大（记作 $x\to\infty$）；另一种是 x 无限接近于某一值 x_0，或者说 x 趋向于 x_0（记作 $x\to x_0$）. 下面分别对 x 在这两种不同的变化过程中函数 $f(x)$ 的极限问题讨论如下：

1. 当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

在数列的极限中，记号 $n\to\infty$ 的意义是指数列的项数按照正整数的顺序无限增大. 而函数的自变量 $x\to\infty$ 是指 x 的绝对值无限增大，它包含以下两种情况：

(1) x 取正值，无限增大，记作 $x\to+\infty$；

(2) x 取负值，它的绝对值无限增大（即 x 无限减小），记作 $x\to-\infty$.

若 x 不指定正负，只是 $|x|$ 无限增大，则写成 $x\to\infty$.

例 1　讨论函数 $y=\frac{1}{x}+1$ 当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时的变化趋势.

解　作出函数 $y=\frac{1}{x}+1$ 的图象（图 1-3）.

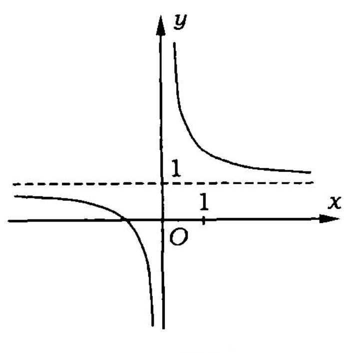


图 1-3

由图 1-3 可以看出，当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时，$y=\frac{1}{x}+1\to 1$，因此当 $x\to\infty$ 时，$y=\frac{1}{x}+1\to 1$.

对于这种变化过程，给出下列定义：

定义 2　如果当 $|x|$ 无限增大（即 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时存在极限 A，称数 A 为当 $x\to\infty$ 时

函数 $f(x)$ 的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A.$$

类似地，如果当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时存在极限 A，称数 A 为当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时函数 $f(x)$ 的极限，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A\text{（或}\lim_{x\to-\infty} f(x)=A\text{）}.$$

例 2 作出函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 和 $y=2^x$ 的图象，并判断下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$； （2）$\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x$.

解 分别作出函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 和 $y=2^x$ 的图象（图 1-4）.

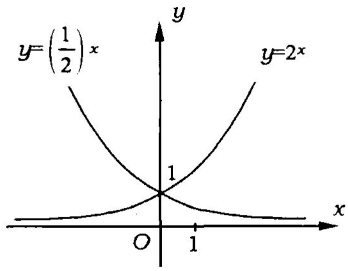


图 1-4

由图象可以看出：（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$；（2）$\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x=0$.

例 3 讨论下列函数当 $x\to\infty$ 时的极限：

（1）$y=1+\frac{1}{x^2}$； （2）$y=2^x$.

解 （1）函数的图象如图 1-5 所示.

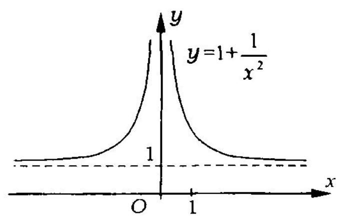


图 1-5

从图象可见，当 $x\to+\infty$ 时，$y=1+\frac{1}{x^2}\to1$；当 $x\to-\infty$ 时，$y=1+\frac{1}{x^2}\to1$. 因此，当 $|x|$ 无限增大时，函数 $y=1+\frac{1}{x^2}$ 无限地接近于常数 1，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$.

（2）函数的图象如图 1-4 所示.

从图象可见，当 $x\to+\infty$ 时，$y=2^x\to+\infty$；当 $x\to-\infty$ 时，$y=2^x\to0$. 因此，当 $|x|$ 无限增大时，函数 $y=2^x$ 不可能无限地趋近某一个常数，即 $\lim\limits_{x\to\infty}2^x$ 不存在.

从例 3 可以看出，一般地成立下面的结论：当且仅当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 都存在并且相等为 A 时，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在为 A，即

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A.$$

2. 当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

与 $x\to\infty$ 的情形类似，$x\to x_0$ 包含 x 从大于 x_0 和 x 从小于 x_0 的方向趋近于 x_0 两种情况，分别用：

（1）$x\to x_0^+$ 表示 x 从大于 x_0 的方向趋近于 x_0；

（2）$x\to x_0^-$ 表示 x 从小于 x_0 的方向趋近于 x_0.

记号 $x\to x_0$ 表示 x 无限趋近于 x_0，即表示从两个方向趋近于 x_0.

例 4 讨论当 $x\to2$ 时，函数 $y=x+1$ 的变化趋势.

解 作出函数 $y=x+1$ 的图象（图 1-6）. 由图 1-6 可以看出，

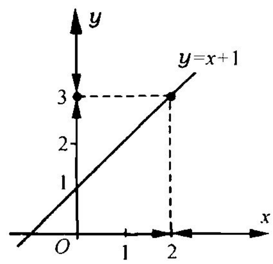


图 1-6

不论x从小于 2 的方向趋近于 2，还是从大于 2 的方向趋近于 2，函数 $y=x+1$ 的值总是随着自变量 x 的变化从两个不同的方向愈来愈接近于 3，所以说，当 $x\to 2$ 时，$y=x+1\to 3$.

例 5　讨论当 $x\to 1$ 时，函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的变化趋势.

解　作出函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的图象(图 1-7).

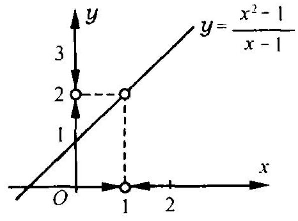


图 1-7

函数的定义域为$(-\infty,1)\cup(1,\infty)$，在 $x=1$ 处函数没有定义，但从图 1-7 可以看出，自变量 x 不论从大于 1 的方向还是从小于 1 的方向趋近于 1 时，函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的值都从两个不同方向愈来愈接近于 2. 我们研究当 x 趋近于 1 时函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的变化趋势时，并不计较函数在 $x=1$ 处是否有定义，而仅关心函数在 $x=1$ 的邻近($x\in\mathring{U}(1,\delta)$)的函数值的变化趋势. 因此，对于这个例子，仍说：当 $x\to 1$ 时，$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}\to 2$.

对于上例这种变化趋势，给出如下定义：

定义 3　如果当 $x\neq x_0$，$x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称当 $x\to x_0$时$f(x)$存在极限 A，称数 A 为当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

例 6　求下列极限：

(1) $f(x)=x$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$；　　(2) $f(x)=C$(C 为常数)，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

解　(1) 因为当 $x\to x_0$ 时，$f(x)=x$ 的值无限趋近于x_0，所以有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.

(2) 因为当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$的值恒等于C，所以有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}C=C$. 由此可见，常数的极限是其本身.

前面讨论了当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$的极限，在那里 x 是以任意方式(大于 x_0 或小于 x_0)趋近于 x_0 的. 但是，有时我们还需要知道，x 仅从大于 x_0 的方向趋近于 x_0 或仅从小于 x_0 的方向趋近于 x_0 时，$f(x)$的变化趋势. 我们规定：

(1) 如果 x 从大于x_0 的方向趋近于 x_0(即 $x\to x_0^+$)时，函数 $f(x)$无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称 $f(x)$在 x_0 处存在**右极限** A，称数 A 为当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的右极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$(图 1-8(1))；

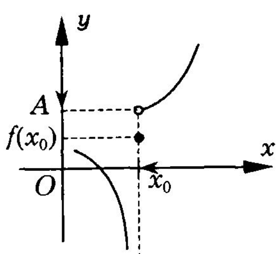


图 1-8(1)

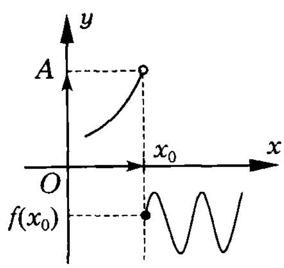


图 1-8(2)

(2) 如果 x 从小于x_0 的方向趋近于 x_0(即 $x\to x_0^-$)时，函数 $f(x)$无限地趋近于一个确

定的常数 A，那么就称$f(x)$在 x_0 处存在**左极限** A，称数 A 为当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的左极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$（图 1-8(2)）.

例 7 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ x^3, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 讨论当 $x\to 0$ 时 $f(x)$的极限.

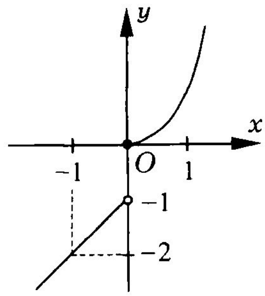


图 1-9

解 这是一个求分段函数在分段点处的极限问题. 作出它的图象，如图 1-9 所示，由图象可见

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1,\ \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x^3=0.$$

虽然当 $x\to 0$ 时的左、右极限都存在，但当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)$并不趋近于某一个确定的常数，因而当 $x\to 0$ 时 $f(x)$的极限不存在.

一般地，当且仅当 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$都存在并且相等为 A 时，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在为 A，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

例 8 已知 $f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 2,\\ 2, & x<2,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}x=2$，$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}2=2$，即

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^-}f(x)=2,$$

所以

$$\lim_{x\to 2}f(x)=2.$$

例 9 已知 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$是否存在？

解 当 $x>0$ 时，$f(x)=\dfrac{|x|}{x}=\dfrac{x}{x}=1$；当 $x<0$ 时，$f(x)=\dfrac{|x|}{x}=\dfrac{-x}{x}=-1$，所以函数可以分段表示为 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 于是

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=1,\ \lim_{x\to 0^-}f(x)=-1,$$

即 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在.

极限是高等数学中的一个基本概念. 高等数学的特征是能准确地表达瞬间概念和解决无限求和问题，表达和解决的工具就是极限，因此极限自然成为教材后继内容的基础. 尽管在下面几节中多数练习的是求极限问题，但学习极限决不仅仅是为了求极限，而是要理解极限的思想、方法和应用.

随堂练习 1-2

1. 下列说法是否正确？

(1) 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义，则 $f(x)$ 在 x_0 处极限不存在；

(2) 有界数列必收敛；

(3) 在自变量 x 的某变化过程中，函数 $f(x)$ 无限趋近于 A，就是 $f(x)$ 越来越接近于 A；

(4) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 均存在，则极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 必存在.

2. 作出图象来判断下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x$；　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$；　(3) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & x<0,\\ x+1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 判断当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 的极限是否存在.

习题 1-2

1. 观察下列数列当 $n\to\infty$ 时的变化趋势，写出它们的极限：

(1) $x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$；　(2) $y_n=(-1)^n n$；

(3) $x_n=1-\dfrac{1}{10^n}$；　(4) $y_n=\sin\dfrac{n\pi}{2}$.

2. 作出图象来判断下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$；　(2) $\lim\limits_{x\to1}\ln x$；

(3) $\lim\limits_{x\to\pi}\cos x$；　(4) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$.

3. 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{x}$，画出它的图象，求当 $x\to0$ 时函数的左、右极限，从而说明在 $x\to0$ 时函数的极限是否存在.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x-1, x\leqslant0,\\ x+1, x>0,\end{cases}$ 画出它的图象，并求当 $x\to0$ 时 $f(x)$ 的左、右极限，从而说明 $f(x)$ 的极限是否存在.

5. 证明函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, x<1,\\ 1, & x=1,\\ -1, & x>1\end{cases}$ 当 $x\to1$ 时的极限不存在.